ВСТУП

Вперше з задачами що належать до теорії диференціальних рівнянь, вчені зіштовхнулися на межі XVI - XVII століть. Так, наприклад, Дж. Непер (1550-1617) - при визначенні натурального логарифма, Г. Галілей (1564-1642) - при вивченні падіння важкого тіла в середовищі без опору, Р. Декарт (1596-1650) і І. Барроу (1630–1677) - при вирішенні задач про визначення кривих, дотичні до яких мають задану властивість (обернена задача на дотичні) та ін. Вивчення цих зачач стало передумовою для найбільших відкриттів XVII ст. Одним із цих відкриттів стають диференціальйні рівняння. Вони були винайдені І. Ньютоном (1642-1727). (footnote [1] Термін "диференціальне рівняння"був введений у вжиток І. Лейбніцем (1646-1716).) Винахід він вважав настільки важливим, що зашифрував його у вигляді анаграми, сенс якої в сучасних термінах можна вільно передати так: "Закони природи виражаються диференціальними рівняннями".

Відповідно до принципу детермінованості Ньютона, викладеного в "Математичні начала натуральної філософії"("Principia") (1686 г.), весь рух механічної системи однозначно визначається її початковим положенням ($x(t_0) \in \mathbf{R^N}$) та початковими швидкостями ($\dot{x}(t_0) \in \mathbf{R^N}$).

Зокрема, початкове положення та швидкості визначають прискорення. Іншими словами, існує функція $F : \mathbf{R^N} \times \mathbf{R^N} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R^N}$ така, що

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t). \tag{0.1}$$

Рівняння (0.1) покладено Ньютоном основою механіки. Воно називається рівнянням Ньютона. Число N , що фігурує в визначення рівняння (0.1), залежить від типу механічної системи, що досліджували. У разі механічної системи з n матеріальних точок (n тіл), що рухаються у тривимірному евклідовому просторі, $N = n \cdot 3$ ($N = n \cdot 6$). Вигляд функції F для кожної конкретної механічної системи визначається експерементально.

Встановлений для конкретної механічної системи закон (0.1) її руху призводить до необхідності вирішення наступної, вже чисто математичної, задачі: виходячи з (0.1) та початкового стану системи

$$x(t_0) = x_0 \quad \dot{x}(t_0) = v_0 \tag{0.2}$$

знайти її положення $x(t)$ у будь-який момент часу t (у майбутньому або у минулому). Іншими словами потрібно знайти розв'язок $x(t)$ диференціального рівняння (0.1), що задовольняє початкові умови (0.2).

У окремому випадку однієї матеріальної точки маси $m = 1$, що рухається $\mathbf{R^3}$ ($N = 3$) під дією сили $F = (F_1, F_2, F_3)$, радіус-вектор $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ траєкторії її руху задовольняє згідно другого закону Ньютона рівнянню (0.1). Оскільки (0.1) являє собою рівність двох векторів, то прирівнюючи відповідні компоненти цих векторів, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = F_1(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t) \\ \ddot{x}_2 = F_2(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t) \\ \ddot{x}_3 = F_3(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t) \end{cases} \tag{0.1'}$$

для знаходження компонент $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ розв'язку $x(t)$ векторного рівняння (0.1). У разі детермінованого процесу цей розв'язок однозначно визначається початковим станом системи

$$\begin{array}{lll} x_1(t_0) = x_{01}, & x_2(t_0) = x_{02}, & x_3(t_0) = x_{03}, \\ \dot{x}_1(t_0) = v_{01}, & \dot{x}_2(t_0) = v_{02}, & \dot{x}_3(t_0) = v_{03}. \end{array} \tag{0.2'}$$

Звідси ясно, що рівняння (0.1) є, взагалі кажучи, векторною формою запису деякої системи диференціальних рівнянь, під розв'язком якої слід вже розуміти набір компонент вектор - функції $x(t)$, що задовольняють одночасно всім рівнянням системи та початковим умовам.

Важливою особливістю наведених рівнянь та систем рівнянь є те, що невідома вектор-функція (або її компоненти) є функції однією зміною t .

