Розділ 8

ДВОТОЧКОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

8.1 Постановка загальної двоточкової крайової задачі. Типи двоточкових крайових умов. Теорема про альтернативу.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку виду

$$p(t)u'' + r(t)u' + h(t)u = f(t), \tag{8.1}$$

де p, r, h, f – функції, неперервні на проміжку $[a, b]$, і $p(t) \neq 0$ при $t \in [a, b]$. Згідно з формулою Коші для лінійних диференціальних рівнянь кожний розв'язок цього рівняння при будь-якому $t_0 \in [a, b]$ має наступний вид

$$u(t) = c_1(t, t_0)u(t_0) + c_2(t, t_0)u'(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} c_2(t, \tau)f(\tau)\, d\tau,$$

в якому функції $c_1(t, \tau)$, $c_2(t, \tau)$ при фіксованому $\tau \in [a, b]$ є розв'язками відповідного однорідного диференціального рівняння, що задовольняють початкові умови

$$c_1(t, \tau)\big|_{t=\tau} = 1, \quad \left.\frac{\partial c_1(t, \tau)}{\partial t}\right|_{t=\tau} = 0, \qquad c_2(t, \tau)\big|_{t=\tau} = 0, \quad \left.\frac{\partial c_2(t, \tau)}{\partial t}\right|_{t=\tau} = 1.$$

При цьому $c_2(t, \tau)$ називають функцією Коші для однорідного рівняння. Після знаходження функцій $c_1(t, \tau)$, $c_2(t, \tau)$ дана формула дозволяє записати вигляд розв'язку будь-якої задачі Коші з початковими умовами у точці t_0.

Щоб сформулювати постановку загальної двоточкової крайової задачі для диференціального рівняння (8.1) зведемо це рівняння до системи, покладаючи $u(t) = x_1(t)$, $u'(t) = x_2(t)$. В результаті будемо мати

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -\frac{h(t)}{p(t)}x_1 - \frac{r(t)}{p(t)}x_2 + \frac{f(t)}{p(t)} \end{cases},$$

або систему лінійних диференціальних рівнянь у векторно-матричній формі

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P(t)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + q(t),$$

де

$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & \\ -\frac{h(t)}{p(t)} & -\frac{r(t)}{p(t)} \end{pmatrix}, \quad q(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \frac{f(t)}{p(t)} \end{pmatrix}.$$

Відповідно до теорії лінійних крайових задач загальна двоточкова крайова задача для такої системи ставиться наступним чином: знайти розв'язок $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ системи, що задовольняє умову

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(a) \\ x_2(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(b) \\ x_2(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

або

$$a_{11}x_1(a) + a_{12}x_2(a) + b_{11}x_1(b) + b_{12}x_2(b) = c_1,$$
$$a_{21}x_1(a) + a_{22}x_2(a) + b_{21}x_1(b) + b_{22}x_2(b) = c_2,$$

де $a_{ij},\ b_{ij}\ (i,j = 1,2)$, $c_i\ (i = 1,2)$ – дійсні сталі.

Оскільки $x_1(t) = u(t)$, $x_2(t) = u'(t)$, то приходимо до висновку, що загальна двоточкова крайова задача для лінійного диференціального рівняння (8.1) ставиться наступним чином: знайти розв'язок диференціального рівняння (8.1), який задовольняє умови

$$\begin{aligned} a_{11}u(a) + a_{12}u'(a) + b_{11}u(b) + b_{12}u'(b) = c_1, \\ a_{21}u(a) + a_{22}u'(a) + b_{21}u(b) + b_{22}u'(b) = c_2, \end{aligned} \tag{8.2}$$

де $a_{ij},\ b_{ij}\ (i,j = 1,2)$, $(c_i\ (i = 1,2)$ – дійсні сталі. При цьому також треба припускати, що лінійні форми

$$L_i(u) = a_{i1}u(a) + a_{i2}u'(a) + b_{i1}u(b) + b_{i2}u'(b) \quad (i = 1,2)$$

є лінійно незалежними

Важливим частинним випадком цих умов є умови виду

$$\alpha u(a) + \beta u'(a) = c_1, \qquad \gamma u(b) + \delta u'(b) = c_2, \tag{8.3}$$

де $\alpha^2 + \beta^2 > 0,\ \gamma^2 + \delta^2 > 0,\ c_1,\ c_2$ – дійсні сталі. Такі умови називають розщепленими (тут окремо задаються умови у точці a і окремо у точці b). Найбільш простими з них є умови

$$u(a) = c_1, \quad u(b) = c_2. \tag{8.4}$$

Прикладом нерозщеплених крайових умов є умови

$$u(a) = u(b), \quad u'(a) = u'(b),$$

які задають періодичну крайову задачу.

