

ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ І.І. МЕЧНИКОВА

Інститут математики, економіки та механіки

Кафедра методів математичної фізики

Методичні вказівки

до курсу

«Математичне моделювання деяких задач механіки і техніки»

для студентів 3 курсу

спеціальності 6.04030101 «Прикладна математика»

Одеса 2015

Друкується згідно з рішенням Вченої Ради Інституту математики, економіки та механіки (протокол № 2 від 27 листопада 2014 року)

Укладачі: Процеров Ю.С., канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри методів математичної фізики

Мойсєєнок О.П., канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри методів математичної фізики

Рецензенти: Вайсфельд Н.Д., доктор фіз. – мат. наук, професор, завідувача кафедрою методів математичної фізики

Реут В.В., кандидат фіз. – мат. наук, доцент, завідувачий кафедрою Обчислювальної математики

Методичні вказівки призначені для студентів спеціальності «Прикладна математика». При підготовці цих вказівок ми виходили з наступного висловлення академіка А.А. Самарського: «Багаторічні і складні пошуки призвели прикладну математику до формування нового наукового метода, який отримав на перший погляд парадоксальну назву – обчислювальний експеримент (математичне моделювання). Що під цим терміном розуміється? Коротко кажучи, створення і вивчення математичних моделей об'єктів, які ми досліджуємо, за допомогою ЕОМ.» При цьому, першим і в той же час найбільш важливим етапом у обчислювальному експерименті є створення математичною моделі. Мета цих вказівок, показати студентам, як створюються математичні моделі, якщо об'єктом є пружне тіло, зокрема, пластина або стрижень.

Викладання матеріалу проведено у відповідності з курсом лекцій, який був розроблений і багато років читався на кафедрі методів математичної фізики доктором фіз.- мат. наук, професором Г.Я. Поповим.

ЗМІСТ

1. Математичне моделювання механіки пружного середовища.	
1.1. Основна задача механіки пружного середовища і основні припущення.....	4
1.2. Математичний опис навантажень на пружне тіло	4
1.3. Напруження та тензор напружень.....	10
1.4. Диференціальні рівняння рівноваги і закон взаємності дотичних напружень.....	12
1.5. Деформації і переміщення.....	14
1.6. Закон Гука.....	17
1.7. Повна система рівнянь теорії пружності та основні граничні задачі для неї. Теорема єдності.....	20
1.8. Приведення рівнянь теорії пружності до системи трьох рівнянь Ламе. Врахування сил інерції та температури.....	22
2. Двовимірні задачі теорії пружності.	
2.1. Деформація поздовжнього зсуву (антиплоска задача теорії пружності).....	25
2.2. Плоска задача теорії пружності. Випадки деформації пружного тіла, які призводять до плоскої задачі.....	30
2.3. Зведення плоскої задачі до бігармонічного рівняння.....	33
3. Математичне моделювання задач розрахунку кручення пружних стрижнів.	
3.1. Принцип Сен-Венана.....	36
3.2. Зведення розрахунку кручення стрижнів до задачі Неймана.....	37
3.2. Зведення розрахунку кручення стрижнів до задачі Діріхле.....	41
4. Математичне моделювання задач розрахунку пластин та балок на згин.	
4.1. Основні допущення та наслідки з них.....	44
4.2. Перехід від напружень до сумарних (інтегральних) характеристик.....	46
4.3. Виведення диференціального рівняння згину пластини.....	48
4.4. Математичне формулювання умов закріплення пластини. Трансформація Кірхгофа.....	49
4.5. Циліндричний згин пластин і згин балок.....	51
5. Основні рівняння теорії пружності у криволінійних системах координат.	
5.1. Циліндрична система координат.....	52
5.2. Сферична система координат.....	57
Список рекомендованої літератури	61

1. Математичне моделювання механіки пружного середовища.

1.1. Основна задача механіки пружного середовища і основні припущення.

Механіка пружного середовища або теорія пружності займається деформацією та рухом пружних тіл під впливом зовнішніх навантажень. Під пружним тілом розуміються такі тіла, які відновлюють свою вихідну форму після усунення зовнішніх навантажень, які викликають деформацію. В якості зовнішніх впливів розглядаються поверхневі навантаження (зовнішні сили), масові сили (наприклад, вага), нагрів або охолодження тіла. Звідси, основною задачею механіки пружного середовища є визначення переміщень будь-якої точки тіла по заданому зовнішньому навантаженню. Для постановки та розв'язання подібних задач першочергово потрібно провести математичне моделювання, тобто переклад цих задач на математичну мову. При цьому приймаються деякі припущення. Перше з них – це використання ідеальної та спрощеної моделі твердого тіла у вигляді «матеріального суцільного середовища». Нехтуючи молекулярною та атомною структурою тіла вважається, що матеріал пружного тіла неперервно розташовано по всьому об'єму тіла, так що малий елемент, вирізаний з тіла, має ті ж самі фізичні властивості, що і все тіло. Крім того, суцільне середовище трактується як неперервне середовище у математичному сенсі: в результаті деформації близькі точки переходять у точки близькі між собою та виключається поява тріщин та порожнин у тілі. Неперервне розподілення матерії в деякій області тіла характеризується густиною. Розглядається точка A тіла, яка оточена замкненою поверхнею, що охоплює область об'ємом ΔV і масою ΔM , тоді густина тіла у точці A визначається як
$$\rho(A) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V}.$$

Якщо густина тіла стала, то таке тіло називається однорідним. Далі будемо розглядати тільки однорідні тіла. Крім того будемо вважати, що тіло ізотропне, тобто його пружні властивості однакові в усіх напрямках. Нарешті, будемо розглядати лінійну теорію пружності, в якій передбачається, що деформації тіла є достатньо малими по відношенню до його розмірів, а співвідношення, які зв'язують деформації і напруження (внутрішні сили, які виникають в тілі під дією зовнішніх навантажень) є лінійними.