На початку XVIII починає зароджуватися і теорія диференціальних рівнянь із частинними похідними, розв'язками яких є функції багатьох змінних. Відправним пунктом стала тут одна з найбагатших наслідками задача XVIII століття - задача про коливання струни. Нею цікавився ще Г. Галілей, але тільки Б. Тейлор започаткував її математичний розв'язок (1715 р.). Якщо передати у символах диференціального числення встановлений ним закон оберненої пропорційності прискорення точки струни при поперечному коливанні та радіусу кривизни струни в тій же точці, то можна сказати, що для малих коливань він дійшов рівняння

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \, . \tag{0.3}$$

Саме рівняння струни, що коливається, записав Даламбер (1749 р.), отримав вперше його розв'язок у вигляді суми двох довільних функцій

$$y = f(x + at) + varphi(x - at).$$

Тут розв'язок y є функцією двох змінних x та t .

Отже, що таке диференціальне рівняння?

Означення. *Диференціальним рівнянням* називається будь-яке співвідношення, що пов'язує незалежні змінні, невідому функцію цих змінних (можливо вектор - функцію) та її похідні (або диференціали) до деякого порядку включно. Найвищий із порядків похідних (або диференціалів), що мистить рівняння, називають *порядком* диференціального рівняння.

Якщо у рівнянні незалежна змінна одна, його називають *звичайним* диференціальним рівнянням, інакше - диференціальним рівнянням *в частинних похідних.*

Рівняння, в якому шукана функція є вектор-функцією, називають *системою* диференціальних рівнянь.

Так, наприклад, рівняння

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t), \qquad e^{y'} - xy' = sin(xy), \qquad 2ux\, du = (u^2 + x^2)dx$$

є звичайними диференціальними рівняннями першого порядку, а рівняння

$$u^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t) u^{(k)}, \qquad \frac{d^n y}{dt^n} = p(t) y^{\sigma} - -$$

звичайними диференціальними рівняннями n -го порядку.

Система $(0.1')$ є прикладом системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Прикладами диференціальних рівнянь в частинних похідних є поряд з (0.3) наступні два рівняння відповідно першого та другого порядків

$$xy\frac{\partial u}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial u}{\partial y} = u \, , \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q \quad (a, q = const).$$

Надалі ми розглядатимемо лише звичайні диференціальні рівняння. Диференціальні рівняння в частинних похідних вивчаються в курсі "Методи математичної фізики".

Розв'язок звичайного диференціального рівняння визначається по різному в залежності від гладкісних функціональних властивостей співвідношень, що описують це рівняння. Надалі під *розв'язком звичайного диференціального рівняння* n *- го порядку*, ми найчастіше розумітимемо n - раз диференційовану на деякому зв'язаному проміжку $J_0 \in \mathbf{R}$ функцію або вектор-функцію (у разі системи), при підстановці якої у рівняння замість шуканої функції отримуємо тотожність на J_0 .

Це визначення надалі уточнюватиметься в процесі розгляду конкретних класів звичайних диференціальних рівнянь.

Історія розвитку теорії диференціальних рівнянь вказує на величезне значення для застосувань. Вже до кінця XVIII століття вона виросла в одну з найважливіших математичних дисциплін і стала основним апаратом математичного природознавства. Відомий французький математик, фізик та астроном П'єр Сімон Лаплас (1749-1827) стверджував, що весь всесвіт з математичної точки зору є величезною сукупністю диференціальних рівнянь.

Для підтвердження цієї тези звернемося до конкретних прикладів диференціальних рівнянь, що виникають на практиці.

1. Падіння каменю на Землю. Досвід показує, що

$$\ddot{x} = -g, \quad g \approx 9,8\,\frac{m}{cek^2}, \qquad \text{(Галілей)}, \tag{0.4}$$

де x - висота каменю над поверхнею Землі.

Падіння з великої висоти. Закон Галілея (0.4) має обмежену область застосування. Відповідно до більш точного експериментального закону падіння, відкритому Ньютоном, прискорення обернене пропорційно квадрату відстані від центру Землі:

$$\ddot{x} = -g\frac{r_0^2}{r^2}, \quad \text{де} \quad r = r_0 + x. \tag{0.5}$$

2. Коливальні системи. Малі коливання маятника або пружини.

$$\ddot{x} = -\alpha^2 x \tag{0.6}$$

де

$$\alpha = \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

для маятника.