З загального виду двоточкових крайових умов (8.2) можна за рахунок вибору коефіцієнтів $a_{ij},\ b_{ij}(i,j=1,2$ отримати і значну кількість інших двоточкових крайових умов.

На відміну від початкової задачі Коші загальна двоточкова крайова задача (8.1), (8.2) може мати один або багато розв'язків, а може і не мати розв'язків. Наприклад, задача

$$u''+u=0,\quad u(o)=0,\quad u\left(\frac{\pi}{2}\right)=a$$

має єдиний розв'язок $u(t)=a\sin t$, а задача

$$u''+u=0,\quad u(o)=0,\quad u(\pi)=b$$

у випадку $b\neq 0$ не має розв'язків(оскільки всі розв'язки, для яких $u(0)=0$, мають вид $u(t)=c\sin t$ і при $t=\pi$ вони дорівнюють нулю), а у випадку $b=0$ має нескінчену множину розв'язків $u(t)=c\sin t$, де c –будь-яке число.

Поряд з загальною двоточковою крайовою задачею (8.1), (8.2) будемо також розглядати відповідну до неї однорідну крайову задачу

$$p(t)u''+r(t)u'+h(t)u=0, \tag{8.1_0}$$

$$\begin{aligned} &a_{11}u(a)+a_{12}u'(a)+b_{11}u(b)+b_{12}u'(b)=0,\\ &a_{21}u(a)+a_{22}u'(a)+b_{21}u(b)+b_{22}u'(b)=0. \end{aligned} \tag{8.2_0}$$

Теорема 8.1 (про альтернативу)**.** *Для двоточкової крайової задачі (8.1), (8.2) можливі тільки два випадки, або 1) задача має єдиний розв'язок при будь-яких правих частинах в рівнянні і крайових умовах, або 2) однорідна крайова задача має нескінчену кількість розв'язків, а неоднорідна задача* (8.1_0)*,* (8.2_0) *при деяких правих частинах має нескінчену кількість розв'язків а при всіх інших – не має розв'язків.*

Д о в е д е н н я . Загальний розв'язок диференціального рівняння (8.1) має вид

$$u(t)=c_1u_1(t)+c_2u_2(t)+v(t), \tag{8.5}$$

де $u_1,\,u_2$ – лінійно незалежні розв'язки відповідного однорідного рівняння (8.1_0), v – частиний розв'язок неоднорідного рівняння (8.1), $c_1,\,c_2$ – довільні сталі. З цієї множини треба визначити ті, що задовольняють крайові умови (8.2). Підставляючи (8.5) у (8.2) і переносіючи значення v у праву частину, отримаємо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $c_1,\,c_2$. Коефіцієнти цієї системи залежать тільки від значень $u_1,\,u_2$ у точках a і b і не залежать від правих частин частин рівняння і крайових умов. Якщо дана крайова задача є однорідною, то то праві частини алгебраїчних рівнянь дорівнюють нулю.

Можливими є лише два наступних випадка:

1) Якщо детермінант алгебраїчної системи не дорівнює нулю, то система має єдиний розв'язок $c_1^0,\,c_2^0$ при будь-яких правих частинах у (8.1) і (8.2). Підставляючи ці значення $c_1,\,c_2$ у (8.5), одержуємо єдиний розв'язок крайової задачі.

2) Якщо детермінант алгебраїчної системи дорівнює нулю, то однорідна система (тобто при правих частинах рівних нулю) має нескінчену множину розв'язків відносно c_1, c_2, а неоднорідна система має розв'язок не при будь-яких правих частинах. Якщо вона має розв'язок, то вона має нескінчену множину розв'язків, оскільки до цього розв'язку можна додати будь-який розв'язок однорідної системи, помножений на будь-яку сталу. Для будь-якого набіру сталих c_1, c_2, що задовольняють алгебраїчну систему, формула (8.5) дає розв'язок крайової задачі. Для різних наборів сталих c_1, c_2 ці розв'язки є різними, оскільки u_1, u_2 – лінійно незалежні.

З 1) і 2) випливає справедливість твердження теореми.