1.2. Математичний опис навантажень на пружне тіло.

Розглянемо деяке пружне тіло. До нього можуть бути прикладені зовнішні навантаження. Зовнішнє навантаження може бути

1. Зосередженим, тобто прикладеним у одній точці;
2. Розподіленим (по лінії, по площі, по об'єму).

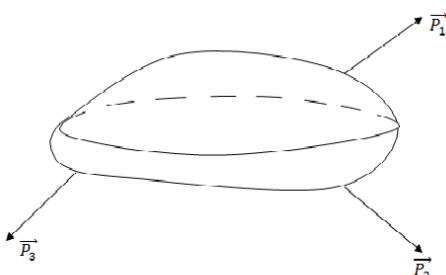


Рис. 1.1

Розглянемо спочатку зосереджені сили, які будемо позначати векторами (рис. 1.1). Ці сили можна додавати як вектори за відомими правилами (рис. 1.2). Будь-яку силу \vec{P} можна розкласти на суму складових, які спрямовані вздовж координатних вісей $\vec{P} = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}$. При цьому сила \vec{P} буде

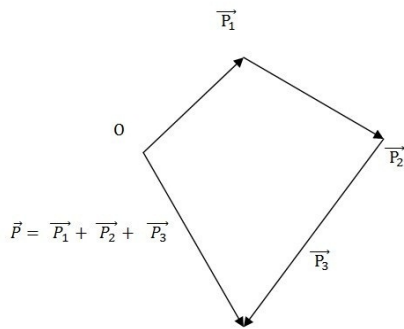


Рис. 1.2

дорівнювати нулю, якщо усі її проекції P_x , P_y , P_z дорівнюють нулю.

До тіла може бути прикладена пара сил, тобто система двох паралельних сил, які рівні за величиною і спрямовані у протилежні сторони (рис.1.3). Площина, в якій лежать ці сили, називається площиною пари, а відстань h між лініями дії цих сил називається плечем пари.

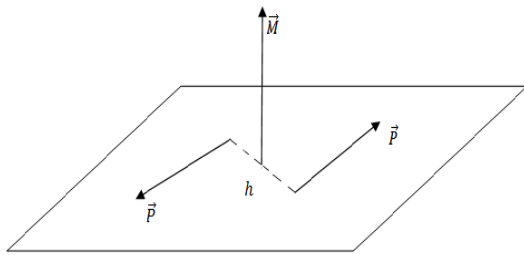


Рис. 1.3

Мірою дії пари сил, яка спричиняє обертання тіла, є її момент \vec{M} . Це вектор, величина якого дорівнює добутку величини однієї сили на плече пари $|\vec{M}| = |\vec{P}| \cdot h$ і спрямований по перпендикуляру до площі пари сил так, щоб дивлячись вздовж його напрямку, побачити поворот тіла парю сил додатнім, тобто проти часової стрілки.

Пари сил можна додавати, додаючи їх вектори. Тому, будь-яку сукупність пар сил, які прикладені до тіла, можна звести до однієї пари сил.

Нехай до тіла прикладена деяка сила \vec{P} і нехай O деяка точка тіла, яка не лежить на лінії дії сили. Ця сила спричиняє поворот тіла відносно точки O , яка характеризується моментом $\vec{M}_O(\vec{P})$ сили \vec{P} відносно точки O .

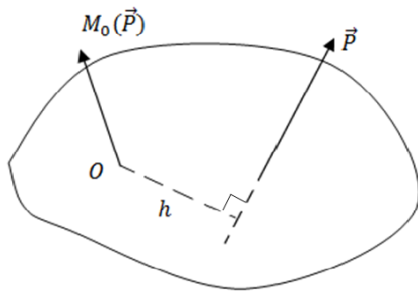


Рис. 1.4

Моментом сили \vec{P} відносно т. O назовемо вектор $\vec{M}_O(\vec{P})$, який дорівнює за величиною добутку сили на найкоротшу відстань від т. O до лінії дії сили – плече сили h : $|\vec{M}| = |\vec{P}| \cdot h$ і спрямований по перпендикуляру до площини, яка містить силу і т. O , у той бік, щоб дивлячись вздовж вказаного стрілкою напрямку вектора момента, поворот тіла силою, що прикладена до нього був би додатнім, тобто проти часової стрілки (рис. 1.4).

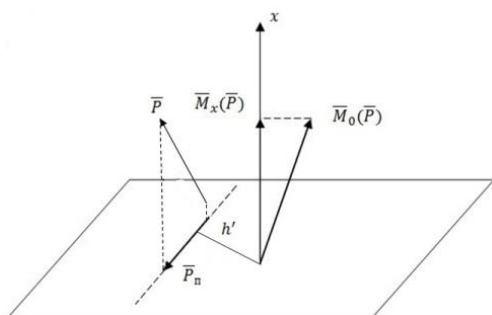


Рис.1.5

Вектор момента сили відносно точки може бути спроектовано на вісі координат. Нехай до тіла прикладена деяка сила \vec{P} і нехай деяка вісь, наприклад Ox , не проходить через точку прикладення сили. Тоді ця сила \vec{P} створює момент $\vec{M}_x(\vec{P})$ відносно вісі Ox , який обертає тіло навколо цієї вісі.

