Глава 1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

1.1 Основні об'єкти теорії звичайних диференціальних рівнянь та виділення основних умов, за яких вони розглядатимуться

Основним об'єктом теорії звичайних диференціальних рівнянь є система звичайних диференціальних рівнянь виду

$$\begin{cases} \Phi_i\left(t, u_1, u_1', \ldots, u_1^{(n_1)}, \ldots, u_m, u_m', \ldots, u_m^{(n_m)}\right) = 0, \\ i = 1, \ldots, m, \end{cases} \tag{1.1}$$

де t –незалежна змінна, $u_1, , \ldots, u_m$ – шукані функції цієї змінної та Φ_i $(i = 1, \ldots, m)$ – задані дійсні функції від $1 + m + n_1 + cdots + n_m = N$ дійсних змінних, визначених в деякій області $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Розв'язком цієї системи будемо називати набір дійсних функцій $u_1, \ldots, u_m$, визначених на деякому зв'язному проміжку $I_0 \subset \mathbb{R}$, що мають на цьому проміжку похідні до порядків $n_1, \ldots, n_m$ відповідно, і задовольняють наступним двом умовам: 1) $(t, u_1(t), u_1'(t), \ldots, u_1^{(n_1)}(t), \ldots, u_m(t), u_m'(t), \ldots, u_m^{(n_m)}(t)) \in \Omega$ при $t \in I_0$;

2) $\Phi_i\left(t, u_1(t), u_1'(t), \ldots, u_1^{(n_1)}(t), \ldots, u_m(t), u_m'(t), \ldots, u_m^{(n_m)}(t)\right) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$ при $t \in I_0$.

Ці дві умови означають, що допустима підстановка даних m функцій у всі рівняння системи і при цьому отримуємо m тотожностей на проміжку I_0 .

Якщо такий проміжок I_0 та заданий на ньому набір m функцій, що задовольняє зазначеним вище двом умовам, не існують, то розв'язок може визначатися і трохи інакше.

А щось простіше? В окремому випадку $m = 1$ система (1.1) являє собою одне звичайне диференціальне рівняння n– го ($n = n_1$) порядку

$$\Phi\left(t, u, u', \ldots, u^{(n)}\right) = 0. \tag{1.2}$$

У разі, коли функція Φ є лінійною щодо невідомої функції u і всіх її похідних до порядку n включно, це рівняння має вигляд

$$a_n(t)u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)u' + a_0(t)u = \varphi(t) \tag{1.2$'$}$$

і називається *лінійним диференціальним рівнянням* n *- го порядку.* Дійсні функції a_k $(k = 0, \ldots, n)$ и φ у цьому рівнянні зазвичай передбачаються заданими на деякому зв'язному проміжку $I \subset \mathbf{R}$.

При цьому a_k $(k = 1, \ldots, n)$ називають коефіцієнтами лінійного диференціального рівняння, а φ– неоднорідним доданком. Якщо $\varphi(t) \equiv 0$ на I, то рівняння $(1.2')$ називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням (ЛОДР) n - го порядку* і в іншому випадку - *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням (ЛНДР) n -го порядку.* Точки проміжку I, у яких коефіцієнт a_n при старшій похідній перетворюється на нуль називають особливими точками лінійного рівняння.

ПРИКЛАД 1.1. Дуже часто виникає в задачах на практиці рівняння Бесселя

$$t^2 u'' + t u' + (t^2 - n^2) u = 0,$$

яке є рівнянням із особливою точкою $t = 0$.

В курсі звичайних диференціальних рівнянь переважно розглядатимемо лінійні диференціальні рівняння у випадку, коли його коефіцієнти і неоднорідний доданок неперервні на деякому зв'язному проміжку I, що не містить особливих точок. У даному випадку рівняння $(1.2')$ може бути записано у вигляді

$$u^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} p_k(t) u^{(k-1)} = f(t), \tag{1.3}$$

де $p_k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $(k = 1, \ldots, n)$ и $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ - неперервні функції, I – зв'язний проміжок в $\mathbb{R}$.

Розв'язком лінійного диференціального рівняння (1.3) називається n- раз неперервно диференційована на проміжку I функція u така, що

$$u^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n} p_k(t) u^{(k-1)}(t) \equiv f(t) \qquad \text{на проміжку} \quad I.$$

Тут звернемо увагу на те, що розв'язки визначаються на тому ж проміжку, де неперервні коефіцієнти і неоднорідний доданок лінійного диференціального рівняння (1.3).

Якщо функція Φ (1.2) не є лінійною відносно невідомої функції та її похідних до порядку n включно, але співвідношення (1.2) допускає (хоча локально) його розв'язання щодо старшої похідної невідомої функції, то приходимо до рівняння

$$u^{(n)} = g\left(t, u, u', \ldots, u^{(n-1)}\right), \tag{1.4}$$

де g – дійсна функція, яку визначено в області $G \subset I \times D$, де I- проміжок в $\mathbb{R}$ і D- відкрита множина в $\mathbb{R}^n$. Такого виду рівняння називають рівняннями, записаними у нормальній формі Коші.

У разі неперервної функції $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ *розв'язком рівняння (1.4)* називається n- раз неперервно диференційована на зв'язному проміжку $I_0 \subset I$ функція u така, що:

$$1) \qquad \left(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(n-1)}(t)\right) \in G \qquad \text{при} \quad t \in I_0;$$

$$2) \qquad u^{(n)}(t) = g\left(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(n-1)}(t)\right) \qquad \text{при} \quad t \in I_0.$$

Тут, на відміну від випадку лінійного диференціального рівняння, розв'язок передбачається визначеним на зв'язному проміжку I_0, взагалі кажучи, меншої довжини, ніж проміжок I визначення незалежної змінної t у самому рівнянні.

ПРИКЛАД 1.2. Зазначена властивість розв'язків спостерігається вже у найпростішого нелінійного диференціального рівняння першого порядку

$$\frac{du}{dt} = u^2,$$

заданого на множині $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Для будь-кого $C \in \mathbb{R}$ звуження функції $u(t) = \dfrac{1}{C - t}$ на зв'язні проміжки $I_C^+ =]C, +\infty[$ і $I_C^- =]-\infty, [$ являють собою два розв'язки даного рівняння, кожний з яких визначено лише на півосі і не може бути продовжено на всю числову вісь. Вводячи для рівняння (1.4) нові невідомі функції $x_1, \ldots, x_n$ за допомогою замін

$$\begin{array}{rcl} u(t) & = & x_1(t), \\ u'(t) & = & x_2(t), \\ & \vdots & \\ u^{(n-1)}(t) & = & x_n(t) \end{array} \tag{1.5}$$

та диференціюючи ці співвідношення, отримаємо наступну "еквівалентну" йому систему n диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних щодо похідних

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1' & = & x_2 \\ x_2' & = & x_3 \\ & \vdots & \\ x_{n-1}' & = & x_n \\ x_n' & = & g(t, x_1, \ldots, x_n) \end{array} \right. . \tag{1.6}$$

При цьому еквівалентність розуміється так. Якщо функція $u : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ є розв'язком рівняння (1.4), то набір n функцій $x_1(t) = u(t)$, $x_2(t) = u'(t), \ldots,$ $x_n(t) = u^{(n-1)}(t)$ буде розв'язком системи (1.6), і, навпаки, якщо набір n функцій $x_i : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ є розв'язком системи (1.6), то перша з цих функцій $u(t) = x_1(t)$ буде розв'язком рівняння (1.4), а наступні з них – похідними цієї функції до порядку $n-1$ включно.

Значить, будь-яке диференціальне рівняння $n-$ го порядку, записане у нормальній формі Коші (1.4), завжди може бути замінено еквівалентною йому системою диференціальних рівнянь виду (1.6).

ПРИКЛАД 1.3. Лінійне диференціальне рівняння малих коливань маятника

$$\ddot{u} + a^2\, u = 0$$

за допомогою замін

$$u = x_1, \quad u' = x_2$$

зводимо до еквівалентної системи диференціальних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a^2\, x_1 \end{array} \right. .$$

А щось складніше, але нормального вигляду. Виділивши частинний випадки системи (1.1), звернемося тепер до розгляду її загального випадку.

Якщо m співвідношень (1.1) допускають хоча б локальне розв'язання відносно $u_1^{(n_1)}, \ldots, u_m^{(n_m)}$, то отримаємо *систему диференціальних рівнянь, розв'язаних відносно старших похідних*, наступного виду

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^{(n_i)} = F_i\left(t, u_1, u_1', \ldots, u_1^{(n_1-1)}, \ldots, u_m, u_m', \ldots, u_m^{(n_m-1)}\right), \\ i = 1, \ldots, m, \end{array} \right.$$

Ця система, за аналогією з тим, як це було зроблено для одного диференціального рівняння (1.4), завжди за допомогою введення нових невідомих функцій може бути зведена до системи диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідних.

ПРИКЛАД 1.4. Система, що стосується задачі двох тіл, диференціальних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -\dfrac{G\mu x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -\dfrac{G\mu x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{array} \right.$$

де $\mu = m_1 + m_2$, G - гравітаційна стала, за допомогою замін уведення змінних

$$x_1 = p_1, \quad x_2 = p_2, \quad x_1' = q_1, \quad x_2' = q_2$$

зводимо до системи рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = q_1, \\[2ex] \dfrac{dp_2}{dt} = q_2, \\[2ex] \dfrac{dq_1}{dt} = -\dfrac{G\mu p_1}{(p_1^2 + p_2^2)^{\frac{3}{2}}}, \\[2ex] \dfrac{dq_2}{dt} = -\dfrac{G\mu p_2}{(p_1^2 + p_2^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Розв'язана відносно похідних система диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} & = & f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ & \vdots & \\ \dfrac{dx_n}{dt} & = & f_n(t, x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{1.7}$$

де f_i $(i = 1, \ldots, n)$ – дійсні функції, які задано в деякої області $G \subset I \times D$ (I -это промежуток в $\mathbb{R}$ и D - це проміжок у $\mathbb{R}$ і D - відкрита множина в $\mathbb{R}^n$), називається *системою диференціальних рівнянь, записаною у нормальній формі Коші* (або, коротше, нормальною системою диференціальних рівнянь). Тут змінні $x_1, \ldots, x_n$ зазвичай називають *фазовими змінними*, область D їх змінювання – *фазовим простором*, а множину $I \times D$ - *розширеним фазовим простором* системи (1.7).