Точніший опис коливань маятника (не обов'язково малих) приводить до закону

$$\ddot{x} = -k\,sinx. \tag{0.7}$$

У разі маятника змінної довжини виникає рівняння

$$\ddot{x} = -\alpha^2(t)x.$$

Прикладом маятника змінної довжини є гойдалка: змінюючи становище свого центру тяжіння, людина на гойдалках періодично змінює величину параметра α .

3. Потенційні системи. Нехай $U : \mathbf{R}^{3n} \longrightarrow \mathbf{R}$ - функція, що диференціюється, і нехай $m_1, \ldots, m_n$ - - додатні числа. Рух n точок мас $m_1, \ldots, m_n$ у потенційному полі з потенційною енергією U задається системою диференціальних рівнянь

$$m_i\ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} qquad (i = 1, ldots, n). \tag{0.8}$$

При $n = 3$ та

$$U = -\frac{m_1 m_2}{\|x_1 - x_2\|} - \frac{m_2 m_3}{\|x_2 - x_3\|} - \frac{m_1 m_3}{\|x_1 - x_3\|}$$

ця система складає одну з найвідоміших і невирішених до теперішнього часу небесно механічних задач трьох тіл.

При $n = 2$ і $U = -\frac{\gamma M}{r}$, де $r = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$, ми маємо систему для визначення траєкторії руху однієї планети навколо іншої.

Очевидно, що розглянуті вище приклади рівнянь (0.4)-(0.7), є прикладами потенційних систем. (Який вигляд мають для них функції U ?).

4. Радіоактивний розпад елементів. Розглянемо цю задачу з більш життєвого погляду.

У 1940 р. виїхала на пікнік у передмістя міста Л. у Франції група студентів. Під час пікніка вони помітили, що собака одного з хлопців, яку взяли із собою, зник. Вирушивши на пошуки, вони виявили, що собака впав у глибоку яму і не може вибратися самостійно. Хазяїн собаки зістрибнув у яму, щоб допомогти своєму псу. Але виявилося, що яма була отвором у стелі стародавньої печери. На стінах печери були малюнки, що зображують оленів, диких коней та тварин, схожих на сучасних бугаїв. Це випадкове відкриття стало сенсацією. Крім настінного живопису і інших археологічних знахідок було виявлено вугілля, що залишилось після багаття. Проблема, яку необхідно вирішити, наступна: чи можна з цими залишками вугілля з'ясувати, як давно печера була населена людьми. Добре відомо, що вугілля – це згоріле дерево, і що у всіх неживих органічних речовин часом відбуваються певні зміни. Також відомо, що всі живі організми містять два атоми вуглецю, іменовані C^{12} і C^{14}. Перший елемент стабільний, другий - радіоактивний. Крім того, відношення між їх кількостями в будь-якому живому організмі постійно. Однак з моменту, коли організм вмирає, C^{14}, будучи радіоактивним, кількісно зменшується з часом за рахунок розпаду, тому що не відбувається його поповнення. Отже, кількість C^{14} у мертвому організмі та її відношення до кількості C^{12} змінюються з часом. Змінними величинами в цієї задачі будуть: кількість C^{14} та час. Залежність однієї з цих величин від іншої полягає у наступному. Швидкість радіоактивного розпаду речовини прямо пропорційна його кількості, тобто ми можемо отримати диференційне рівняння. Нехай t визначає час, починаючи з того моменту, як дерево, з якого вийшло вугілля, померло; x визначає кількість C^{14} у вугіллі у час t. Тоді миттєва швидкість, з якою елемент C^{14} розпадається, визначається у математичних символах $\frac{dx}{dt}$. Тепер врахуємо, що ця швидкість пропорційна x. Тоді рівнянням, що виражають цей закон, буде

$$\frac{dx}{dt} = -kx, \tag{0.9}$$

де k - додатня стала, а знак $-$ показує, що кількість x C^{14} зменшується з часом. Легко бачити, що задовольняти цьому рівнянню можуть лише функції