Зауваження 8.1. *Згідно з формулою Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння (8.1) будь-який розв'язок цього рівняння з початковими умовами у точці* $t_0 = a$ *може бути записаним у виді*

$$u(t) = C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t) + v(t), \tag{8.6}$$

де $u_1(t) = c_1(t, a), \quad u_2(t) = c_2(t, a)$ *– лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння* (8.1_0)*, що задовольняють початкові умови*

$$u_1(a) = 1, \quad u'(a) = 0, \qquad u_2(a) = 0, \quad u_2'(a) = 0,$$

$$v(t) = \int\limits_a^t c_2(t, \tau) f(\tau)\, d\tau,$$

$C_1 = u(a), \quad C_2 = u'(a)$. *У зв'язку з цим при доведені теореми в якості (8.5) можна було обрати функцію (8.6), в якій вже відомий частиний розв'язок* $v(t)$ *неоднорідної системи рівнянь (8.1), задовольняючий умову* $v(a) = 0$. *При цьому при розв'язанні алгебраїчної системи рівнянь відносно* C_1, C_2 *отримували б початкові умови* $u(a)$ *і* $u'(a)$ *розв'язку крайової задачі (у випадку його існування).*

ПРИКЛАД 8.1. Знайти нйменше з таких чисел $b > 0$, що задача

$$u'' + b^2 u = 0, \quad u(0) = 7, \quad u(1) = -7 \tag{8.7}$$

не має розв'язків.

За теоремою 8.1 задача (8.7) не має розв'язків, коли однорідна задача

$$u'' + b^2 u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

має ненульовий розв'язок. Функції, для яких

$$u'' + b^2 u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(0) = 0,$$

мають вид $u(t) = c \sin bt$. Щоб при $c \neq 0$ було $u(1) = 0$ треба виконання рівності $\sin b = 0$, тобто $b = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi, \ldots$. При цих значеннях b маємо другий випадок альтернативи. Таким чином, при цих b задача (8.7) або не має розв'язків, або має нескінчену кількість розв'язків. Яка з цих можливостей здійсниться треба перевірити.

При $b = \pi$ загальний розв'язок рівняння має вид $u = c_1 \cos \pi t + c_2 \sin \pi t$. Отже, $u(0) = c_1, \quad u(1) = -c_1$. При $c_1 = 7$ і будь-якому c_2 $u(t)$ є розв'язком задачі (8.7). Однак потрібно, щоб розв'язку не існувало. При $b = 2\pi$ загальний розв'язок має вид $u(t) = c_1 \cos 2\pi t + c_2 \sin 2\pi t$. Тоді $u(0) = c_1, \quad u(1) = c_1$ і задовольнити обидві умови $u(0) = 7, \quad u(1) = -7$ не можливо, тобто розв'язків нема. Таким чином, відповідью є $b = 2\pi$.

8.2 Функція Гріна однорідної крайової задачі. Теорема про однозначну розв'язність загальної двоточкової крайової задачі

Означення 8.1. *Функція $g(t, \tau)$, визначена при $t \in [a, b], \ \tau \in [a, b]$ називається функцією Гріна однорідної крайової задачі (8.1_0), (8.2_0), якщо вона має наступні властивості:*

1. Функція $g(t, \tau)$ неперервна в $[a, b]$ за змінною t, а частина похідна $g'_t(t, \tau)$ – неперервна в $[a, b]$ всюди за виключенням точки $t = \tau$, де вона має розрив першого роду зі стрибком

$$g'_t(\tau + 0, \tau) - g'_t(\tau - 0, \tau) = \frac{1}{p(\tau)}.$$

2. $u = g(t, \tau)$ задовольняє всюди в $[a, b]$ за виключенням точки τ лінійне однорідне рівняння (8.1_0) і однорідні умови (8.2_0).

З теореми про однозначну вирішуємость загальної лінійної крайової задвчі для системи лінійних диференціальних рівнянь безпосередньо випливає наступний результат для загальної двоточкової крайової задачі (8.1), (8.2).