Оскільки диференціальне рівняння (1.4) еквівалентне системі диференціальних рівнянь (1.6), яка є частинним випадком системи (1.7), то *у рівнянні (1.4) фазовими змінними є* $u, u', \ldots, u^{(n-1)}$.

Якщо функції $f_i : G \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ неперервні *розв'язком системи (1.7) на проміжку* $I_0 \subset I$ називається сукупність n неперервно диференційованих функцій $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ таких, що

$$1) \qquad (t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in G \qquad \text{при} \quad t \in I_0;$$

$$2) \qquad \frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \; (i = 1, \ldots, n) \qquad \text{при} \quad t \in I_0.$$

Якщо $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ - розв'язок системи (1.7) на проміжку I_0 , то графік цього розв'язку, тобто множина точок

$$\Gamma = \{(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \, : \, t \in I_0\}$$

розширеного фазового простору $I \times D$ називається *інтегральної кривої* системи (1.7), а множина точок

$$\{(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \, : \, t \in I_0\}$$

фазового простору D – *фазовою кривою чи траєкторією* системи (1.7).

Зрозуміло, що траєкторія - це проекція інтегральної кривої на фазовий простір.

Траєкторія розв'язку може бути і точкою. Точка $(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$ називається *точкою спокою, або положенням рівноваги* системи (1.7), якщо

$$\begin{cases} f_i(t, x_1^0, \ldots, x_n^0) \equiv 0 \qquad \text{на} \quad I_0, \\ i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Очевидно, що точці спокою $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ системи (1.7) відповідає розв'язок цієї системи $x_i(t) \equiv x_i^0$ $(i = 1, \dots, n)$, визначене на проміжку I_0. Траєкторією цього розв'язку якраз і є точка спокою. Наявність системи диференціальних рівнянь точок спокою істотно впливає на характер поведінки її інтегральних та фазових кривих.

ПРИКЛАД 1.5. Розглянемо систему диференціальних рівнянь, якою описують малі коливання маятника

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}.$$

Неважко перевірити, що при будь-якому значенні $C \in \mathbf{R}$ функції

$$x_1(t) = C \sin t, \qquad x_2(t) = C \cos t$$

є розв'язками цієї системи на проміжку $I_0 = \mathbf{R}$.

Інтегральна та фазова крива, що відповідають цьому розв'язку являють собою множини

$$\{(t, C\sin t, C\cos t)\ :\ t \in \mathbf{R}\} \qquad \text{і} \qquad \{(C\sin t, C\cos t)\ :\ t \in \mathbf{R}\}$$

При $C \neq 0$ перше з них є гвинтовою лінією на поверхні циліндра, а друге - коло, яке є проекцією гвинтової лінії на фазовий простір $\mathbf{R^2}$.

Якщо $C = 0$, то фазова крива є точкою спокою $(0,0)$, якій відповідає тривіальний розв'язок $x_1(t) \equiv 0,\ x_2(t) \equiv 0$ на $\mathbf{R}$.

Дійсну функцію $U(t, x_1, \dots, x_n)$, визначену в області G і відмінну від сталої на будь-якій непустій підобласті з G, називають *інтегралом* системи (1.7), якщо при заміні $x_1, \dots, x_n$ будь-яким розв'язком $x_i : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$ цієї системи вона перетворюється тотожно (відносно t) у сталу, тобто $U(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \equiv C$ на I_0. При цьому співвідношення виду $U(t, x_1, \dots, x_n) = C$, де C довільна стала з множини значень функції U, називають першим інтегралом системи (1.7).

Геометричний зміст означення інтеграла полягає в наступному. Якщо інтегральна крива $\Gamma = \{(t, x_1(t), \dots, x_n(t))\,;\, t \in I_0\}$ системи диференціальних рівнянь (1.7) проходить через точку $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ і в цій точці інтеграл U дорівнює C_0, то така інтегральна крива повністю розташована на поверхні рівня $U(t, x_1, \dots, x_n) = C_0$.

Її величність - задача Коші. Задача про знаходження інтегральної кривої, що проходить через точку $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ розширеного фазового простору рівносильна в аналітичній постановці задачі про знаходження розв'язку системи диференціальних рівнянь (1.7), що задовольняє умовам

$$x_1(t_0) = x_1^0,\ \dots,\ x_n(t_0) = x_n^0. \tag{1.8}$$

Така задача називається *задачею Коші* для системи диференціальних рівнянь (1.7). При цьому умови (1.8) називають початковими умовами, а набір $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ - початковими даними задачі Коші.

Оскільки диференціальне рівняння n порядку (1.4) еквівалентно системі (1.6), у якій фазовими змінними є $x_1 = u,\ x_2 = u',\ \dots,\ x_n = u^{(n-1)}$, то для нього задача Коші полягає у знаходженні розв'язку, який задовольняє початковим умовам

$$u(t_0) = u_1^0,\ u'(t_0) = u_2^0,\ \dots,\ u^{(n-1)}(t_0) = u_n^0,$$

де набір початкових даних $(t_0, u_1^0, \dots, u_n^0) \in G$.

Чи існує розв'язок задачі Коші і якщо - так, то що ми з цього будемо мати? Відповідь на дуже важливе питання про існування розв'язку задачі Коші (1.7), (1.8) дає така теорема, яка буде доведено у розділі 8 цього курсу.

Теорема Пеано.[1] *Якщо в системі (1.7) функції $f_i : G \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$ неперервні, то для будь-якого набору $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in G$ задача Коші (1.7), (1.8) має принаймні один розв'язок, наперед визначений в деякому околі точки t_0.*

[1] Цю теорему було встановлено Дж. Пеано 1890 року для випадку скалярного диференціального рівняння першого порядку $x' = f(t, x)$.

З геометричної точки зору ця теорема говорить про те, що через кожну точку області G проходить інтегральна крива системи диференціальних рівнянь (1.7). Якщо при цьому відомий перший інтеграл $U : G \longrightarrow \mathbb{R}$ системи (1.7), то він дозволяє описати і розташування всіх таких кривих G. Дійсно, в силу означення першого інтеграла, інтегральна крива системи (1.7), що проходить через точку $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \in G$, яка явно лежить на поверхні рівня

$$U(t, x_1, \ldots, x_n) = U(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0),$$

повністю розташована на цій поверхні. Тому, через теорему Пеано кожна поверхня рівня $U(t, x_1, \ldots, x_n) = C$, де $C \in U(G)$, містить повністю розташовані на ній інтегральні криві та суцільно ними заповнена. При цьому безліч таких поверхонь рівня, які при різних значеннях C не перетинаються, охоплюють усі інтегральні криві системи (1.7). повністю розташована на цій поверхні. Тому, через теорему Пеано кожна поверхня рівня $U(t, x_1, \ldots, x_n) = C$, де $C \in U(G)$, містить повністю розташовані на ній інтегральні криві та суцільно ними заповнена. При цьому безліч таких поверхонь рівня, які при різних значеннях C не перетинаються, охоплюють усі інтегральні криві системи (1.7).

Теорема Пеано дозволяє, зокрема, встановити наступний критерій.

Теорема (критерій інтеграла). *Нехай у системі диференціальних рівнянь (1.7) функції* $f_i : G \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ *неперервні. Диференційована функція* $U : G \longrightarrow \mathbb{R}$*, відмінна від сталої на будь-якій підобласті з* G*, є першим інтегралом цієї системи тоді і тільки тоді, коли всюди в області* G *дотримано рівність*

$$\frac{\partial U(t, x_1, \ldots, x_n)}{\partial t} + \frac{\partial U(t, x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} f_1(t, x_1, \ldots, x_n) + \cdots + \frac{\partial U(t, x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} f_n(t, x_1, \ldots, x_n) = 0. \quad (1.9)$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай $U : G \longrightarrow \mathbb{R}$ - інтеграл системи (1.7) і $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ - довільна точка області G. В силу теореми Пеано існує розв'язок $x_i : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = \overline{1, n})$ задача Коші (1.7), (1.8), де I_0 - проміжок, що містить t_0. На цьому розв'язку згідно з означенням інтегралу має місце тотожність

$$U(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) = C \quad \text{при} \quad t \in I_0, \quad (1.10)$$

де $C = U(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Диференціюючи це тотожність по змінної t, з використанням правила диференціювання складеної функції отримаємо

$$\frac{\partial U(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))}{\partial x_i} \frac{dx_i(t)}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad t \in I_0. \quad (1.11)$$

Звідси з урахуванням означення розв'язка системи (1.7) маємо

$$\frac{\partial U(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))}{\partial x_i} f_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) = 0 \quad \text{при} \quad t \in I_0. \quad (1.12)$$

Оскільки розглянутий розв'язок задовольняє умову (1.8), то при $t = t_0$ ця рівність набуває вигляду

$$\frac{\partial U(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_i} f_i(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) = 0.$$

Через довільність вибору точки $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \in G$ воно означає, що всюди в G дотримано (1.9).

Достатність. Нехай для диференційовній функції $U : G \longrightarrow \mathbb{R}$ всюди в G дотримано рівність (1.9). Покажемо, що U - інтеграл системи (1.7). Для цього виберемо довільний розв'язок $x_i : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1,\ ldots, n)$ системи диференціальних рівнянь (1.7). Оскільки згідно з означенням цього розв'язка $(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in G$ при $t \in I_0$, то через (1.9) має місце (1.12). Звідси з урахуванням того, що розглянутий розв'язок, крім того, перетворює у тотожность на проміжку I_0 усі рівняння системи (1.7) випливають (1.11). У силу правила диференціювання складеної функції це означає, що

$$\frac{dU(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad t \in I_0.$$

Отже, має місце тотожність (1.9). Звідси, через довільність вибору розв'язка, витікає, що U - інтеграл системи диференціальних рівнянь (1.7). ■

Вираз, що стоїть у формулі (1.9), ліворуч називають *похідною функції U в силу системи (1.7)* і позначають $\frac{dU}{dt}$.

ПРИКЛАД 1.6. Нехай $H = H(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_n)$ - неперервно диференційована функція в області $G \subset \mathbb{R}^{2n}$. Система диференціальних рівнянь виду

$$\begin{cases} \dfrac{dx_k}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y_k}, \quad k = 1, \ldots, n, \\ \\ \dfrac{dy_k}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_k}, \quad k = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{1.13}$$

називається гамільтоновою системою з гамільтоніаном H.