$$x(t) = Ae^{-kt}, \qquad A = \mathrm{const}. \tag{0.10}$$

Останнє співвідношення дає нам залежність між x і t, але воно не дає нам відповіді, оскільки ми не знаємо значень A і k. Тому треба скористатися тією додатковою інформацією, яку ми ще не враховували. У момент часу, коли дерево вмирає, тобто при $t = 0$, з (0.10) отримуємо $x = A$ - кількість C^{14} у живому дереві. З хімії відомо, що через 10 років після смерті дерева у ньому залишається 99,876/ C^{14}. З математичною точки зору це означає, що при $t = 10$ маємо $x = 0,99876 \cdot A$. Підставляючи ці значення (0.10), отримаємо

$$0,99876 \cdot A = A \cdot e^{-10k} \Longleftrightarrow 0,99876 = e^{-10k} \Longleftrightarrow$$

$$k = -0,1 \cdot \ln 0,99876 \approx 0,000124.$$

Таким чином, (0.10) остаточно перепишеться у вигляді

$$x = A \cdot e^{-0,000124\,t}, \tag{0.11}$$

де A-кількість C^{14} в дереві в момент його загибелі. Рівняння (0.11) виражає залежність між кількістю x та часом t. Ми впритул підійшли до відповіді на питання нашого завдання, як давно печера був заселено. Проводячи хімічний аналіз вугілля, вчені встановили відношення між C^{12} і C^{14} на той момент, коли було відкрито печеру. Порівнюючи це відношення з постійним відношенням між C^{12} і C^{14}, що має в живому дереві було встановлено, що від часу, як дерево спалили, 85,5/ C^{14} було втрачено. Отже, залишилося $0,145 \cdot A$ речовини C^{14}. Підставляючи це значення x (0.11), отримаємо

$$0,145 \cdot A = A \cdot e^{-0,000124\,t} \Longleftrightarrow t = 15\,553,$$

тобто печеру було населено людьми приблизно 15,5 тисячі років назад.

5. Рівняння всесвіту. Так часто і небезпідставно називають рівняння Емден-Фаулера

$$y'' = \pm t^{\gamma} |y|^{\sigma} \operatorname{sign} y.$$

Воно вперше з'явилося в астрофізичних дослідженнях Р. Емдена, проведених у другій половині XIX століття та присвячених вивченню розподілу зоряної речовини. На початку XX століття воно виникає в роботах Л.Томаса та Е. Фермі щодо розподілу електронів у тяжкому атомі. Надалі рівняння

Емден-Фаулера зустрічається в газовій динаміці, механіці рідин, релятивістській механіці, теорії плазми продуктів згоряння та багатьох інших областях природознавства. Той факт, що абсолютно різні явища описуються рівняннями одного і того ж виду особливо наочно свідчать про єдність навколишнього світу.

6. Теорія хімічних реакцій. Одним із основних законів теорії швидкостей хімічних реакцій є закон діючих мас, згідно з яким швидкість хімічної реакції при сталій температурі пропорційна добутку концентрації речовин, що у цей час часу є у реакції, тобто

$$\frac{dx}{dt} = k(a - \alpha x)(b - \beta x),$$

де a і b - об'єми двох хімічних речовин; на момент t в хімічну реакцію вступило αx першої речовини і βx - другої речовини.

При моделюванні біохімічних реакцій часто доводиться враховувати ефект від повільно і швидко протікаючих процесів. Як результат одержують у загальному випадку т.зв. сингулярні системи диференціальних рівнянь. Продемонструємо це на прикладі *реакції Білоусова Жаботинського*, коли йдеться про окислення від лимонної кислоти

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{dx}{dt} = x + y - qx^2 - xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y + 2hz - xy, \\ p\dfrac{dz}{dt} = x - z, \end{cases} \tag{0.12}$$

де $x = [H\ Br\ O_2]$, $y = [Br^-]$, $z = \left[Ce^{+4}\right]$, $0 < \varepsilon,\ q \ll 1,\ p \gg 1$. Усі вхідні змінні та параметри додатні,

7. Завдання про ефективність реклами.