Проведемо площину Π , перпендикулярно до вісі Ox . Нехай вектор \vec{P}_π є проекцією вектора \vec{P} на площину Π (рис. 1.5). Розглянемо момент сили \vec{P}_π відносно точки O . Алгебраїчну величину цього моменту $|\vec{P}_\pi| h'$ назвемо моментом сили \vec{P}_π відносно вісі Ox і позначимо $M_x(\vec{P})$. Можна показати, що проекція вектора момента сили відносно деякої точки на вісь, яка проходить через цю точку, дорівнює моменту сили відносно цієї вісі (у випадку, який ми розглядаємо $M_x(\vec{P})$ є проекція момента $\vec{M}_0(\vec{P})$ на вісь Ox). Якщо момент сили відносно деякої точки дорівнює нулю, тоді момент цієї сили відносно будь-якої вісі, яка проходить через цю точку, дорівнює нулю.

Довільну систему сил, яка прикладена до тіла, завжди можна привести до однієї сили \vec{R} , яка прикладена до заздалегідь заданої точки O (центр приведення) і яка називається головним вектором системи сил, і до однієї пари сил з моментом \vec{M} , який називається головним моментом сил. Тіло буде знаходитися у стані рівноваги тоді і тільки тоді, коли головний вектор і головний момент системи сил, прикладених до тіла, дорівнюють нулю: $\vec{R} = 0$, $\vec{M} = 0$.

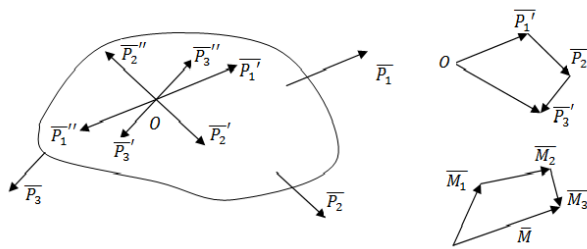


Рис. 1.6

Розглянемо приклад такого зведення (рис.1.6). Нехай до тіла прикладені три сили \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{P}_3 . Візьмемо довільно центр приведення O . Прикладемо до т. O дві рівні за величиною і протилежно спрямовані сили \vec{P}_1' і \vec{P}_1'' , причому сила \vec{P}_1' співпадає за напрямком і величиною з силою \vec{P}_1 .

Дію на тіло сили \vec{P}_1 можна замінити дією сили \vec{P}_1' і пари сил \vec{P}_1 , \vec{P}_1'' з деяким моментом \vec{M}_1 . Поступаючи так само з кожною силою отримаємо три сили \vec{P}_1' , \vec{P}_2' , \vec{P}_3' сума яких і дасть головний вектор сил \vec{R} та три пари сил з моментами \vec{M}_1 , \vec{M}_2 , \vec{M}_3 , векторна сума яких дає головний момент сил \vec{M} . При такій побудові момент кожної приєднаної пари \vec{M}_i дорівнює моменту прикладеної до тіла сили \vec{P}_i , відносно центра приведення O . Тому на головний момент \vec{M} ми можемо дивитись не тільки як на векторну суму векторів моментів приєднаних пар, але як на векторну суму моментів усіх діючих сил відносно центра приведення.

Проектуючи головний момент і головний вектор на координатні вісі і враховуючи, що проекція вектора момента на вісь дорівнює моменту відносно цієї вісі, умови рівноваги можемо записати у вигляді: $R_x = R_y = R_z = 0$, $M_x = M_y = M_z = 0$.

Так як проекція суми векторів дорівнює сумі відповідних проекцій, то умови рівноваги остаточно приймуть вигляд: сума проекцій усіх сил на координатні вісі і сума моментів усіх сил відносно цих вісей дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = \sum_{i=1}^n P_{iy} = \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_x(\vec{P}_i) = \sum_{i=1}^n M_y(\vec{P}_i) = \sum_{i=1}^n M_z(\vec{P}_i) = 0.$$

Звідки отримаємо, що тіло не може знаходитись у рівновазі під дією однієї сили.

Назвемо рівнодіючою системи сил таку силу, яка замінює дію на тіло усіх сил не порушуючи рівноваги тіла. Рівнодіюча співпадає з головним вектором системи сил тільки у випадку, коли головний момент дорівнює нулю.

Перейдемо зараз до розгляду розподілених навантажень, прикладених до тіла. Розподілені навантаження можуть бути трьох видів: навантаження, розподілене по лінії, або погонне навантаження; навантаження розподілене по поверхні тіла (поверхневе навантаження); навантаження, розподілене по об'єму, (об'ємне навантаження). В усіх трьох випадках розподілене навантаження описується своєю інтенсивністю, до визначення якої ми зараз перейдемо.