Обчислюючи похідну функції H в силу цієї системи, помічаємо, що всюди в області G

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial H}{\partial y_k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_k} \left(-\frac{\partial H}{\partial x_k} \right) = 0.$$

Отже, відповідно до теореми про інтеграл гамільтоніан H гамільтонової системи (1.13) є її інтегралом.

До гамільтонових систем приводять, наприклад, задачі, що описують рух механічної системи в потенційному полі з неперервно диференційованим потенціалом U. *ПРИКЛАД 1.7.* В одновимірному випадку рух матеріальної точки масою m в потенційному полі з неперервно диференційованим на деякому інтервалі потенціалом $U(x)$ описується диференціальним рівнянням другого порядку

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}.$$

Зводячи його за допомогою замін $x = x_1$ і $\dot{x} = \frac{1}{m}x_2$ до еквівалентної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \dfrac{1}{m}x_2, \\ \\ \dot{x_2} = -\dfrac{dU}{dx_1}, \end{cases}$$

зауважуємо, що вона може бути переписана у вигляді гамільтонової системи

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \dfrac{\partial H(x_1, x_2)}{\partial x_2}, \\ \\ \dot{x_2} = -\dfrac{\partial H(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \end{cases}$$

з гамільтоніаном $H(x_1, x_2) = \frac{1}{m}\frac{x_2^2}{2} + U(x_1)$. В цьому гамільтоніані перший доданок $\frac{1}{m}\frac{x_2^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$ - кінетична енергія матеріальної точки, а другий $U(x_1) = U(x)$ - потенційна. Оскільки на будь-якому розв'язку системи гамільтоніан, як її перший інтеграл, тотожньо відносно t дорівнює сталої, цей факт висловлює закон збереження повної енергії матеріальної точки впродовж усього періоду її часу руху. Прикладами рухів матеріальної точки у потенційному полі є коливання маятника, коливання пружини, рух у поле тяжіння Землі та багато інших.

Вважаючи, що праві частини системи (1.7) неперервні області G, вкажемо ще на деякі її властивості та можливості введення для неї низки важливих означень.

І навіщо нам потрібні перші інтеграли? *Знання інтеграла U системи (1.7) допускає зниження розмірності системи на одиницю*, якщо перший інтеграл

$$U(t, x_1, \ldots, x_n) = C \tag{1.14}$$

при будь-якому значенні $C \in U(G)$ може бути розв'язано відномно однією із змінних $x_1, \ldots, x_n$. Справді, якщо (1.14) можна розв'язати, наприклад, відносно x_1, тобто маємо $x_1 = \varphi_1(t, x_2, \ldots, x_n, C)$, то підставляючи це значення x_1 в останні $n-1$ рівнянь системи (1.7), отримаємо систему з $n-1$-го диференціальних рівнянь першого порядку відносно невідомих функцій $x_2, \ldots, x_n$. Знайшовши все розв'язки цієї системи та підставляючи кожне з них у формулу для x_1, будемо отримувати розв'язок $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ системи (1.7).

Якщо відомо два інтеграли і з системи двох перших інтегралів можна однозначно знайти дві змінні, наприклад, x_1 і x_2 через інші, то розмірність системи можна знизити на 2 одиниці.

Відомо, що нормальна система диференціальних рівнянь не може допускати більше n незалежних відносно $x_1, \ldots, x_n$ інтегралів.

n інтегралів $U_i : G \longrightarrow \mathbb{R}\ i = \overline{1,n}$ системи (1.7) називаються функціонально незалежними в області G щодо $x_1, \ldots, x_n$, якщо немає співвідношення виду $\Phi(U_1, \ldots, U_n) = 0$ за жодного вибору функції Φ, яка залежить від $x_1, \ldots, x_n$.

Будь-які n перших інтегралів будемо називати функціонально незалежними відносно $x_1, \ldots, x_n$, якщо відповідні їм інтеграли незалежні відносно цих змінних.

Відомо, що n диференційованих інтегралів $U_i : G \longrightarrow \mathbb{R}ß = \overline{1,n}$ системи (1.7) є функціонально незалежними в області G відносно $x_1, \ldots, x_n$ тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{D(U_1, \ldots, U_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \not\equiv 0 \quad \text{в области} \quad G.$$

(Матвєєв стор. 160)

Приустимо тепер, що вдалося отримати n функціонально незалежних інтегралів, що диференціюються, і розглянемо систему з перших інтегралів

Якщо для системи (1.7) вдалося знайти n функціонально незалежних і неперервно диференційованих перших інтегралів $U_i : G \longrightarrow \mathbb{R} \ \ (i = 1, \ldots, n)$, то

$$\frac{D(U_1, \ldots, U_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \not\equiv 0 \quad \text{в області} \quad G.$$

Тому кожна точка $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \in G$, в якій даний якобіан відмінний від нуля, визначає точку $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0, C_1^0, \ldots, C_n^0)$, де $C_i^0 = U_i(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \ \ (i = 1, \ldots, x_n)$, в деякому околі якої система співвідношень

$$\begin{cases} U_1(t, x_1, \ldots, x_n) = C_1, \\ \qquad \cdots \\ U_n(t, x_1, \ldots, x_n) = C_n, \end{cases} \tag{1.15}$$

де $(C_1, \ldots, C_n) \in U_1(G) \times \ldots \times U_n(G)$, однозначно можна розв'язати відносно $x_1, \ldots, x_n$. Отриманий при цьому набір n функцій

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, C_1, \ldots, C_n), \\ \qquad \cdots \\ x_n = \varphi_n(t, C_1, \ldots, C_n), \end{cases} \tag{1.16}$$

неперервно диференційованих на множині $I_0 \times C$, де I_0-деякий інтервал, що містить точку t_0, і C - деякий окіл точки $(C_1^0, \ldots, C_n^0)$ в $\mathbb{R}^n$, очевидно, є n- параметричною сім'ю розв'зків системи диференціальних рівнянь (1.7), причому цей набір функцій при $C_i = C_i^0 \ (i = 1, \ldots, n)$ є розв'зком, яке задовольняє умовам (1.8). З геометричної точки зору даному розв'зку відповідає інтегральна крива, утворена перетином всіх поверхонь рівня $U_i(t, x_1, \ldots, x_n) = U_i(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)\ (i = 1,\ ldots, n)$. Особливо наочну геометричну інтерпретацію маємо при $n = 2$, тобто у разі тривимірного розширеного фазового простору. Тут вказана інтегральна крива буде лінією перетину двох поверхонь рівня $U_i(t, x_1, x_2) = U_i(t_0, x_1^0, x_2^0) \ \ (i = 1, 2)$, розташованих в $\mathbb{R}^3$.

Сукупність n перших інтегралів $U_i \ (i = 1, \ldots, n)$ системи диференціальних рівнянь (1.7) називають *загальним інтегралом* цієї системи в області $G_0 \in G$, якщо для будь-якої точки $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \in G_0$ система співвідношень (1.15), в якої $C_i = U_i(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \ \ (i = 1, \ldots, n)$, однозначно визначає диференційований в деякому околі точки t_0 розв'зок (1.16) системи (1.7), що задовольняє умовам (1.8).

З іншого боку, n - параметрична сім'я n функцій (1.16) називають загальним розв'зком в області $G_0 \in G$ системи диференціальних рівнянь (1.7), якщо: 1) при будь-якому допустимому наборі сталих $(C_1, \ldots, C_n)$ є розв'зком системи (1.7), інтегральна крива якого розташована G_0, і 2) для будь-якої фіксованої точки $(t, x_1, \ldots, x_n) \in G_0$ система співвідношень (1.16) однозначно розв'язано відносно $C_1, \ldots, C_n$.

Друга умова цього означення означає, що при будь-якому наборі $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \in G_0$ (1.16) визначає єдиний розв'язок, що відповідає умовам (1.8).

В силу на вказаний зв'язок між загальним інтегралом і загальним розв'язком кажуть, що загальний інтеграл визначає загальний розв'язок в неявному вигляді.

Розв'язок, який виходить із загального інтегралу чи загального розв'язку при фіксованому наборі сталих $(C_1^0, \ldots, C_n^0)$ з множини їх допустимих значень, називається *частинним розв'язком* системи диференціальних рівнянь (1.7).

ПРИКЛАД 1.8. Найпростішим прикладом системи диференціальних рівнянь виду (1.7), всі розв'язки якої легко можуть бути знайдені, є система

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t), \\ \quad\cdots \\ x_n' = f_n(t), \end{cases} \tag{1.17}$$

де $f_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ - неперервні функції.

Оскільки тут праві частини залежать тільки від t, то ця система визначає похідні невідомих функцій $x_1, \ldots, x_n$. Тому задача про знаходження її розв'язку рівнозначна задачі про знаходження первісних цих функцій. Значить, її розв'язком є набір, визначених на проміжку I n функцій

$$x_i(t) = \int\limits_{t_*}^{t} f_i(\tau)\, d\tau + C_i \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{1.18}$$

де $t_* \in I$ и C_i $(i = 1, \ldots, n)$ - довільні сталі. Він є загальним розв'язком системи (1.17) на множині $I \times \mathbb{R}^n$, оскільки 1) при будь-якому наборі сталих $(C_1, \ldots, C_n) \in \mathbb{R}^n$ функції (1.18) є розв'язком системи (1.17) та 2) при будь-якому наборі $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \in I \times \mathbb{R}^n$ із системи співвідношень

$$x_i^0 = \int\limits_{t_*}^{t_0} f_i(\tau)\, d\tau + C_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

однозначно визначаються сталі

$$C_i = x_i^0 - \int\limits_{t_*}^{t_0} f_i(\tau)\, d\tau.$$

При цих значеннях сталих з (1.18) отримаємо єдиний розв'язок

$$x_i(t) = x_i^0 + \int\limits_{t_0}^{t} f_i(\tau)\, d\tau \quad (i = 1, \ldots, n),$$

системи (1.17), що задовольняють умовам (1.8).

З (1.18) також випливає, що функції

$$U_i(t, x_i) = x_i - \int\limits_{t_*}^{t} f_i(\tau)\, d\tau \quad (i = 1, \ldots, n)$$

є першими інтегралами системи (1.13) на множині $I \times \mathbb{R}^n$ і в сукупності представляють на даної множині загальний інтеграл цієї системи.