Припустимо, що торговими установами реалізується продукція P, про яку в момент часу t з-поміж потенційних покупців N знає лише x покупців. Для прискорення збуту дано рекламні оголошення по радіо та по телевізору. Наступна інформація про продукцію поширюється серед покупців за допомогою спілкування один з одним. Експериментально встановлено, що після рекламних оголошень швидкість зміни числа знаючих про продукцію P пропорційна як знаючих про товар покупців, так і кількості покупців,що про нього не знають. Якщо припустити, що час відраховується з моменту виходу рекламного оголошення, коли про товар дізналося $\frac{N}{Y}$ людей ($1 \le Y \le N$), то приходимо до диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x) \qquad (k > 0)$$

з початковою умовою $x = \frac{N}{Y}$ за $t = 0$.

Це рівняння називають *логістичним.* Їм описується також розвиток будь-якої науки.

Розв'яжемо дане рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x) \Longleftrightarrow \frac{dx}{x(N - x)} = k\,dt \Longleftrightarrow \frac{1}{N}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{N - x}\right) = k\,dt.$$

Проінтегрувавши його, отримаємо

$$\frac{x}{N - x} = C\,e^{kNt} \Longleftrightarrow x = \frac{NC\,e^{kNt}}{1 + C\,e^{kNt}}.$$

Поклавши, як сказано раніше, $x(0) = \frac{N}{Y}$, отримаємо

$$x = \frac{N}{1 + (Y - 1)\,e^{-kNt}}.$$

В економічній літературі це рівняння називають рівнянням логістичної кривої. На малюнку зображено графік цієї кривої при $Y = 2$.

8. Закони розмноження.

Закон нормального розмноження. Якщо припустити, що величина біологічної популяції (кількість бактерій у чашці Петрі чи риб у ставку) дорівнює $x \in \mathbf{R}$ і швидкість її приросту пропорційна наявній кількості особин (це припущення виконується при досить великій кількості їжі), то отримаємо диференціальне рівняння нормального розмноження

$$\dot{x} = kx, \qquad \text{де} \quad k > 0.$$

9. Співіснування видів.

Найпростіша, найгрубіша модель, що описує боротьбу двох видів хижака і жертви полягає в наступному. Розглянемо ставок, в якому живуть риби двох видів, скажімо, карасі та щуки. Якби щук не було, карасі x розмножувалися б за нормальним законом розмноження $\dot{x} = kx$. Якщо y – кількість щук, слід врахувати карасів, з'їдених щуками. Ми припустимо, що кількість зустрічей карасів зі щуками пропорційно як числу карасів, так і числу щук; тоді для швидкості зміни числа карасів отримаємо рівняння

$$\dot{x} = kx - axy.$$

Що стосується щук, то без карасів вони вимирають: $\dot{y} = -ly$, при наявності карасів починають розмножуватися зі швидкістю пропорційною числу з'їдених карасів:

$$\dot{y} = -ly + bxy.$$

Таким чином, ми приходимо до системи диференціальних рівнянь найпростішої моделі хижак - жертва

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy \\ \dot{y} = -ly + bxy \end{cases}.$$

Ця модель називається моделлю Лотка - Вольтерра на ім'я авторів.

10. Моделювання в медицині.

Модель Зімана роботи серця описується системою рівнянь

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = x - x_3 - y \\ \dot{y} = x - x_0 \end{cases},$$

де ε - малий параметр, $x_0 = onst$.

Модель зростання ракової пухлини - системою

$$\begin{cases} \dot{x} = -\lambda_1 x - \frac{\alpha_1 x y^{\frac{2}{3}}}{1+x}\left(1 - \frac{x}{c}\right) \\ \\ \dot{y} = \lambda_2 y - \frac{\alpha_2 x y^{\frac{2}{3}}}{1+x} \end{cases},$$

де λ_i, α_i $(i = 1, 2)$, $c-$ додатні параметри.

Відповідно до закону випромінювання тепла швидкість охолодження тіла у повітрі пропорційна різниці між температурою тіла та температурою повітря, тобто.

$$\frac{dx}{dt} = -k(x - a),$$

де x - температура тіла в момент часу t; $a-$ температура повітря; $k-$ додатній коефіцієнт пропорційності.