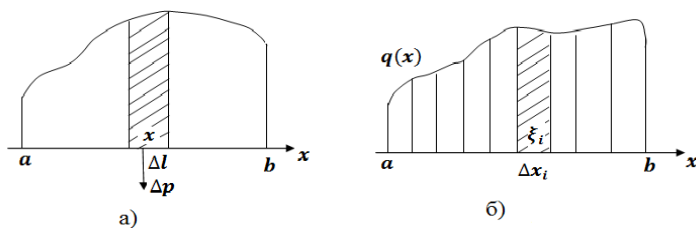


Рис. 1.7

Розглянемо випадок погонного навантаження, прикладеного вертикально на відрізок $[a, b]$ вісі Ox (рис. 1.7а). Візьмемо довільну точку $x \in [a, b]$ і нехай Δl деякий відрізок, який містить точку x . Дію навантаження на ділянці Δl можна звести до головного

вектора, прикладеного в точці x , і до головного моменту. При цьому головний момент буде прямувати до нуля при $\Delta l \rightarrow 0$ за рахунок зменшення плеча, а тому ми можемо вважати головний вектор навантаження співпадаючим із його рівнодіючою силою ΔP на Δl . Назвемо інтенсивністю погонного навантаження у точці x наступну величину

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta l} = q(x),$$

яка має розмірність сили, віднесеної до одиниці довжини. Визначимо сумарне навантаження на $[a, b]$ за інтенсивністю $q(x)$. Для цього розіб'ємо $[a, b]$ на часткові сегменти довжини Δx_i і у кожному з них виберемо точку ξ_i . Тоді, навантаження, яке діє на Δx_i наближено дорівнює $q(\xi_i)\Delta x_i$ і ця рівність буде тим точніше чим менше Δx_i . Сумуючи за всіма частковими сегментами і переходячи до границі $\Delta x_i \rightarrow 0$, як це робилося при введенні визначеного інтегралу, отримуємо, що сумарне навантаження

$$\text{дорівнюватиме (рис. 1.7б) } F = \int_a^b q(x)dx.$$

Якщо інтенсивність $q(x) = q = \text{const}$ (таке навантаження називається рівномірно розподілене), то сумарне навантаження на $[a, b]$, $F = q(b-a)$, тобто дорівнює добутку інтенсивності на довжину ділянки, де прикладене навантаження.

Якщо погонне навантаження не є нормальним до ділянки прикладення $[a, b]$, а змінює свій напрям від точки до точки, тоді його рівнодіюча $\Delta \vec{P}$ буде векторною величиною, а тому і інтенсивність буде описуватися вектором $\vec{q}(x) = q_x(x)\vec{i} + q_y(x)\vec{j}$, де q_x і q_y є складові вздовж координатних вісей Ox і Oy , а \vec{i} і \vec{j} орти цих вісей.

У випадку навантаження розподіленого по поверхні, інтенсивність сили у деякій точці A поверхні буде описуватися векторною величиною, яка визначається так

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta S} = \vec{q}(A) = q_x(A)\vec{i} + q_y(A)\vec{j} + q_z(A)\vec{k},$$

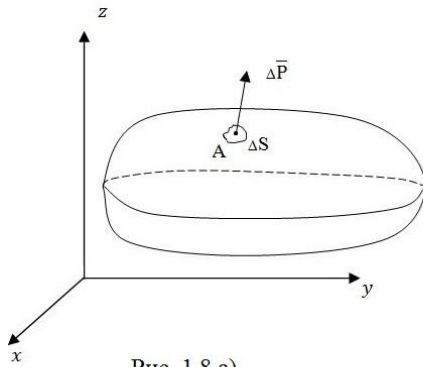


Рис. 1.8 а)

де ΔS – площа деякого елемента поверхні, який містить точку A (рис.1.8а), а $\Delta \vec{P}$ – рівнодіюча навантаження, прикладеного до ΔS , співпадаюча як і у випадку погонного навантаження з її головним вектором за рахунок того, що головний момент прямує до нуля при $\Delta S \rightarrow 0$.

При цьому сумарне навантаження, прикладене до поверхні ΔS дорівнює

$$F = \iint_S \vec{q}(A) ds.$$

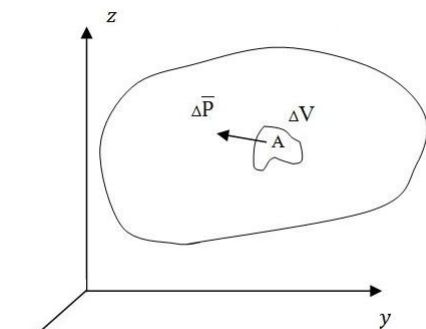


Рис. 1.8 б)

Відмітимо, що у випадку поверхневого навантаження з постійною інтенсивністю сумарне навантаження по деякій поверхні вздовж деякого напрямку дорівнює добутку площі поверхні, що розглядається на складаючу інтенсивності по даному напрямку.

Для визначення інтенсивності об'ємного навантаження у деякій точці A необхідно розглянути деякий об'єм ΔV , який містить точку A (рис.1.8б).

Якщо $\Delta \vec{P}$ є головний вектор сил, прикладених до ΔV , то інтенсивністю навантаження у точці A буде величина

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta V} = \vec{Q}_v(A) = X(A)\vec{i} + Y(A)\vec{j} + Z(A)\vec{k}$$

При постійній інтенсивності сумарне навантаження по деякій області за даним напрямом дорівнює добутку об'єму цієї поверхні на відповідну компоненту інтенсивності навантаження вздовж напрямку який розглядається.

Для математичного моделювання зосереджених навантажень використовується так звана δ -функція Дірака $\delta(x)$, яка точніше є функціоналом і кожній функції $f(x)$ ставить у відповідність її значення при $x = 0$

$$(f, \delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

$$\text{При цьому } \int_a^b f(x) \delta(x - \xi) dx = \begin{cases} f(\xi), & \xi \in (a, b) \\ 0, & \xi \notin (a, b) \end{cases},$$

де $f(x)$ - функція визначена на $[a, b]$.