Теорема 8.2 (про однозначну розв'язність крайової задачі (8.1), (8.2))**.** *Для того, щоб загальна двоточкова крайова задача (8.1), (8.2) була однозначно вирішуемою необхідно і достатньо, щоб відповідна однорідна крайова задача (8.1_0), (8.2_0) мала тільки тривіальний розв'язок $u(t) \equiv 0$. Більш того, якщо однорідна крайова задача (8.1_0), (8.2_0) має лише тривіальний розв'язок, то розв'язок крайової задачі (8.1), (8.2) має вид*

$$u(t) = u_0(t) + \int_a^b g(t, \tau) f(\tau) \, d\tau, \tag{8.8}$$

де $u_0(t)$ – розв'язок крайової задачі (8.1_0), (8.2), а $g(t, \tau)$ – функція Гріна однорідної крайової задачі (8.1_0), (8.2_0)

Зауваження 8.2. *У формулі (8.8) функцію $u_0(t)$ можна подати у виді*

$$u_0(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t),$$

де c_1, c_2 – праві частини крайових умов (8.2), а $u_1(t)$, $u_2(t)$ – лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння (8.1_0), що задовольняють умови

$$L_i(u_i) = 1, \quad L_i(u_j) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Наслідок 8.1. *Якщо однорідна крайова задача* (8.1_0), (8.2_0) *має лише тривіальний розв'язок, то єдиний розв'язок крайової задачі (8.1),* (8.2_0) *при будь-якій функції* $f \in C)[a,b];\mathbb{R}$ *має вид*

$$u(t) = \int\limits_a^b g(t,\tau)f(\tau)\,d\tau. \tag{8.9}$$

Дійсно, у випадку крайової задачі (8.1), (8.2_0) функція $u_0(t)$ у формулі (8.8) є розв'язком крайовою задачі (8.1_0), (8.2_0), а він згідно з умовою наслідку є тривіальним, тобто, $u_0(t) \equiv 0.$ і формула (8.8) приймає вид (8.9).

Зауваження 8.3. *Зазначимо, що функція Гріна однорідної крайової задачі* (8.1_0), (8.2_0) *визначаєтьcя однозначно, якщо ця задача має лише тривіальний розв'язок.*

Подамо тепер деякі рекомендації до побудови функції Гріна.

1. У випадку розщеплених крайових умов (8.3) функція Гріна відповідної однорідної крайової задачі

$$p(t)u'' + r(t)u' + h(t)u = 0, \tag{8.10}$$

$$\alpha u(a) + \beta u'(a) = 0, \qquad \gamma u(b) + \delta u'(b) = 0. \tag{8.11}$$

будується наступним чином. Обирається нетривіальний розв'язок $u_1(t)$ рівняння (8.10), який задовольняє лише першу (при $t = a$) з крайових умов (8.11), й розв'язок $u_2(t)$ рівняння (8.10), котрий задовольняє другу (при $t = b$) з умов(8.11). Ці розв'язки є лінійно незалежними, бо при $u_1(t) = cu_2(t)$, $c = \text{const} \neq 0$ функція $u_1(t) \neq 0$ була б нетривіальним розв'язком однорідної крайової задачі (8.10), (8.11), що суперечить умові теореми. Функцію $g(t,\tau)$ шукаємо у вигляді

$$g(t,\tau) = \begin{cases} \varphi(\tau)u_1(t) & \text{при} \quad a \le t \le \tau, \\ \psi(\tau)u_2(t) & \text{при} \quad \tau \le t \le b, \end{cases} \tag{8.12}$$

де функції $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$ вибираються так, щоб виконувались умови 1 і 2 означення функції Гріна, тобто, щоб

$$\psi(\tau)u_2(\tau) = \varphi(\tau)u_1(\tau), \quad \psi(\tau)u_2'(\tau) - \varphi(\tau)u_1'(\tau) = \frac{1}{p(\tau)}.$$

2. У випадку нерозщеплених крайових умов (8.2) функцію Гріна відповідної однорідної крайової задачі (8.1_0), (8.2_0) шукаємо у вигляді

$$g(t,\tau) = \begin{cases} c_{11}(\tau)u_1(t) + c_{12}(\tau)u_2(t) & \text{при} \quad a \le t \le \tau, \\ c_{21}(\tau)u_1(t) + c_{22}(\tau)u_2(t) & \text{при} \quad \tau \le t \le b, \end{cases} \tag{8.13}$$

де $u_1(t)$, $u_2(t)$ – фундаментальна сім'я розв'язків лінійного однорідного рівняння (8.2_0), а коефіцієнти $c_{jk}(\tau)$ $(j, r = 1, 2)$ добираються так, щоб $g(t,\tau)$, як функція від t задовольняла лінійні однорідні крайові умови (8.2_0) і виконувались умови 1, 2 означення функції Гріна.