11. Завдання про переслідування (крива погоні). Міноносець починає переслідування підводного човна, який знаходиться на відстані 3 км від нього. Швидкість міноносця вдвічі більша за швидкість підводного човна. Потрібно визначити траєкторію (лінію руху), по якій повинен рухатись міноносець, щоб він пройшов точно над підводним човном, якщо останній відразу ж після початку переслідування йде на повній швидкості прямим курсом у невідомому напрямі. Для вирішення сформульованої задачі введемо полярні координати r, θ таким чином, щоб полюс O знаходився у точці виявлення підводного човна, а полярна вісь r проходила через точку, у якій на момент виявлення перебував міноносець. Подальші міркування ґрунтуються на наступних міркуваннях. Насамперед, міноносцю треба зайняти таку позицію, щоб він і підводний човен знаходилися на одній відстані від полюса O. Потім міноносець повинен рухатися навколо полюса O за такою траєкторією, щоб обидва рухомі об'єкти весь час перебували на однакової відстані від точки O. Тільки в цьому випадку міноносець, оминаючи полюс O, пройде над підводним човном. Зі сказаного вище слід, що спочатку міноносець повинен йти прямим курсом до точки O до тих пір, поки він не опиниться на тій самій відстані x від полюса O, що й підводний човен. Очевидно, що відстань x можна знайти з рівняння $\frac{x}{v} = \frac{3-x}{2v} \Longleftrightarrow x = 1$ (км). Тепер, якщо "зустрічі"не відбулося, то міноносець має надалі рухатися навколо полюса O (у напрямку руху вартовий стрілки або проти), віддаляючись від останнього зі швидкістю підводної човни v. Розкладемо швидкість міноносця $2v$ на дві складові: радіальну v_r і тангенційну v_τ. Радіальна складова - це лінійна швидкість, з якою міноносець віддаляється від полюса O, тобто $v_r = \frac{dr}{dt}$. Тангенційна складова – це лінійна швидкість обертання міноносця щодо полюса. Вона дорівнює добутку кутової швидкості $\frac{d\theta}{dt}$ на радіус r, тобто $v\tau = r\frac{d\theta}{dt}$. Оскільки за логікою задачі $v_r = v$, $v_\tau = \sqrt{(2v)^2 - v^2} = \sqrt{3}\,v$. Отримуємо систему двох диференціальних рівнянь

$$\frac{dr}{dt} = v, \qquad r\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{3}\,v,$$

яка виключенням змінної t може бути зведена до рівняння

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{\sqrt{3}}.$$

Його розв'язком буде $r = C\,e^{\frac{\theta}{\sqrt{3}}}$. Сталу C знаходимо з умови, що на початку руху навколо полюса $r = 1$ і $\theta = 0$, тоді $C = 1$. Таким чином, щоб виконати своє завдання, міноносець повинен пройти два кілометри прямим курсом до місця виявлення підводного човна, а потім рухатися по спіралі $r = e^{\frac{\theta}{sqrt3}}$.

12. Завдання математичного аналізу. Нехай потрібно обчислити залежний від параметра інтеграл

$$I(a) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2-2ax}\,dx.$$

Продиференціювавши його за параметром a, отримаємо

$$\frac{dI}{da} = -\int\limits_0^{+\infty} 2xe^{-x^2-2ax}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2-2ax}\,d(-x^2-2ax)+$$

$$+2a\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2-2ax}\,dx = -1 + 2aI(a).$$

Таким чином, для вирішення поставленого завдання необхідно розв'язати систему диференційних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dI}{da} = 2aI - 1 \\ I(0) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{cases}$$

Оскільки закони, що діють у природі та в суспільстві, приводять до диференціальних рівнянь, виникає необхідність навчитися знаходити чи досліджувати розв'язки різних типів диференціальних рівнянь.

Процес знаходження розв'язків диференціальних рівнянь називають інтегруванням рівнянь. Якщо всі розв'язки рівняння вдається отримати у вигляді деяких співвідношень від інтегралів від елементарних функцій, то кажуть, що рівняння інтегрується в квадратури.

Задачи побудови методів інтегрування диференціальних рівнянь та дослідження властивостей самих рівнянь - складає предмет теорії диференціальних рівнянь, як науки, яка представляє самостійний розділ математики.