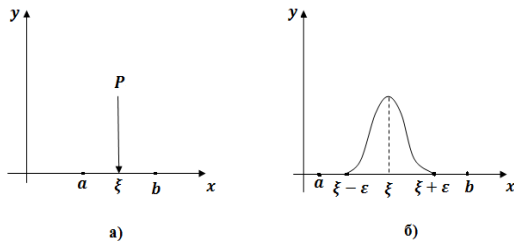


Рис. 1.9

Розглянемо спочатку випадок погонного навантаження. Нехай в точці ξ до тіла у вигляді нитки $[a, b]$ прикладена зосереджена сила величиною P (рис.1.9а). З'ясуємо, як її можна описати за допомогою δ -функції. Якщо до нитки $[a, b]$ прикладене розподілене навантаження з інтенсивністю $q(x)$, то для будь-якої неперервної

функції $f(x)$ ми можемо розглянути інтеграл $\int_a^b q(x) f(x) dx$. Для того щоб розглядати

подібний інтеграл із зосередженим навантаженням, замінімо $q(x)$ на навантаження $q_\varepsilon(x)$, розподілене по $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ (рис.1.9б) так, що її рівнодіюча для будь-якого

ε дорівнювала P , тобто $\int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} q_\varepsilon(x) dx = P$. Для виконання цієї рівності при зміні ε

необхідно, щоб величина $q_\varepsilon(x)$ зростала при зменшенні ε . Застосуємо теорему про середнє до інтегралу

$$\int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} q_\varepsilon(x) f(x) dx = f(\bar{x}) \int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} q_\varepsilon(x) dx = f(\bar{x}) P, \quad \bar{x} \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon).$$

Якщо тепер спрямувати ε до нуля, то в правій частині останньої рівності отримаємо $f(\xi)P$. Порівнюючи цей результат з визначенням δ -функції отримуємо, що зосереджену силу величини P , що прикладена в т. ξ можна задати як навантаження

$$q(x) = P \delta(x - \xi).$$

Розглянемо тепер випадок навантаження, яке розподілене по площині. Якщо по лінії $x = \xi$ прикладене навантаження з інтенсивністю $q(y)$ (рис.1.9в), то, вочевидь, його можна описати як $p(x, y) = q(y)\delta(x - \xi)$.

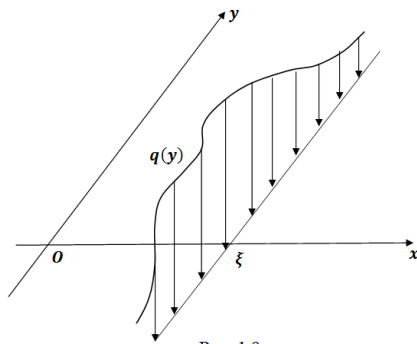


Рис. 1.9 в

Якщо ж навантаження зводиться до зосередженої сили величини P , що прикладена на площині в точці (ξ, η) , то, її можна описати так

$$p(x, y) = P\delta(y - \eta)\delta(x - \xi).$$

Аналогічно задається зосереджена сила величини P , яка прикладена у деякій точці (ξ, η, ζ) простору

$$p(x, y) = P\delta(y - \eta)\delta(x - \xi)\delta(z - \zeta).$$

1.3 Напруження та тензор напружень.

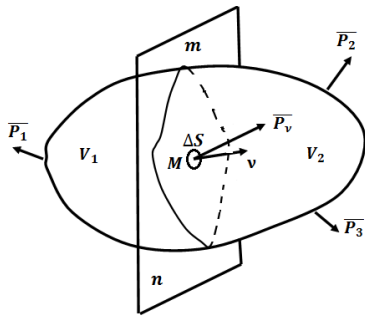


Рис. 1.10

Розглянемо тіло V , що знаходиться у рівновазі під дією зовнішніх сил. Розсічемо його площиною mn з нормаллю ν на дві частини V_1 і V_2 (рис. 1.10) та розглянемо одну з частин, наприклад V_1 . Ця частина тіла також повинна знаходитись в рівновазі, але так як тіло не може знаходитись в рівновазі під дією однієї сили, то по перетину mn діють деякі внутрішні сили у вигляді розподіленого навантаження. Інтенсивність цих внутрішніх сил в деякій т. M перетину mn з нормаллю ν

називається напруженням \vec{P}_ν в т. M по перетину з нормаллю ν . Напруження є функцією точки M і залежить від нормалі ν цього перетину.

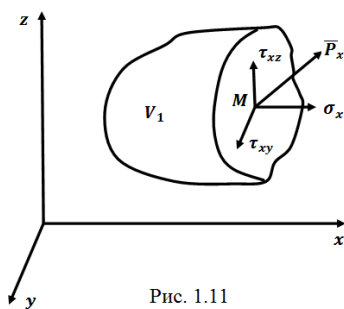


Рис. 1.11

Нехай перетин mn такий, що нормаль спрямована вздовж вісі Ox . Тоді напруження по цьому перетину в т. M буде \vec{P}_x . Розвинемо його на нормальну складову σ_x і дві дотичні складові τ_{xy} і τ_{xz} , які лежать у площині перетину (рис.1.11). Тоді можна записати $\vec{P}_x = \sigma_x \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k}$, де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти координатних вісей. Розглядаючи перетини з

нормальми, спрямованими вздовж вісей Oy і Oz , отримаємо

$$\vec{P}_y = \tau_{yx} \vec{i} + \sigma_y \vec{j} + \tau_{yz} \vec{k}, \quad \vec{P}_z = \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j} + \sigma_z \vec{k}.$$

Отримані 9 складових напружень за трьома взаємно перпендикулярними перетинами є компонентами тензора напружень у даній точці, який запишемо у вигляді

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Перший індекс у компонент тензора напружень вказує вздовж якої вісі спрямована нормаль, а другий – вздовж якої вісі спрямоване саме напруження. При цьому, так як нормальне напруження спрямоване вздовж нормалі, то обидва індекси співпадають і ми обмежимося тим, що будемо вказувати тільки один індекс. Наприклад, σ_y є нормальне напруження по перерізу з нормаллю вздовж вісі Oy , а τ_{yz} є дотичне напруження за тим самим напрямком, спрямоване вздовж вісі Oz .