Тепер розглянемо деякі приклади розв'язання крайових задач.

ПРИКЛАД 8.2. Знайти розв'язок крайової задачі

$$u'' = f(t), \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

Р о з в' я з а н н я . Це задача з розщепленими крайовими умовами. Загальний розв'язок однорідного рівняння $u'' = 0$ має вид $u(t) = C_1 + C_2 t$ і тому однорідна крайова задача має лише тривіальний розв'язок. Отже для неї існує функція Гріна. Розв'язок однорідного рівняння $u_1(t) = 1 + t$ задовольняє першу крайову умову $u(-1) = 0$, а розв'язок $u_2(t) = 1 - t$ – другу крайову умову $u(1) = 0$. Тому функцію Гріна шукаємо у вигляді

$$g(t,\tau) = \begin{cases} \varphi(\tau)(1+t) & \text{при} \quad -1 \le t \le \tau, \\ \psi(\tau)(1-t) & \text{при} \quad \tau \le t \le 1. \end{cases}$$

Функції $\varphi(\tau)$ і $\psi(\tau)$ знаходимо з умов

$$\varphi(\tau)(1+\tau) = \psi(\tau)(1-\tau), \quad -\psi(\tau) - \varphi(\tau) = 1.$$

Звідси маємо

$$\varphi(\tau) = -\frac{1-\tau}{2}, \quad \psi(\tau) = -\frac{1+\tau}{2}.$$

Отже

$$g(t,\tau) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(1-\tau)(1+t) & \text{при} \quad -1 \le t \le \tau, \\ -\frac{1}{2}(1+\tau)(1-t) & \text{при} \quad \tau \le t \le 1 \end{cases}$$

і розв'язок даної задачі має вигляд

$$u(t) = \int_{-1}^{1} g(t,\tau) f(\tau)\, d\tau = -\frac{1-t}{2} \int_{-1}^{t} (1+\tau) f(\tau)\, d\tau - \frac{1+t}{2} \int_{t}^{1} (1-\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

ПРИКЛАД 8.3. Розв'язати крайову задачу

$$u'' + u = f(t), \quad u(0) = 0, \quad u'(\pi) = 0.$$

Р о з в' я з а н н я . Ця задача – з розщепленими крайовими умовами. Однорідне рівняння $u'' + u = 0$ має загальний розв'язок $u(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$. При $u(0) = 0$ отримуємо $u(t) = C_1 \sin t$. Оскільки $u'(t) = C_1 \cos t$, то $u'(\pi) = -C_1$. і при $f(t) \equiv 0$ задача має лише тривіальний розв'язок, тобто виконана умова існування функції Гріна. Функції $u_1(t) = \sin t$ і $u_2(t) = \cos t$ задовольняють рівнянню $u'' + u = 0$ і умовам $u_1(0) = 0$, $u_2'(\pi) = 0$. Тому функцію Гріна шукаємо у вигляді

$$g(t,\tau) = \begin{cases} \varphi(\tau) \sin t & \text{при} \quad 0 \le t \le \tau, \\ \psi(\tau) \cos t & \text{при} \quad \tau \le t \le \pi. \end{cases}$$

Функції $\varphi(\tau)$ і $\psi(\tau)$ з знаходимо з умов

$$\varphi(\tau) \sin\tau = \psi(\tau) \cos\tau, \quad -\psi(\tau) \sin\tau = \varphi(\tau) \cos\tau + 1.$$

З цієї системи отримуємо, що

$$\varphi(\tau) = -\cos\tau, \quad \psi(\tau) = -\sin\tau.$$

Тому
$$g(t,\tau) = \begin{cases} -\cos\tau\sin t & \text{при} \quad 0 \le t \le \tau, \\ -\sin\tau\cos t & \text{при} \quad \tau \le t \le \pi \end{cases}$$
і розв'язок даної крайової задачі має вигляд
$$u(t) = \int\limits_0^\pi g(t,\tau)f(\tau)\,d\tau = -\cos t\int\limits_0^t f(\tau)\sin\tau\,d\tau - \sin t\int\limits_t^\pi f(\tau)\cos\tau\,d\tau.$$
такий саме підхід може бути застосований для крайових задач з умовами на нескінченностях $\pm\infty$.