У цьому прикладі знаходження всіх розв'язків системи звелося до звичайного інтегрування її рівнянь. Ця обставина певною мірою може бути поясненням що склалося в теорії диференціальних рівнянь терміну *"інтегрування диференціальних рівнянь"* для позначення процесу отримання їх розв'язків. При цьому кажуть, що *диференціальне рівняння або система диференціальних рівнянь проінтегрована в замкнутому аналітичному вигляді*, якщо всі розв'язки отримані з використанням скінченого числа наперед визначених операцій. До таких, наприклад, належать стандартні операції елементарної математики, операції складання складених та обернених функцій, а також операції інтегрування- *"квадратур"*.

Непомітно підкралася проблема, але не для нас. Звернімо увагу на те, що введені вище означення загального інтегралу та загального розв'язку передбачають однозначного виділення з них розв'язку, що задовольняє початковим умовам (1.8). Але теорема Пеано гарантує існування принаймні одного такого розв'язку. Отже, за наявності більше одного розв'язку задачі Коші (1.7), (1.8) лише один з них буде міститємоться у загальному розв'язку або визначатись загальним інтегралом. У зв'язку з цим природним здається питання про додаткові обмеження на праві частини системи (1.7), при яких задача Коші (1.7), (1.8) матиме лише один розв'язок. Це питання є важливим і з погляду застосувань, оскільки у випадках, коли система диференціальних рівнянь (1.7) описує детермінований процес, задача Коші повинна розв'язок визначати однозначно.

Будемо говорити, що задача Коші (1.7), (1.8) має *єдиний розв'язок*, якщо будь-які її два розв'язки співпадають в деякому околі точки t_0. При цьому відповідний даної задачі набір початкових даних $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ будемо називати *точкою единості розв'яз задачі Коші*, а підмножина G_0 області G, кожен елемент якої є точкою єдиності розв'язку задачі Коші, - *множиною единості системи диференціальних рівнянь (1.7)*.

Найбільш ефективно вирішується питання про існування та единость розв'язку задачі Коші для нормальних систем диференціальних рівнянь, праві частини яких є лінійними функціями відносно фазових змінних. Такі системи мають вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx_i}{dt} = p_{i1}(t)x_1 + \cdots + p_{in}(t)x_n + q_i(t), \\ i = 1, \ldots, n, \end{array} \right. \tag{1.19}$$

де $p_{ik} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i,k = 1,\ldots,n)$, $q_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1,\ldots,n)$, I *- проміжок в* $\mathbb{R}$*, і називаються системами лінійних диференціальних рівнянь (СЛДР). При цьому функції* p_{ik}
$(i,k = 1,\ldots,n)$ *називають коефіцієнтами системи, а* q_i $(i = 1,\ldots,n)$ *- неоднорідними доданками. Якщо у (1.19) все* $q_i(t) \equiv 0$ *на проміжку* I*, то систему називають системою лінійних однорідних диференціальних рівнянь (СЛОДР), і в іншому випадку - системою лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь (СЛНДР).*

Розв'язком системи лінійних диференціальних рівнянь(1.19) у випадку неперервних на проміжку I *коефіцієнтів та неоднорідних доданків називається набір* n *неперервно диференційованих функцій* $x_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1,\ldots,n)$*, при підстановці яких у всі рівняння системи отримаємо* n *тотожностей на проміжку* I.

Для системи (1.19) надалі буде доведено таку

Теорема *(існування та едності розв'язка задачі Коші для СЛДР). Якщо* $p_{ik} \in C(I;\mathbb{R})$ $(i,k = 1,\ldots,n)$ *і* $q_i \in C(I;\mathbb{R})$ $(i = 1,\ldots,n)$*, то для будь-якого* $t_0 \in I$ *і для будь-яких* $x_i^0 \in \mathbb{R}$ $(i = 1,\ldots,n)$ *задача Коші (1.19), (1,9) має единий розв'язок.*

Для нормальних систем нелінійних диференціальних рівнянь питання про єдиність розв'язку задачі Коші та про проміжок, на якому вын визначений, вирішується в теорії звичайних диференціальних рівнянь з допомогою низки теорем, але не настільки ефективно, як для СЛРУ. При цьому привертає увагу локальний характер цих теорем. Сформулюємо одну з найбільш зручних для застосування ознак існування единого розв'язку задачі Коші, яка надалі буде отримано у вигляді наслідка із більш загального твердження.

Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші. *Нехай у системі диференціальних рівнянь (1.7) функції* $f_i : G \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1,\ldots,n)$ *неперервні і мають неперервні похідні по фазовим* *змінним. Тоді для будь-якого набору початкових даних* $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in G$ *задача Коші (1.7), (1.8) має єдиний розв'язок, наперед визначений в околі точки* t_0 .

ПРИКЛАД 1.9. Для диференціального рівняння першого порядку

$$x' = x^{\frac{1}{3}} \sin(t^2 + x^2),$$

права частина неперервна на множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *. При цьому частинна похідна фазової змінної має вигляд*

$$\left(x^{\frac{1}{3}} \sin(t^2 + x^2)\right)'_x = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \sin(t^2 + x^2) + 2x^{\frac{4}{3}} \cos(x^2 + t^2)$$

і є неперервною на множині $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ *.Значить, для цього рівняння в області* $G = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ *виконано всі умови наведеної вище теореми. Тому для нього задача Коші з початковою умовою* $x(t_0) = x_0$ *має єдиний розв'язок при будь-якому* $t_0 \in \mathbb{R}$ *і* $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *. Якщо ж у початковій умові* $x_0 = 0$ *, то до такої задачі Коші ця теорема вже не може бути застосовано.*

Зазначене в теоремі додаткове припущення про неперервність в області G *частинних похідних за фазовими змінним функцій* f_i $(i = 1, \dots, n)$ *є жорстким і, в цілому, не відображає суті проблеми, оскільки існують системи нелінійних диференціальних рівнянь лише з неперервними в області* G *правими частинами, для яких задача Коші про знаходження розв'язку, що відповідає умовам (1.9), має єдиний розв'язок.*

Рівняння з відокремлюваними змінними. *(ПОДІЛЯЙ І ВЛАДИВАЙ). Рівнянням з з відокремлюваними змінними називається диференціальне рівняння першого порядку наступного виду*

$$\frac{dx}{dt} = g(t)h(x), \tag{1.20}$$

де $g \in C(I;\ \mathbb{R})$, $h \in C(D;\ \mathbb{R})$, I *- проміжок в* $\mathbb{R}$, $D = (a, b)$ *- інтервал в* $\mathbb{R}$.

Така назва рівняння (1.20) пояснюється тим, що в його правій частини фазова змінна x *відокремлена від незалежної змінної* t .

Виберемо довільним чином точки $t_0 \in I$, $x_0 \in (a, b)$ *і поставимо задачу Коші про знаходження розв'язку рівняння (1.20), яке задовольняє умову*

$$x(t_0) = x_0. \tag{1.21}$$

Питання про існування та єдиність розв'язку задачі Коші (1.20), (1.21) суттєво залежить від того, чи є точка x_0 *точкою спокою даного рівняння, чи ні.*

Розглянемо випадок, коли x_0 *не є точкою спокою. Тоді* $h(x_0) \neq 0$ *і , не обмежуючи загальності, можна вважати, що*

$$h(x) \neq 0 \quad \text{при} \quad x \in (a, b). \tag{1.22}$$

Нехай x *- розв'язок на проміжку* $I_0 \subset I$ *задачі Коші (1.20), (1.21). Для нього в силу означення розв'язку*

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t)h(x(t)) \quad \text{и} \quad x(t) \in (a, b) \quad \text{при} \quad t \in I_0.$$

Звідси з урахуванням (1.22) маємо

$$\frac{x'(t)}{h(x(t))} = g(t) \quad \text{при} \quad t \in I_0.$$

Інтегруючи обидві частини цієї рівності від t_0 *до* t *, отримаємо*

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{x'(\tau)}{h(x(\tau))}\, d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau \quad \text{при} \quad t \in I_0.$$

Оскільки

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{x'(\tau)}{h(x(\tau))}\,d\tau = \left[\begin{array}{l} s = x(\tau) \\ ds = x'(\tau)\,d\tau \end{array}\right] = \int\limits_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{ds}{h(s)}$$

і дотримано умову (1.21), то приходимо до співвідношення виду

$$\int\limits_{x_0}^{x(t)} \frac{ds}{h(s)} = \int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau \quad \text{\textit{при}} \quad t \in I_0. \tag{1.23}$$

Далі, введемо функцію

$$H_{x_0}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{ds}{h(s)}\,, \quad x \in (a,b). \tag{1.24}$$

Оскільки функція h *неперервна на інтервалі* (a,b) *і задовольняє умову (1.22), то функція* H *, як інтеграл з змінною верхньою межею, неперервно диференційована на* (a,b) *, причому*

$$H'_{x_0}(x) = \frac{1}{h(x)} \neq 0 \quad \text{\textit{при}} \quad x \in (a,b).$$

Звідси випливає, що H_{x_0} *є або зростаючою (якщо* $h(x) > 0$ *), або спадної (якщо* $h(x) < 0$ *) на інтервалі* (a,b) *функцією. Тому для неї існує обернена функція* $H_{x_0}^{-1}$ *, яка визначена і неперервно диференційована на множині* $H_{x_0}((a,b))$ *значень функції* H_{x_0} *.*

В силу (1.24) множина значень функції H_{x_0} *представляє собою інтервал виду*

$$H_{x_0}((a,b)) = (A,B),$$

де

$$A = H_{x_0}(a) = -\int\limits_{a}^{x_0} \frac{ds}{h(s)} < 0, \quad B = H_{x_0}(b) = \int\limits_{x_0}^{b} \frac{ds}{h(s)} > 0, \quad \text{\textit{якщо}} \quad h(x) > 0 \quad \text{\textit{при}} \quad x \in (a,b) \tag{1.25$_+$}$$

и

$$A = H_{x_0}(b) = \int\limits_{x_0}^{b} \frac{ds}{h(s)} < 0, \quad B = H_{x_0}(a) = -\int\limits_{a}^{x_0} \frac{ds}{h(s)} > 0, \quad \text{\textit{якщо}} \quad h(x) < 0 \quad \text{\textit{при}} \quad x \in (a,b). \tag{1.25$_-$}$$