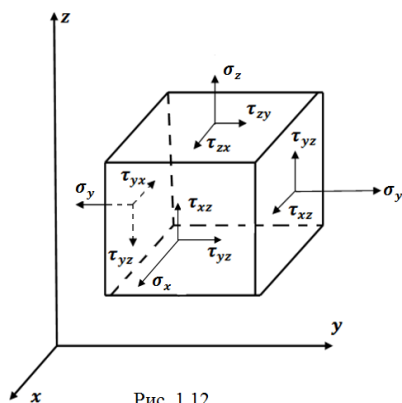


Рис. 1.12

Введемо наступне правило знаків для напружень

- Нормальне напруження вважати додатнім, якщо воно розтягує матеріал і від'ємним, якщо стискає;
- Якщо зовнішня нормаль співпадає за напрямком з відповідною віссю, то дотичне напруження додатне при співпадінні за напрямком з відповідною віссю, якщо ж напрямок зовнішньої нормалі протилежне напрямку вісі, то і додатній напрямок дотичного напруження протилежний напрямку відповідної вісі (на рис.1.12 всі прикладені по гранях напруження додатні, зверніть увагу на їхній напрямок).

Покажемо, що тензор напружень повністю визначає напруження у даній точці, тобто за ним можна визначити напруження у даній точці за будь-яким перерізом. Нехай у точці O відомий тензор напружень, і треба визначити напруження за деяким перерізом, який проходить через точку O і який має нормаль ν . Розглянемо площину ABC , яка паралельна проведеному перерізу і знаходиться на малій відстані від т. O . Ця площина разом із площинами AOC , AOB , COB , що паралельні координатним вісям, вирізає з тіла малий тетраедр $ABCO$ (рис.1.13).

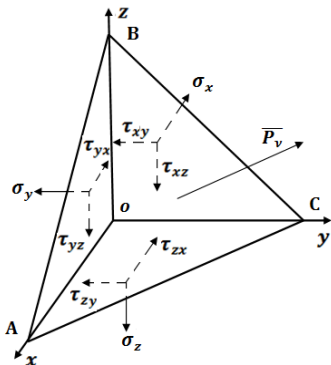


Рис. 1.13

Згідно з гіпотезою суцільності та неперервності, напруження у тілі будуть неперервними і напруження на майданчику ABC прямує до напруження за шуканим перерізом при зменшенні розмірів тетраедра. Далі, напруження на гранях тетраедра змінюються незначно внаслідок малості цих граней, а тому можна враховувати, що вони там розподілені рівномірно. Звідки сили, які діють по гранях тетраедра, дорівнюють добутку

відповідній компоненті тензора напружень в т. O на площу відповідній грані. Нехай S площа грані ABC , а $l = \cos(\nu, x)$, $m = \cos(\nu, y)$, $n = \cos(\nu, z)$ – направляючі косинуси

нормалі ν , тоді $S_{AOB} = S \cdot m$, $S_{BOC} = S \cdot l$, $S_{AOC} = S \cdot n$. Оскільки тіло знаходиться у стані рівноваги, то і будь-яка його частина буде знаходитися у рівновазі, у тому числі і тетраедр, який ми розглядаємо. Звідки, суми проекцій усіх сил, які діють на тетраедр, на кожну з вісей дорівнюють нулю. Запишемо, наприклад, рівність нулю суми проекцій усіх сил на вісь Ox

$$P_{ix} \cdot S - \tau_{yx} \cdot S \cdot m - \sigma_x \cdot S \cdot l - \tau_{zx} \cdot S \cdot n = 0.$$

Тут перший доданок визначає проекцію сили, яка діє на грань ABC , для чого була взята проекція P_{ix} на вісь Ox і помножена на площу S її розподілу. Решту доданків отримаємо аналогічно. Скорочуючи отриману рівність на S і поступаючи таким чином із сумами проекцій на вісі Oy і Oz отримаємо рівності, які зв'язують проекції напруження \vec{P}_ν із компонентами тензора напружень і направляючими косинусами нормалі

$$\begin{aligned} P_{ix} &= \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n \\ P_{iy} &= \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n \\ P_{iz} &= \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + \sigma_z \cdot n \end{aligned} \quad (1.1)$$

Відмітимо, що прикладені до граней сили моментів не дають, тому моментні умови рівноваги виконуються автоматично.

Після введення тензора напружень ми можемо дати друге формулювання основної задачі механіки пружного середовища, яка полягає у знаходженні тензора напружень у кожній точці тіла, за заданим зовнішнім навантаженням. Далі ми покажемо, що напруження у тілі можна визначити, якщо знати його переміщення, а потім з розв'язку основної задачі у першому формулюванні, буде слідувати її розв'язок у другому.