ПРИКЛАД 8.4. Розв'язати крайову задачу
$$u'' - u = f(t), \quad u(t) - \text{обмежений на проміжку} \quad (-\infty,+\infty).$$
Р о з в' я з а н н я . Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд
$$u(t) = C_1e^{-t} + C_2e^t.$$
і тому обмеженим на $(-\infty,+\infty)$ буде лише тривіальний розв'язок. Розв'язок $u_1(t)=e^t$ обмежений при $t\to-\infty$, а $u_2(t)=e^{-t}$ – при $t\to+\infty$. Тому функцію Гріна шукаємо у вигляді
$$g(t,\tau) = \begin{cases} \varphi(\tau)e^t & \text{при} \quad -\infty \le t \le \tau, \\ \psi(\tau)e^{-t} & \text{при} \quad \tau \le t \le +\infty. \end{cases}$$
Функції $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$ визначаються з рівнянь
$$\psi(\tau)e^{-\tau} = \varphi(\tau)e^\tau, \quad -\psi(\tau)e^{-\tau} = \varphi(\tau)e^\tau + 1,$$
звідки знаходимо
$$\varphi(\tau) = -\frac{1}{2}e^{-\tau}, \quad \psi(\tau) = -\frac{1}{2}e^\tau.$$
Отже
$$g(t,\tau) = \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{t-\tau} & \text{при} \quad -\infty \le t \le \tau, \\ -\frac{1}{2}e^{\tau-t} & \text{при} \quad \tau \le t \le +\infty. \end{cases}$$
Тому розв'язок даної задачі має вигляд
$$u(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t,\tau)f(\tau)\,d\tau = -\frac{1}{2}e^{-t}\int\limits_{-\infty}^t e^\tau f(\tau)\,d\tau - \frac{1}{2}e^t\int\limits_t^{+\infty} e^{-\tau}f(\tau)\,d\tau.$$
Подамо ще приклад крайової задачі з нерозщепленими крайовими умовами.

ПРИКЛАД 8.5. Розв'язати періодичну крайову задачу
$$u'' + u = f(t), \quad u(0) = u(\pi), \quad u'(0) = u'(\pi).$$

Р о з в' я з а н н я . Відповідна однорідна крайова задача має лише тривіальний розв'язок $u(t) \equiv 0$. Фундаментальну сім'ю розв'язків однорідного рівняння виберемо у вигляді $u_1(t) = \cos t,\ u_2(t) = \sin t$. Тоді

$$g(t,\tau) = \begin{cases} {}_{11}(\tau)\cos t + c_{12}(\tau)\sin t & \text{при} \quad 0 \le t \le \tau, \\ c_{21}(\tau)\cos t + c_{22}(\tau)\sin t & \text{при} \quad \tau \le t \le \pi \end{cases}$$

і умова, що $g(t,\tau)$ при $t \ne \tau$ задовольняє однорідне рівняння виконується. З умов

$$g(\tau+0,\tau) = g(\tau-0,\tau), \quad g'_t(\tau+0,\tau) - g'_t(\tau-0,\tau) = 1,$$

$$g(0,\tau) = g(\pi,\tau), \quad g'_t(0,\tau) = g'_t(\pi,\tau)$$

дістаємо систему рівнянь відносно $c_{ik} = c_{ik}(\tau)\ (i,k = 1,2):$

$$(c_{21} - c_{11})\cos\tau + (c_{22} - c_{12})\sin\tau = 0, \quad c_{11} = -c_{21},$$

$$-(c_{21} - c_{11})\sin\tau + (c_{22} - c_{12})\cos\tau = 0, \quad c_{12} = -c_{22}.$$

звідси отримуємо

$$c_{11} = \frac{1}{2}\sin\tau, \quad c_{12} = -\frac{1}{2}\cos\tau, \quad c_{21} = -\frac{1}{2}\sin\tau, \quad c_{22} = \frac{1}{2}\cos\tau.$$

Тому

$$\begin{array}{l} g(t,\tau) = \frac{1}{2}\sin\tau\cos t - \frac{1}{2}\cos\tau\sin t = \frac{1}{2}\sin(\tau - t) \quad \text{при} \quad 0 \le t \le \tau, \\ g(t,\tau) = -\frac{1}{2}\sin\tau\cos t + \frac{1}{2}\cos\tau\sin t = -\frac{1}{2}\sin(\tau - t) \quad \text{при} \quad \tau \le t \le \pi, \end{array}$$

або

$$g(t,\tau) = \frac{1}{2}\sin|t-\tau| \quad \text{при} \quad 0 \le t,\tau \le \pi.$$