згідно з (1.23) і (1.24)

$$H_{x_0}(x(t)) = \int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau \quad \text{\textit{при}} \quad t \in I_0.$$

Звідси з урахуванням вищевикладеного випливає, що дотримано умову

$$\int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau \in H_{x_0}((a,b)) = (A,B) \quad \text{\textit{при}} \quad t \in I_0 \tag{1.26}$$

і розв'язок x *має вид*

$$x(t) = H_{x_0}^{-1}\left(\int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau\right), \quad t \in I_0. \tag{1.27}$$

Таким чином, встановлено, що якщо задача Коші (1.20), (1.21) має розв'язок, заданий на зв'язаному проміжку $I_0 \in I$ *, цей розв'язок однозначно визначається формулою (1.27) і при цьому виконується умова (1.26). Його існування випливає з теореми Пеано. Залишається лише уточнити вид проміжку* I_0 *, у якому він визначений.*

Оскільки $\int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau$ *є неперервною функцією від верхньої межі інтегрування* t *і при* $t = t_0$ *перетворюється на нуль, а множина значень* $H_{x_0}((a,b)) = (A,B)$ *функції* H_{x_0} *містить точку нуль, то знайдеться проміжок* $I_0 \subset I$ *, що містить точку* t_0 *, для якого дотримано умову (1.26). Вибравши максимальний із таких проміжків* I_0 *, покажемо, що на ньому функція (1.27) є розв'язком задачі Коші (1.20), (1.21).*

Оскільки функція $H_{x_0}^{-1}$ *, з доведеного вище, неперервно диференційована на інтервалі* $H_{x_0}((a,b)) = (A,B)$ *, а інтеграл зі змінною верхньою межею* $\int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau$ *- неперервно диференційована на проміжку* I_0 *функція зі значеннями* $H_{x_0}((a,b))$ *, то (1.27), як суперпозиція цих функцій, є неперервно диференційованої на проміжку* I_0 *та згідно з правилами диференціювання складеної та оберненої функцій*

$$x'(t) = \left(\int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau\right)' \frac{1}{H'_{x_0}(x)\big|_{x=x(t)}} = g(t)h(x(t)) \quad \text{при} \quad t \in I_0.$$

Крім того, з (1.27) маємо

$$x(t_0) = H_{x_0}^{-1}\left(\int\limits_{t_0}^{t_0} g(\tau)\,d\tau\right) = H_{x_0}^{-1}(0),$$

звідки випливає, що $H_{x_0}(x(t_0)) = 0$ *. Але функція* H_{x_0} *, будучи строго монотонною на проміжку* $D = (a,b)$ *, може прийняти нульове значення тільки в одній точці, якою очевидно, є точка* x_0 *. Отже,* $x(t_0) = x_0$ *.*

Таким чином, доведено

Теорема 1.1. *Нехай* $g \in C(I;\ \mathbf{R})$, $h \in C((a,b);\ \mathbf{R})$ *і дотримано умову* (1.22) *. Тоді для будь-яких* $t_0 \in I$ *і* $x_0 \in (a,b)$ *задача Коші* (1.20) *,* (1.21) *має єдиний розв'язок, причому цей розв'язок визначається з (1.23) і має вигляд* (1.27) *, де* $H_{x_0}^{-1}$ *– функція, обернена для функції* (1.24) *, а* I_0 *– максимальний проміжок з* I *, що містить точку* t_0 *, для якого виконано умову* (1.26) *.*

Зазначене в цій теоремі розв'язок задачі Коші (1.20), (1.21) отримано із співвідношення (1.23). До нього на практиці зазвичай приходять, виконуючи такі формальні дії. Спочатку рівняння записуємо у вигляді

$$dx = g(t)h(x)dt. \tag{1.28}$$

Потім, відокремлюємо змінні отримаємо рівність

$$\frac{dx}{h(x)} = g(t)dt, \tag{1.29}$$

внаслідок інтегрування лівої частини якого по x *, а правою по* t *, отримують співвідношення (1.23). Правильність виконання цих операцій у разі, коли* $h(x) \neq 0$ *на проміжку* (a,b) *, підтверджується наведеним вище доказом теореми 1.1.*

ПРИКЛАД 1.5. Розглянемо задачу Коші

$$\frac{dx}{dt} = (1 + |x|)^{\alpha}, \tag{1.30}$$

$$x(0) = 0, \tag{1.31}$$

де α *– дійсний параметр.*

Тут

$$g(t) \equiv 1, \quad h(x) = (1+|x|)^{\alpha}, \quad I = \mathbf{R}, \quad D = \mathbf{R}, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = 0.$$

Оскільки

$$h(x) > 0 \quad \textit{при} \quad x \in \mathbf{R},$$

то відповідно до теореми 1.1 задача (1.30)-(1.31) має єдиний розв'язок, причому цей розв'язок визначається із співвідношення (1.23), тобто із співвідношення

$$\int_0^{x(t)} \frac{ds}{(1+|s|)^{\alpha}} = t. \tag{1.32}$$

Не обчислюючи інтеграла, що стоїть зліва, досліджуємо цей розв'язок. Відповідно до теореми 1.1. він має вигляд

$$x(t) = H_0^{-1}(t)), \quad t \in I_0,$$

де H_0^{-1} *- функція, обернена до функції*

$$H_0(x) = \int_0^x \frac{ds}{(1+|s|)^{\alpha}},$$

і I_0 *- максимальний проміжок, для якого*

$$t \in H_0(\mathbb{R}) \quad \textit{при} \quad t \in I_0.$$

Звідси зрозуміло, що

$$I_0 = H_0(\mathbb{R}) = (A, B).$$

Оскільки $h(x) > 0$ *при* $x \in \mathbb{R}$, *то функція* H_0 *є строго зростаючою на* $\mathbb{R}$ *і тому*

$$A = H_0(-\infty) = -\int_{-\infty}^0 \frac{ds}{(1+|s|)^{\alpha}}, \quad B = H_0(+\infty) = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(1+|s|)^{\alpha}}.$$

Звідси, беручи до уваги рівність

$$H_0(-\infty) = -\int_{-\infty}^0 \frac{ds}{(1+|s|)^{\alpha}} = \left[\begin{array}{l} s = -\tau \\ ds = -d\tau \end{array} \right] = -\int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{(1+|\tau|)^{\alpha}} = -H_0(+\infty)$$

і враховуючи, що при $\alpha \leq 1$ *дані інтеграли розбігаються, а при* $\alpha > 1$ *- збігаються, знаходимо*

$$I_0 = H_0(\mathbb{R}) = \begin{cases} (-\infty, +\infty) & \textit{при} \quad \alpha \leq 1 \\ (-B, B) & \textit{при} \quad \alpha > 1, \end{cases}$$

де $B = \mathrm{const}$. *З'ясувавши на якому максимальному проміжку* I_0 *визначено розв'язок* x *задачі Коші (1.30)–(1.31), досліджуємо його поведінку кінцях цього проміжку.*

Припустимо спочатку, що $\alpha \leq 1$. *В цьому разі* $I_0 = (-\infty, +\infty)$. *Переходячи в* (1.32) *до границі при* $t \to -\infty$ *и при* $t \to +\infty$, *отримаємо відповідно*

$$\lim_{t \to -\infty} \int_0^{x(t)} \frac{ds}{(1+|s|)^{\alpha}} = -\infty, \quad \lim_{t \to +\infty} \int_0^{x(t)} \frac{ds}{(1+|s|)^{\alpha}} = +\infty.$$

Але це можливо лише у випадках, коли

$$x(-\infty) = \lim_{t\to-\infty} x(t) = -\infty, \quad x(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty.$$

Нехай тепер, $\alpha > 1$ *. В цьому випадку* $I_0 = (-B, B)$ *і згідно з встановленим вище*

$$H_0(-\infty) = -B, \quad H_0(+\infty) = B.$$

Тому з (1.32) знаходимо, що при $\alpha > 1$

$$\lim_{t\to B+0} x(t) = -\infty, \qquad \lim_{t\to B-0} x(t) = +\infty.$$

У справедливості цих висновків легко переконатися, якщо обчислити інтеграл, що стоїть у (1.32) зліва, а потім знайти в явному вигляді розв'язку розглянутої задачі Коші.

А що на нас чекає у випадку точки спокою? Спокій нам тільки сниться! *Якщо точка* $x_0 \in D = (a, b)$ *є точкою спокою рівняння (1.20), тобто.* $h(x_0) = 0$ *, то це рівняння наперед має розв'язок* $x(t) \equiv x_0$ *на проміжку* I *, який задовольняє умову (1.21). Тому природним є питання про його единость. Відповідь на нього дає така теорема, яку буде доведено у розділі*
.

Теорема 1.2. *Нехай* $g \in C(I;\ \mathbf{R})$, $h \in C((a, b);\ \mathbf{R})$ *,* $t_0 \in I$ *,* $x_0 \in (a, b)$ *і* $h(x_0) = 0$ *. Тоді:*
1) якщо

$$g(t)h(x)(x - x_0)(t - t_0) \le 0 \quad \text{при} \quad t \in I \quad \text{и} \quad x \in (a, b), \tag{1.33}$$

то задача Коші (1.20), (1.21) має единий розв'язок $x(t) \equiv x_0$ *на проміжку* I *;*
2) якщо $h(x) \ne 0$ *на проміжку* $D_1 = (a, x_0)$ *,* $D_2 = (x_0, b)$ *і дотримано умови*

$$\int_x^{x_0} \frac{dx}{h(x)} = \pm\infty \quad \text{при} \quad x \in D_1, \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{h(x)} = \pm\infty \quad \text{при} \quad x \in D_2, \tag{1.34}$$

то задача Коші (1.20), (1.21) має единий розв'язок $x(t) \equiv x_0$ *на проміжку* I *, а будь-який відмінний від нього розв'язок з початковими даними* $(t_i, x_i) \in I \times D_i$ $(i \in \{1, 2\}$ *) однозначно визначено з співвідношення*

$$\int_{x_i}^{x(t)} \frac{ds}{h(s)} = \int_{t_i}^{t} g(\tau)\, d\tau, \quad t \in I_{0i},$$

і має вид

$$x(t) = H_{x_i}^{-1}\left(\int_{t_i}^{t} g(\tau)\, d\tau\right), \quad t \in I_{0i},$$

де I_{0i} *- максимальний проміжок з* I *, для всіх* t *з якого* $\int_{t_i}^{t} g(\tau)\, d\tau \in H_{x_i}(D_i)$ *;*