1.4. Диференціальні рівняння рівноваги і закон взаємності дотичних напружень.

Розглянемо як змінюються напруження при зміні положення точки тіла і отримаємо диференціальні рівняння рівноваги. Для того, щоб вивести диференціальні рівняння рівноваги, у подальших міркуваннях нам знадобиться наступна інформація. Нехай нам відомо значення функції $f(x, y, z)$ в т. A , тобто $f(A)$, і треба знайти її значення в т. B з координатами $(x + dx, y + dy, z + dz)$. Якщо дана функція має похідну в т. A і відстань між точками мала, то за формулою Тейлора наближено отримаємо.

$$f(B) = f(A) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_A dx + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_A dy + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_A dz.$$

Якщо при переході від точки A до точки B змінюється тільки змінна x , то формула набуває вигляду

$$f(B) = f(A) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_A dx.$$

Для отримання диференціальних рівнянь рівноваги виділимо всередині тіла малий прямокутний паралелепіпед з ребрами dx , dy , dz паралельними координатним вісям, який як і усе тіло, знаходиться у стані рівноваги. При переході із однієї паралельної грані

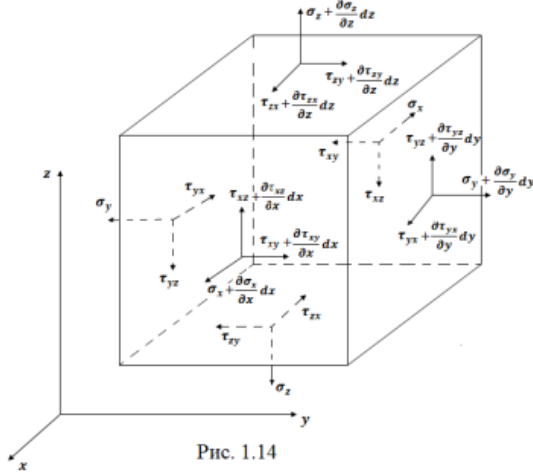


Рис. 1.14

на іншу компоненти тензора напружень отримують приріст, пов'язаний із приростом відповідної координати (рис.1.14). До тіла можуть бути прикладені об'ємні навантаження з інтенсивностями X , Y , Z вздовж координатних вісей. В силу малості паралелепіпеда і неперервності напружень рахуємо, що сили, прикладені до граней, дорівнюють добутку відповідній компоненті напружень на площу даної грані.

Об'ємні навантаження дадуть сили, які дорівнюють добутку їх відповідної компоненти на об'єм паралелепіпеда. Проектуючи усі сили, прикладені до нього на вісь Ox , отримаємо

$$-\sigma_x dx dz + (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dy dz - \tau_{yx} dx dz + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy) dx dz - \tau_{zx} dx dy +$$

$$+(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz) dx dy + X dx dy dz = 0$$

$$\text{Звідки } \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

Проектуючи на дві інші вісі, приходимо до диференціальних рівнянь рівноваги

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Прирівнявши до нуля суму моментів відносно вісі ox , отримаємо:

$$(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy) dx dy dz - (\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz) dx dy dz = 0.$$

Звідки, нехтуючи нескінченно малими четвертого порядку, отримаємо $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Прирівнюючи до нуля суми моментів відносно вісей Oy і Oz , отримаємо ще дві рівності $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, які разом із попереднім дають закон взаємності або парності дотичних напружень. Цей закон скорочує кількість шуканих компонент тензора напружень з 9 до 6, а саме, 3 нормальних і 3 дотичних напруження.

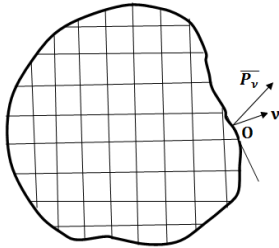


Рис. 1.15

Будь-яке тіло площинами, паралельними координатним площинам, можна розбити на подібні паралелепіпеди (рис.1.15). Диференціальні рівняння рівноваги (1.2) гарантують рівновагу будь-якого елемента усередині тіла, але вони не гарантують рівноваги контурних елементів. Для того, щоб записати умови рівноваги для будь-якого контурного елемента, розглянемо довільну т. O поверхні тіла. Нехай зовнішня

нормаль до тіла у точці O буде \vec{v} , а інтенсивність поверхневого навантаження у цієї точці – \vec{P}_v . Якщо елементи, на які розбивається тіло, нескінченно малі, то частина поверхні в околі точці O ми можна замінити дотичною площиною. В результаті приходимо до необхідності розглянути умови рівноваги тетраедра (рис. 1.13); вони були отримані раніше, і мають вигляд (1.1). Таким чином, виконання умов (1.1) на поверхні тіла гарантує рівновагу контурного елемента тіла у довільній точці його поверхні.

1.5. Деформації і переміщення.