Єдиний розв'язок даної періодичної задачі має вигляд

$$u(t) = \int\limits_0^\pi \frac{1}{2}\sin|t-\tau| f(\tau)\,d\tau.$$

З наведених вище прикладів крайових задач стає зрозумілим, що у випадку, коли для відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння не вдається отримати фундаментальну сім'ю розв'язків стає утрудненою задача про встановлення того, що відповідна однорідна крайова задача має лише тривіальний розв'язок. Тому набуває важливого значення пошук ефективних умов, які гарантують відсутність у однорідної крайової задачі (8.1_0) – (8.2_0) нетривіального розв'язку. Вкажемо на один клас крайових задач, для яких існують такі достатні умови.

8.3 Достатні умови однозначної розв'язності однієї крайової задачі

Розглянемо двоточкову крайову задачу

$$u'' + q(t)u = f(t), \tag{8.14}$$

$$u(a) = c_1, \quad u(b) = c_2, \tag{8.15}$$

де $q,\ f$ – неперервні функції на проміжку $[a,b]$, $c_1,\ c_2$ – дійсні сталі, а також відповідну до неї однорідну крайову задачу

$$u'' + q(t)u = 0, \tag{8.14$_0$}$$

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0, \tag{8.15.$_0$}$$

Теорема 8.3 (про однозначну розв'язнівсть задачі (8.14), (8.15))**.** *Нехай в інтервалі* $]a,b[$ *виконується нерівність*

$$q(t) \le \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \tag{8.16}$$

і вона є строгою хоча б одній точці з цього інтервалу. Тоді крайова задача (8.14), (8.15) однозначно вирішуема при будь-якій неперервній на проміжку $[a,b]$ *функції* f *і будь-яких дійсних сталих* $c_1,\ c_2$ *.*

Д о в е д е н н я . Для доведення достатньо показати, що відповідна однорідна крайова задача (8.14_0), (8.15_0) має лише тривіальний розв'язок $u(t) \equiv 0$. Припустимо супротивне. Тоді рівняння (8.14_0) має нетривіальний розв'язок, що задовольняє уиови (8.15_0) . Поряд з (8.14_0) розглянемо рівняння

$$v'' + \frac{\pi^2}{(b-a)^2}v = 0, \tag{8.17}$$

яке зеідно з умовою (8.16) є мажорантою Штурма для рівняння (8.14_0) на проміжку $[a,b]$. Це рівняння має фундаментальну сім'ю розв'язків $v_1(t) = \sin\frac{\pi t}{b-a}$, $v_2(t) = \cos\frac{\pi t}{b-a}$, зокрема, розв'язок

$$v_0(t) = \frac{\pi(t-a)}{b-a},$$

який є лінійною комбінацією даних двох розв'язків.

Оскільки нерівність (8.16) э строгою хоча б в одній точці з інтервалу $[a,b[$, то згідно з лемою Штурма для будь-якого розв'язку v рівняння (8.16) існує число $t_0 \in [a,b[$ таке, що $v(t_0 = 0$ Однак, для вказаного вище розв'язку $v_0(t)$ цього рівняння маємо $v_0(a) = 0$ і і наступним його нулем є число b , тобто він на інтервалі $]a,b[$ нулів немає. Отримане протеріччя свідчить про те, що однорідна крайова задача (8.14_0), (8.15_0) має лише тривіальний розв'язок. Тому крайова задача (8.14), (8.15) однозначно вирішуєма при будь-якій неперервній на проміжку $[a,b]$ функції f і будь-яких дійсних сталих $c_1,\ c_2$.

ПРИКЛАД 8.6. Розглянемо крайову задачу

$$u'' + \sin t\, u = f(t), \quad u(0) = c_1, \quad u(\pi) = c_2,$$

де f – неперервна функція на проміжку $[0,\pi]$, $c_1,\ c_2$ – дійсні сталі. Тут $q(t) = \sin t$, $a = 0,\ b = \pi$ і $\frac{\pi^2}{(b-a)^2} = \frac{\pi^2}{\pi^2} = 1$. Оскільки

$$q(t) = \sin t \le 1 = \frac{\pi^2}{(b-a)^2}$$

і ця нерівність є строгою хоча б в одній точці з проміжку $]0, \pi$, то на підставі теореми 8.3 дана задача однозначно вирішуєма при будь-якій неперервній на $[0, \pi]$ функції f і будь-яких дійсних сталих c_1, c_2 .