3) якщо $h(x) \ne 0$ *на проміжках* $D_1 = (a, x_0)$, $D_2 = (x_0, b)$ *і для деяких* $i, j \in \{1, 2\}$ *виконано умови*

$$\left|\int_x^{x_0} \frac{dx}{h(x)}\right| < +\infty \quad \text{при} \quad x \in D_i, \quad g(t)h(x)(x - x_0)(t - t_0) > 0 \quad \text{при} \quad (t, x) \in I_j \times D_i,$$

де $I_1 = \{t \in I\,;\, t < t_0\}$, $I_2 = \{t \in I\,;\, t > t_0\}$ *, то задача Коші (1.20), (1.21) крім розв'язку* $x(t) \equiv x_0$ *на проміжку* I *має також розв'язок виду*

$$x(t) = H_{x_0}^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau\right), \quad t \in I_{0j} \cup \{x_0\},$$

де I_{0j} *- максимальний проміжок з* I_j *, для всіх* t *з якого* $\int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau \in H_{x_0}(D_i)$ *, причому йому відповідає единa інтегральна крива* $(t, x(t))$ *, серед усіх розташованих у* $I_j \times D_i$ *, яка при* $t \to t_0$ *прямує до точки* (t_0, x_0) *і при цьому прямуванні залишається в* $I_j \times D_i$ *.*

З другого та третього тверджень цієї теореми ясно, що всі розв'язки, відмінні від $x(t) \equiv x_0$ *, рівняння (1.20) знаходяться з (1.29) після інтегрування лівої його частини по* x *, а правої - по* t *. Це пояснює ще одне, взагалі кажучи, формальне правило, яке використовується на практиці при розв'язуванні рівнянь з відокремлюваними змінними. Суть його полягає в тому, що при поділі (1.28) на* $h(x)$ *губляться розв'язки, відповідні точкам, де* $h(x) = 0$ *.*

Третє твердження цієї теореми дозволяє легко побудувати приклад задачі Коші, яка має більше одного розв'язка. Таким прикладом є задача Коші

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = |x|^{\alpha}, \\ \\ x(t_0) = 0, \end{cases} \quad \text{де} \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{и} \quad t_0 \in \mathbb{R}. \tag{1.35}$$

Для приведенного здесь уравнения каждая точка $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ *, где* $x_0 \neq 0$ *, является точкой единственности решения задачи Коши, поскольку существует окрестность этой точки, в которой соблюдаются условия теоремы 1.1. Точка* $x_0 = 0$ *является точкой покоя этого уравнения и поэтому уравнение имеет решение* $x(t) \equiv 0$ *на* $\mathbb{R}$ *, которое, очевидно, удовлетворяет начальному условию задачи. Кроме того, здесь соблюдаются условия*

Для наведеного рівняння кожна точка $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ *, де* $x_0 \neq 0$ *, є точкою єдиності розв'язка задачі Коші, оскільки існує окіл цієї точки, у якій виконано умови теореми 1.1. Точка* $x_0 = 0$ *є точкою спокою цього рівняння і тому рівняння має розв'язок* $x(t) \equiv 0$ *на* $\mathbb{R}$ *, який, очевидно, задовольняє початкову умову задачі. Крім того, тут дотримано умови*

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{ds}{h(s)} = \int\limits_{0}^{x} \frac{ds}{|s|^{\alpha}} \quad \text{збігається при будь-якому} \quad x \neq 0$$

і

$$g(t)h(x)(x - x_0)(t - t_0) = |x|^{\lambda} x(t - t_0) > 0 \quad \text{при} \quad x > 0 \quad \text{і} \quad t > t_0, \quad \text{а також при} \quad x < 0 \quad \text{і} \quad t < t_0.$$

Тому згідно з третім твердженням теореми 1.2. у вказаних двох квадрантах розташовані інтегральні криві $(t, x(t))$ *, які при* $t \to t_0$ *прямують до точки* $(t_0, 0)$ *, залишаючись при цьому прямуванні у цих квадрантах. Цим інтегральним кривим відповідає розв'язок даної задачі Коші наступного виду*

$$x(t) = \begin{cases} [(1-\alpha)(t-t_0)]^{\frac{1}{1-\alpha}}\,, & \text{якщо} \quad t \geq t_0, \\ \\ -\,[(\alpha-1)(t-t_0)]^{\frac{1}{1-\alpha}}\,, & \text{якщо} \quad t \leq t_0. \end{cases}$$

Задача Коші - це добре, а система інтегральних рівнянь - краще. *При доведенні значної частини теорем існування, а також єдиності розв'язку задачі Коші (1.7), (1.9) суттєво використовується*

Лема про еквівалентність задачі Коші системі інтегральних рівнянь Вольтерра. *Якщо* G *- область розширеного фазового простору та функції* $f_i : G \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ *- неперервні, то для будь-якого набору початкових даних* $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \in G$ *задача Коші (1.7), (1.8) еквівалентна системі інтегральних рівнянь Вольтерра*

$$\begin{cases} x_i(t) = x_i^0 + \displaystyle\int\limits_{t_0}^{t} f_i(\tau, x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau))\, d\tau, \\ \\ i = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{1.36}$$

Зазначена тут еквівалентність розуміється так. Якщо набір функцій $x_i : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ є розв'язком задачі Коші, то він буде також розв'язком системи інтегральних рівнянь (1.36), і навпаки, якщо такий набір функцій-розв'язків системи інтегральних рівнянь (1.36), то він є і розв'язком задачі Коші (1.7), (1.8). При цьому розв'язком системи інтегральних рівнянь (1.36) називається набір неперервних на деякому зв'язаному проміжку I_0 функцій $x_i : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$, який задовольняє умови

$$(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in G \quad \textit{при} \quad t \in I_0 \tag{1.37}$$

і

$$x_i(t) = x_i^0 + \int\limits_{t_0}^{t} f_i(\tau, x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau))\, d\tau \quad (i = 1, \ldots, n) \quad \textit{при} \quad t \in I_0. \tag{1.38}$$

Д о в е д е н н я. Нехай набір функцій $x_i : I_0 \longrightarrow \mathbb{R})$ $(i = 1, \ldots, n)$ є розв'язком задачі Коші (1.7), (1.8). Тоді ці функції неперервно диференційовані, дотримано (1.37),

$$x_i'(t) = f_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \quad (i = 1, \ldots, n) \quad \textit{при} \quad t \in I_0 \tag{1.39}$$

і

$$x_i(t_0) = x_i^0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1.40}$$

Тому інтегруючи обидві частини рівностей (1.39) на проміжку від t_0 до t, де $t \in I_0$, отримаємо з урахуванням (1.40) рівності (1.38). Отже, розглянутий набір функцій x_i $(i = 1, ldots, n)$ - розв'язок системи інтегральних рівнянь (1.35).

Навпаки, нехай набір функцій $x_i : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ є розв'язком системи інтегральних рівнянь (1.36). Тоді ці функції неперервні на проміжку I_0 і задовольняють умови (1.37), (1.38). В силу їхньої неперервності на I_0, (1.37) і неперервності функцій f_i в області G підінтегральні функції (1.38) будуть неперервними на проміжку I_0. Тому відповідно до відомої теореми з аналізу (1.38) праворуч, а значить, і зліва, стоять неперервно диференційовані на I_0 функції. Диференціюючи ці тотожності t, отримаємо (1.39). Отже, аналізований набір функцій $x_i : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ є розв'язком системи (1.7). Те, що цей набір задовольняє початкові умови (1.8) безпосередньо випливає із (1.38). ■

Куди, куди ми віддалилися і що при цьому відібрали? *Підбиваючи підсумок викладеному вище, відзначимо, що звичайні диференціальні рівняння n - го порядку загального виду (1.2) та системи звичайних диференціальних рівнянь загального виду (1.1), взагалі кажучи, зводяться до систем звичайних диференціальних рівнянь, що є записаними у нормальній формі Коші (1.7). Більш того, за умови неперервності в області $G \subset I \times D$ розширеного фазового простору правих частин такого виду систем ми маємо нізку важливих інструментів для їх дослідження, наприклад, як теорема Пеано, теорема про перший інтеграл, загальний інтеграл, загальний розв'язок, теореми існування та единості розв'язку задачі Коші та ін. У зв'язку з цим надалі природним здається вважати цю умову наперед виконаною. Випадки, коли її не дотримано, будуть розглянуто у додаткових розділах теорії звичайних диференціальних рівнянь, що викладаються на п'ятому курс для магістрів.*

Векторна форма запису нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь (1.7). *Вибравши об'єкт подальшого вивчення, звернемо увагу на те, що він за допомогою введення вектор-функцій*

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

може бути записаний у векторній формі

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \tag{1.41}$$

де $\mathbf{f} \in C\left(G; \mathbb{R}^n\right)$, $G \subset I \times D$, I - проміжок в $\mathbb{R}$, D - відкрита множина в $\mathbb{R}^n$.

При такому записі системи (1.7) введене раніше означення її розв'язку, очевидно, переформулюється в такий спосіб.

Розв'язком системи (1.41) на проміжку $I_0 \subset I$ *називається неперервно диференційована вектор-функція* $\mathbf{x} : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *, яка задовольняє умови*

$$(t, \mathbf{x}(t)) \in G \quad \text{и} \quad \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \quad \text{при} \quad t \in I_0.$$

Інтегральною кривою, що відповідає розв'язку $\mathbf{x} : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *, називається графік цієї векторної функції, тобто множина*

$$\Gamma = \{(t, \mathbf{x}(t)) \, : \, t \in I_0\}$$

розширеного фазового простору $I \times D$ *, а фазовою кривою або траєкторією - множина точок*

$$\{\mathbf{x}(t) \, : \, t \in I_0\}$$

фазового простору D *.*

Задача Коші з початковими даними $(t_0, \mathbf{x}_0) \in G$ *для системи (1.41)- це задача про відшукання розв'язку системи, який задовольняє початкову умову* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ *.*

Выделив объект дальнейшего исследования, рассмотрим некоторые наиболее часто возникающие его частные случаи. Виділивши об'єкт подальшого дослідження, розглянемо деякі окремі випадки, що найчастіше виникають.