Теорема 8.4 (про однозначну розв'язнівсть задачі (8.14), (8.15)). *Нехай для деякого натурального* k *в інтервалі* $]a, b[$ *виконується нерівність*

$$\frac{k^2\pi^2}{(b-a)^2} \le q(t) \le \frac{(k+1)^2\pi^2}{(b-a)^2}$$

і кожна з двох неріностей є строгою хоча б в одній точці з $]a, b[$. *Тоді крайова задача (8.14), (8.15) має один і тільки один розв'язок при будь-якій неперервній на проміжку* $[a, b]$ *функції* f *і будь-яких дійсних сталих* c_1, c_2 .

Довести теорему самостійно.

8.4 Крайові задачі з параметром

Якщо коефіцієнти однорідного рівняння (8.1_0) , або крайових умов (8.2_0) залежать від деякого параметра λ , то за певних умов існують такі значення цього параметра, для яких крайова задача має нетривіальний розв'язок. Ці значення параметра λ називають *власними значеннями*, відповідні розв'язки крайової задачі - *власними функціями.* При тих значеннях λ , які є власними значеннями , має місце другий випадок альтернативи, а при решті – перший.

ПРИКЛАД 8.7. Знайти власні значення і власні функції задачі

$$u'' - \lambda u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(d) = 0.$$

Р о з в' з а н н я . Спочатку помічаємо, що нетривіальні розв'язки цієї задачі можуть існувати тільки при $\lambda < 0$. Покладаємо $\lambda = -a^2$, $a > 0$. Із рівняння і умови $u(0) = 0$, отримуємо, що $u = c\sin at$.З умови $u(d) = 0$ випливає, що $c\sin ad = 0$. Щоб розв'язок був нетривіальним, треба, щоб $c \ne o,\ ad = \pi k,\ k = 1, 2, \ldots$. Тому

$$a = a_k = \frac{\pi k}{d}, \quad \lambda_k = -\left(\frac{\pi k}{d}\right)^2, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Числа λ_k – власні значення, а функції $u(t) = c\sin\frac{\pi k t}{d}$ – власні функції.

Важливим окремим випадком задачі на власні значення є *задача Штурма- Ліувілля*

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{du}{dt}\right) - q(t)u + \lambda\rho(t)u = 0,$$

$$\alpha u(a) + \beta u'(a) = 0, \quad \gamma u(b) + \delta u'(b) = 0,$$

де функції $p,\ p',\ q,\ \rho$ – неперервні на $[a, b]$, $p(t) > 0,\ \rho(t) > 0$ при $t \in [a, b]$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0,\ \gamma^2 + \delta^2 > 0$. Тут можуть бути і нерозщеплені однорідні крайові умови.

Далі зазначимо, що в задачах на власні значення і власні функції не тільки коефіцієнти однорідного рівняння, але і крайові умови можуть залежати від парметра λ .

ПРИКЛАД 8.8. Знайти власні значення і власні функції задачі

$$u'' + \lambda^2 u = 0, \quad u(0) = 0, -\beta\lambda^2 u(1) + u'(1) = 0, \quad \beta = \mathrm{const}\,.$$

При $\lambda = 0$ загальний розв'язок рівняння

$$u(t) = C_1 t + C_2.$$

Підставивши в крайові умови, дістанемо $C_1 = 0$, тобто $u(t) \equiv 1$ є власною функцією, яка відповідає власному значенню $\lambda = 0.$

При $\lambda \neq 0$

$$u(t) = C_1 \cos\lambda t + C_2 \sin\lambda t.$$

підставляємо в крайові умови: $C_2\lambda = 0$. Отже,

$$u(t) = C_1 \cos\lambda t,$$

$$-\beta\lambda^2 C_1 \cos\lambda - C_1 \sin\lambda = 0,$$

звідси дістаємо рівняння для визначення власних значень

$$\mathrm{tg}\,\lambda + = -\beta\lambda \quad \text{(характеристичне рівняння даної задачі)}$$

Можна показати, наприклад, графічно, що це рівняння маєрівні за модулем і протилежні за знаком корені λ_k, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Отже, власними функціями двної задачі є

$$u(t) = C_1 \cos\lambda_k t,$$

де $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, – зростаюча послідовність власних значень, чкі є абсцисами точок перетину графіків функцій $y = \mathrm{tg}\,\lambda$ і $y = -\beta\lambda$.