1.2 Системи з періодичною по t правою частиною

Нормальна система диференціальних рівнянь

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \tag{2.1}$$

де $\mathbf{f} \in C(\mathbb{R} \times D; \mathbb{R}^n)$ *,* D *- відкрита множина* $\mathbb{R}^n$ *, називається системою з періодичною по* t *правою частиною, якщо існує число* $\omega > 0$ *таке, що*

$$\mathbf{f}(t + \omega, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad \text{для будь-якого} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Такою є, наприклад, система лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} = -(a + b\cos 2t)x_1 \qquad (a, b = \mathrm{const}), \end{cases}$$

яка рівносильна рівнянню Матьє

$$\ddot{x} + (a + b\cos 2t)x = 0,$$

що виникає при дослідженні руху Місяця.

Лема 2.1. *(основна властивість систем з періодичною по* t *правою частиною). Якщо вектор-функція* $\mathbf{x}(t)$ *є розв'язком на проміжку* (a, b) *системи* (2.1) *з* ω *- періодичною по* t *правою частиною, то вектор-функція* $\mathbf{x}(t+\omega)$ *також є розв'язком цієї системи, заданим на проміжку* $(a-\omega, b-\omega)$ *.*

Д о в е д е н н я . *Оскільки вектор-функція* $\mathbf{x}(t)$ *є розв'язком системи (2.1) на проміжку* (a, b) *, то для будь-якого* $t_0 \in (a - omega, b - omega)$ *, в силу правила диференціювання складеної функції, отримаємо*

$$\left.\frac{d\mathbf{x}(t+\omega)}{dt}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right|_{t=t_0+\omega} \cdot \left.\frac{d(t+\omega)}{dt}\right|_{t=t_0} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))|_{t=t_0+\omega} = \mathbf{f}(t_0 + \omega, \mathbf{x}(t_0 + \omega)).$$

Звідси, згідно (2.2) маємо

$$\left.\frac{d\mathbf{x}(t+\omega)}{dt}\right|_{t=t_0} = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}(t_0+\omega)) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t+\omega))|_{t=t_0}.$$

А це зважаючи на довільність $t_0 \in (a - omega, b - omega)$ *і означає, що вектор-функція* $\mathbf{x}(t+\omega)$ *є розв'язком системи (2.1) на проміжку* $(a-\omega, b-\omega)$ *.* ■

Лема 2.2 *(Критерій періодичності розв'язку системи з періодичною по* t *правою частиною). Нехай* $\mathbb{R} \times D$ *– область єдиності системи (2.1) з* ω *- періодичною по* t *правою частиною. Для того, щоб розв'язок* $\mathbf{x}$ *системи (2.1) був* ω *-періодичним, необхідно та достатньо виконання умови*

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(\omega). \tag{2.3}$$

Д о в е д е н н я. Необхідність очевидна. Доведемо достатність. Нехай для деякого розв'язку $x : \mathbb{R} \longrightarrow D$ *системи (2.1) дотримано умову (2.3).*

Введемо вектор-функцію

$$\varphi(t) = \mathbf{x}(t+\omega).$$

Відповідно до лем 2.1 вектор-функція $\varphi(t)$ *також є розв'язком системи (2.1). Однак через умови (2.3)* $\mathbf{x}(0) = \varphi(0)$ *. Але тоді в силу единості розв'язку задачі Коші з початковими даними* $(0, x(0))$ *ці два розв'язки співпадають для всіх* $t \in \mathbb{R}$ *, тобто*

$$\mathbf{x}(t+\omega) = \mathbf{x}(t) \qquad \text{для всіх} \quad t \in \mathbb{R}.$$

■

1.3 Автономні системи та векторні поля.

Векторним полем в області $D \subset \mathbb{R}^n$ *називається вектор-функція* $\mathbf{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *, яка кожній точці* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ *ставить у відповідність вектор*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)), \tag{3.1}$$

прикладений до цієї точки. Якщо функції f_i $(i = 1,\ ldots, n)$ *неперервні (мають неперервні частинні похідні по всім змінним) в області* D *, то векторне поле* $\mathbf{f}$ *називається неперервним (гладким).*

Одним із прикладів векторних полів у $\mathbb{R}^n$ *є вектор-функція* $\mathbf{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *, для якої існує дійсна функція* $U : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *така, що*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathrm{grad} U\,(\mathbf{x}). \tag{3.2}$$

Таке векторне поле називається потенційним. При цьому функцію U *називають потенціалом даного векторного поля.*

У координатній формі рівність (3.2) означає, що

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial U(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{3.3}$$

або

$$f_1(x_1, \ldots, x_n)dx_1 + \cdots + f_1(x_n, \ldots, x_n)dx_n = dU(x_1, \ldots, x_n). \tag{3.4}$$

ПРИКЛАД 3.1. Напруженість $\mathbf{F}$ *гравітаційного поля, створюваного поміщеної на початок координат точковою масою* M *, точці простору, що має радіус-вектор* $\mathbf{r} = (x, y, z)$ *, обчислюється за законом Ньютона як*

$$\mathbf{F} = -GM\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3},$$

де $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ *. Це сила, з якою поле діє на одиничну масу у відповідній точці простору. Дане гравітаційне поле є потенційним з потенціалом*

$$U = GM\frac{1}{|\mathbf{r}|},$$

оскільки

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -GM\frac{x}{|\mathbf{r}|^3}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -GM\frac{y}{|\mathbf{r}|^3}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -GM\frac{z}{|\mathbf{r}|^3}.$$

ПРИКЛАД 3.2. Напруженість $\mathbf{E}$ *електричного поля точкового заряду* q *, поміщеного на початок координат, у точці простору, що має радіус-вектор* $\mathbf{r}$ *, обчислюється за законом Кулона*

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.$$

Таке електростатичне поле, як і гравітаційне поле, потенційно. Його потенціал φ *, у сенсі фізичної термінології, визначається співвідношенням*

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{x}|}.$$

Зважаючи на важливість потенційних полів для практики, вкажемо деякі ознаки, що дозволяють їх виділяти із векторних полів загального вигляду.

Спочатку зауважимо, що якщо векторне поле (3.1) є потенційним та в області D *другі частинні похідні потенціалу* U *цього векторного поля неперервні, то згідно теоремі Шварца мають місце рівності змішаних похідних*

$$\frac{\partial^2 U(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 U(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_j \partial x_i} \quad (i \neq j) \quad i,j = 1,\ldots,n.$$

Тому в силу (3.3) всюди в D

$$\frac{\partial f_i(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i} \quad (i \neq j) \quad i,j = 1,\ldots,n. \tag{3.5}$$

Отже, умови (3.5) є необхідними умовами потенційності гладкого в D *векторного поля (3.1).*

ПРИКЛАД 1.3. Задане в $\mathbb{R}^3$ *векторне поле* $\mathbf{f}(x,y,z) = (x, xy, xyz)$ *не є потенційним, оскільки, наприклад,*

$$\frac{\partial(xyz)}{\partial x} \neq \frac{\partial x}{\partial z}.$$

Звернемо також увагу на приклад векторного поля

$$\mathbf{f}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right),$$

заданого в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *, яке потенційним не є, але при цьому необхідна умова потенційності поля виконано, оскільки*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Виявляється, що його непотенційність породжена лише структурою множини, на якій воно задано.

Для векторних полів на площині має місце, встановлене в курс математичного аналізу, наступне твердження

Теорема 3.1. *Нехай векторне поле*

$$\mathbf{f}(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$$

є неперервним в однозв'язаної області $D \in \mathbb{R}^2$ *і в* D *неперервні частинні похідні* $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$. *Тоді для потенційності цього векторного поля в області* D *необхідно і достатньо, щоб було дотримано умову*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \quad \text{при} \quad (x,y) \in D. \tag{3.6}$$

З огляду на означення потенційного векторного поля ця теорема може бути переформульована в такий спосіб.

Теорема 3.2. *Для того, щоб диференціальна форма*

$$\omega = M(x,y)dx + N(x,y)dy, \tag{3.7}$$

де функції M *і* N *неперервні та мають неперервні частинні похідні* $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ *в однозв'язної області* $D \subset \mathbb{R}^2$, *була в цій області повним диференціалом деякої функції* U , *необхідно і достатньо виконання умови (3.6).*

Розглянемо тепер довільне неперервне в області $D \subset \mathbb{R}^n$ *векторне поле (3.1). Крива, розташована в* D , *яка в кожній своїй точці, дотикається прикладеного до цієї точки вектора даного векторного поля, називається траекторією векторного поля (3.1).*

ПРИКЛАД 1.4. Вектор-функція

$$\mathbf{f}(x,y) = (y, -x)$$

задає векторне поле $\mathbb{R}^2$. *Радіус-вектор* $\mathbf{r} = (x,y)$ *будь-якої точки площини, відмінної від початку координат, перпендикулярний вектору векторного поля, прикладеному до цієї точки, оскільки скалярний добуток* $\mathbf{f} \cdot \mathbf{r} = 0$. *Тому траекторіями даного векторного поля є колами* $x^2 + y^2 = R^2$ $(R > 0)$ *і точкою* $(0,0)$. *Якщо важливо ще підкреслити, що рух по кожному такому колу відбувається у напрямку векторів векторного поля, прикладених до точок на цьому колі, то рівняння кола краще задати параметричними рівняннями* $x = R\cos t, \quad y = R\sin t$.

Точка $\mathbf{x}_0$ *векторного поля (3.1), в якій* $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$, *називається точкою спокою положення рівноваги векторного поля.*

Якщо траекторія неперервного в області $D \subset \mathbb{R}^n$ *векторного поля (3.1) є гладкою, не проходить через точки спокою векторного поля та задана параметрично векторною функцією* $\mathbf{x}_0(\tau) = (x_{10}(\tau), \ldots, x_{n0}(\tau)), \quad \tau \in (\alpha, \beta)$, *то вектор* $\mathbf{x}_0'(\tau) = (x_{10}'(\tau), \ldots, x_{n0}'(\tau))$, *як дотичний вектор до цієї траекторії в точці* $\mathbf{x}_0(\tau)$, *має бути колінеарним вектору* $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0(\tau))$. *Тому існує неперервна функція* $\lambda : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *така, що*

$$\mathbf{x}_0'(\tau) = \lambda(\tau)\mathbf{f}(\mathbf{x}_0(\tau)). \tag{3.8}$$

Змінимо тепер на кривій $\mathbf{x}_0$ *параметризацію поклавши*

$$\tau = \tau(t), \quad \mathbf{x}_0(\tau(t)) = x(t)$$

і вибравши як $\tau(t)$ *функцію, обернену для*

$$t = \int_{\tau_0}^{\tau} \lambda(s)\, ds, \quad \text{де} \quad \tau_0, \tau \in (\alpha, \beta).$$

Тоді для будь-якого t *з області визначення* I_0 *функції* $\tau(t)$ *в силу (3.8) та правил диференціювання складеної та оберненої функції отримаємо*

$$\mathbf{x}'(t) = (\mathbf{x}_0(\tau(t)))_t' = \mathbf{x}_0'(\tau(t))\ \tau'(t) = \lambda(\tau(t))\mathbf{f}(\mathbf{x}_0(\tau(t)))\frac{1}{t'(\tau)}\bigg|_{\tau=\tau(t)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)).$$

Отже, гладкі траекторії векторного поля (3.1), задані параметрично, є фазовими кривими системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{3.9}$$

де $\mathbf{f} \in C(D;\mathbb{R}^n)$ *, яка в координатній формі має вигляд*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = f_i(x_1,\ldots,x_n), \\ i = 1,\ldots,n, \end{cases} \tag{3.10}$$

де $f_i \in C(D;\mathbb{R})$ $(i = 1,\ldots,n)$ *.*

Система диференціальних рівнянь (3.9), права частина якої не залежить явно від t *називається автономною системою диференціальних рівнянь. З геометричної точки зору така система задає в області* D *неперервне векторне поле* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *, траекторії якого співпадають з фазовими кривими системи (3.9).*

Якщо $\mathbf{x}(t)$ *- це траекторія руху матеріальної точки в області* $D \subset \mathbb{R}^n$ *, то вектор* $\mathbf{x}'(t)$ *є вектором швидкості цієї матеріальної точки у положенні* $\mathbf{x}(t)$ *. Тому з механічного погляду права частина системи (3.9) визначає векторне поле фазової швидкості. При цьому швидкість еволюції автономної системи (3.9), тобто системи, що не взаємодіє з іншими, не залежить від* t *. Описуваний такою системою диференціальних рівнянь закон природи від часу не залежить і формулюється лише в термінах стану механічної системи.*

Лема 3.1. *(основна властивість автономної системи). Якщо вектор-функція* $\mathbf{x}(t)$ *– розв'язок автономної системи диференціальних рівнянь (3.9) на проміжку* (a,b) *, то для будь-якого значення* $c \in \mathbf{R}$ *вектор-функція* $\mathbf{x}(t+c)$ *є розв'язком цієї системи на проміжку* $(a-c,b-c)$ *.*

Д о в е д е н н я. Оскільки згідно з умовами

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i(t)}{dt} \equiv f_i(x_1(t),\ldots,x_n(t)) \qquad \text{на} \qquad (a,b) \\ i = 1,\ldots,n \end{cases}$$

то для будь-якого $t_0 \in (a-c,b-c)$ *в силу правила диференціювання складеної функції*

$$\left.\frac{dx_i(t+c)}{dt}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{dx_i(t)}{dt}\right|_{t=t_0+c} \cdot \left.\frac{d(t+c)}{dt}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{dx_i(t)}{dt}\right|_{t=t_0+c} =$$

$$= f_i(x_1(t),\ldots,x_n(t))|_{t=t_0+c} = f_i(x_1(t+c),\ldots,x_n(t+c))|_{t=t_0}.$$

Звідси через довільність вибору точки $t_0 \in (a-c,b-c)$ *випливає, що вектор- функція* $\mathbf{x}(t+c)$ *є розв'язком системи (3.9) на проміжку* $(a-c,b-c)$ *.* ■

З геометричної точки зору вказана в даній лемі властивість автономної системи диференціальних рівнянь свідчить, що крива, отримана з інтегральної кривої цієї системи зсувом на будь-яку величину $c \in \mathbf{R}$ *вздовж осі* t *, також є інтегральною кривою цієї системи Звідси, зокрема, випливає, що безліч таких інтегральних кривих проектується на фазовий простір в одну і ту ж фазову криву автономної системи (3.9), тобто.* $\mathbf{x}(t)$ *і* $\mathbf{x}(t+c)$ *- параметричні завдання однієї і тієї ж фазової кривої, але по різному параметризовані.*

Лема 3.2 *(про фазові криві автономних систем рівнянь). Нехай* $R \times D$ *- область єдиності автономної системи (3.9) і* $\mathbf{x}(t,t_0,x_0)$ *- розв'язок з початковими даними* $(t_0,\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R} \times D$ *. Тоді для будь-кого* $c \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{x}(t+c,t_0+c,\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t,t_0,\mathbf{x}_0) \tag{3.11}$$

при всіх $t \in (a,b)$ *, де* (a,b) *– максимальний інтервал існування* $\mathbf{x}(t,t_0,\mathbf{x}_0)$ *.*

Д о в е д е н н я. Дійсно, при $t = t_0$ *ліва та права частини (3.11) перетворюються до* $\mathbf{x}_0$ *, звідки в силу єдиності розв'язку задачі Коші з початковими даними* $(t_0,\mathbf{x}_0)$ *і випливає (3.11).* ■

Покладемо в (3.11) $c = -t_0$ *і позначимо* $\mathbf{x}(t,0,\mathbf{x}_0) = \mathbf{g}^t(\mathbf{x}_0)$ *. Тоді отримаємо, що розв'язок* $\mathbf{x}(t,t_0,\mathbf{x}_0)$ *можна записати у вигляді*

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}^{t-t_0}(\mathbf{x}_0) \tag{3.12}$$

У механічній інтерпретації (3.12) означає, що положення рухомої точки визначається початковою точкою $\mathbf{x}_0$ *фазового простору та інтервалом часу, що минув після початкового моменту, але не самим початковим моментом.*

У геометричній інтерпретації (3.12) означає, що якщо дві фазові криві автономної системи (3.9) мають загальну точку, то вони співпадають.

Таким чином, траєкторії автономних систем мають властивість неперетинання. Тому при дослідженні автономних систем доцільно розглядати саме траєкторії, а не інтегральні криві.

Більше того, має місце

Лема 3. 3. *(про структуру фазових кривих автономних систем) Якщо* $\mathbb{R}\times D$ *- область єдиності автономної системи (3.9), кожна фазова крива цієї системи належить одному з наступних трьох типів:*

1) положення рівноваги;

2) замкнута траєкторія, якій відповідає періодичний розв'язок із додатнім найменшим періодом;

3) траєкторія без самоперетину, якій відповідає неперіодичний розв'язок.

Д о в е д е н н я. Припустимо, що точка $\mathbf{x}_0$ *не є положенням рівноваги системи (3.9) та існують* t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$ *, такі, що*

$$\mathbf{g}^{t_1}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{g}^{t_2}(\mathbf{x}_0).$$

Тоді в силу леми 3.2 $\mathbf{g}^{t_2-t_1}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{g}^0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ *. Оскільки автономна система є при будь-якому* $\omega > 0$ *системою з* ω *- періодичною по* t *правою частиною, то звідси згідно з лемою 2.2 витікає що* $\mathbf{g}^t(\mathbf{x}_0)$ *-* $t_2 - t_1$ *- періодичний розв'язок системи (3.9). Значить, множина* $P_{\mathbf{x}_0} = \{t > 0\,; \mathbf{g}^t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0\}$ *- всіх додатніх періодів функції* $\mathbf{g}^t(\mathbf{x}_0)$ *є непустим і обмеженим знизу. Для нього існує точна нижня межа* $theta\ ge0$ *. Покажемо, що* $theta > 0$ *. Для цього достатньо лише встановити, що в деякому правому околі нуля* $\mathbf{g}^t(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0 \neq 0$ *. Справді, в силу диференційності функції* $\mathbf{g}^t(\mathbf{x}_0)$ *в точці* $t = 0$ *маємо*

$$\mathbf{g}^t(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0 = \left.\frac{d\mathbf{g}^t(\mathbf{x}_0)}{dt}\right|_{t=0} t + o(t) = f(\mathbf{x}_0)t + o(t) \quad \textit{при} \quad t \to 0.$$

Оскільки тут $f(\mathbf{x}_0) \neq 0$ *, існує проміжок* $(0, a]$ *, для всіх* t *з якого* $\mathbf{g}^t(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0 \neq 0$ *. Отже,* $\theta > 0$ *. Тепер доведемо, що* θ *-період* $\mathbf{g}^t(\mathbf{x}_0)$ *. Згідно з означенням інфімуму існує послідовність* $\{\theta_k\} \in P_{\mathbf{x}_0}$ *, що збігається до* θ *. Для точок цієї послідовності маємо* $\mathbf{g}^{\theta_k}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0 = 0$ *. Переходячи в цій рівності до границі при* $k \longrightarrow +\infty$ *, отримаємо, враховуючи неперервність* $g^t(\mathbf{x}_0)$ *у точці* θ *, що* $\mathbf{g}^{\theta}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0 = 0$ *, тобто* $\theta \in P_{\mathbf{x}_0}$ *.* ■

Виберемо тепер довільним чином неперервну і додатню в області D *функцію* g *і розглянемо поряд із векторним полем (3.1) векторне поле* $g(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *. Оскільки для будь-якого* $\mathbf{x} \in D$ *вектор* $g(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *, прикладений до точки* $\mathbf{x}$ *має той самий напрям, що і вектор* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *, то траєкторії цих двох векторних полів співпадають. Отже, співпадають і фазові криві систем (3.9) та*

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = g(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Відмінність полягає лише в тому, що вони по-різному параметризовані і в механічної інтерпретації проходяться із різними швидкостями.

У зв'язку із цим виникає природне питання. А чи не можна так зменшити швидкість руху по фазових кривих, щоб вони проходилися точкою за період часу від $-\infty$ *до* $+\infty$ *?*

Виявляється цього можна досягти, якщо у якості функції g *вибрати функцію*

$$g(\mathbf{x}) = \left(1 + \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Звідси зрозуміло, що при розгляді автономної системи не обмежуючи загальності, вважатимемо, що її розв'язки визначено на всій числовій осі.

(Теорема 2 (групова властивість)?)

Теорема 2 (про фазові криві)

Рівняння 1-го порядку.

типи точок спокою

Теорема 3 (про зниження розмірності)
Приклад хижак – жертва
Неавтономні. (Векторне поле)
Неавтономні першого порядку (поле напрямків)