В результаті дії навантаження, тіло деформується і його точки переміщуються. Компоненти переміщень вздовж вісей Ox , Oy і Oz позначимо через u , v і w відповідно. Відповідно до першого формулювання основної задачі, якщо знати три переміщення, у будь-якій точці тіла, то можна описати його деформівний стан. Але останнє можна описати і іншим шляхом. Розіб'ємо тіло на елементарні паралелепіпеди площинами, які паралельні координатним площинам. В результаті деформації всього тіла продеформується і кожний паралелепіпед. Якщо ми будемо знати деформації кожного елементарного паралелепіпеда, то складаючи з них єдине тіло, ми знайдемо його деформівний стан. Тому нам необхідно з'ясувати, якою мінімальною кількістю величин можна описати довільну деформацію елементарного паралелепіпеда. Вочевидь, при довільній деформації, ребра паралелепіпеда змінять свою довжину і щоб описати ці зміни, достатньо знати відносні подовження його ребер. Позначимо відносне подовження ребра, паралельного до деформації вісі Ox , через ϵ_x , а через ϵ_y і ϵ_z відносні подовження ребер, які до деформації спрямовані відповідно вздовж вісей Oy і Oz . Окрім зміни довжин ребер паралелепіпеда будуть змінюватися і кути між ними. Для того, щоби описати ці зміни, введемо кутові деформації γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} , які характеризують зміни первісно прямих

кутів між ребрами, спрямованими до деформації вздовж вісей Ox і Oy , Ox і Oz , Oy і Oz відповідно. З визначення кутових деформацій випливає, що $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$. Знаючи введені шість величин ми можемо повністю описати деформацію елементарного паралелепіпеда. Тому сукупність цих шести деформацій називається тензором деформацій

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Тензор деформації у заданій точці визначає деформації елементарного паралелепіпеда, який взят в околі цієї точки. Встановимо зв'язок між деформаціями елементарного паралелепіпеда у точці і його переміщеннями, для чого розглянемо довільний паралелепіпед з ребрами dx , dy і dz , паралельними координатним вісям (рис.1.16).

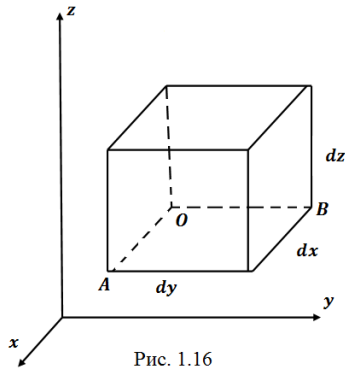


Рис. 1.16

Розглянемо його грань AOB , яка була паралельна до деформації площини xOy . У процесі деформації т. O перейде у т. O' , т. A в т. A' і т. B в т. B' . Нехай переміщення т. O – u, v, w (рис.1.17). Переміщення т. A у напрямку вісі Ox буде

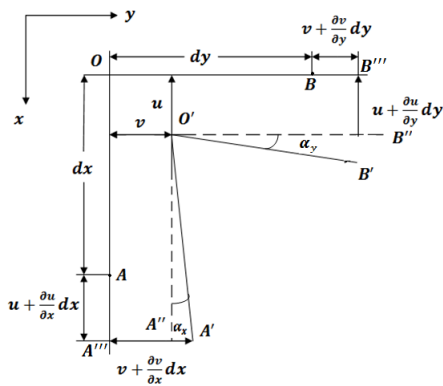


Рис. 1.17

дорівнювати $AA'' = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$, звідси подовження елемента OA довжини dx , яке викликано деформацією, дорівнюватиме різниці між переміщеннями кінців цього елемента, тобто, дорівнює $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u = \frac{\partial u}{\partial x} dx$. Тоді відносно

подовження $\varepsilon_x = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$. Аналогічно отримаємо

лінійні деформації $\varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ і $\varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}$.

Розглянемо зміну прямого кута між ребрами OA і OB , тобто кутову деформацію γ_{xy} . Позначимо через α_x і α_y кути між старими і новими напрямками OA і OA' , OB і OB' . Беручи до уваги, що деформації малі, кут α_x можна замінити його тангенсом, тобто

$$\alpha_x = \frac{A'A''}{O'A''} = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v}{dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}.$$

Враховуючи деформацію $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ малою у порівнянні з одиницею, отримаємо $\alpha_x = \frac{\partial v}{\partial x}$.

Аналогічно знайдемо, що $\alpha_y = \frac{\partial u}{\partial y}$. Таким чином кутова деформація $\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$.

Аналізуючи подібним чином кути між іншими ребрами паралелепіпеда, отримаємо співвідношення, які зв'язують інші кутові деформації з переміщеннями

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}.$$

В результаті приходимо до співвідношень Коші

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (1.3)$$

які встановлюють зв'язок між переміщеннями та деформаціями.

У співвідношення Коші входять три переміщення та шість деформацій. Якщо задані переміщення, то по ним легко та однозначно знаходяться деформації. Розглянемо обернену задачу – по заданим шести деформаціям необхідно знайти три переміщення. З математичної точки зору задача зводиться до розв'язання системи шести диференціальних рівнянь відносно трьох невідомих. Зрозуміло, що для розв'язування такої задачі необхідні додаткові умови. З механічної точки зору деформації елементарних паралелепіпедів, на які розбивається тіло, неможливо задавати довільно, інакше з них неможливо буде скласти суцільне тіло.

Додаткові обмежування були сформульовані Сен-Венаном і носять назву умов суцільності або сумісності деформацій. Вони достатньо громіздкі і ми для прикладу одержимо тільки одне з них. Візьмемо, наприклад, співвідношення

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

та продиференціюємо його по x та по y

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

Маючи на увазі, що $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ і $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, получимо першу умову

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}. \quad (1.4)$$

Так само доводяться і п'ять інших умов сумісності деформацій, які є необхідними та достатніми умовами інтегрування співвідношень Коші.

1.6. Закон Гука.

Цей закон встановлює зв'язок між компонентами тензорів напружень і деформацій і базується на формулі Гука. Розглянемо стрижень довжини l , один кінець якого закріплено, а до другого прикладене рівномірно розподілене навантаження величини P (рис.1.18а).

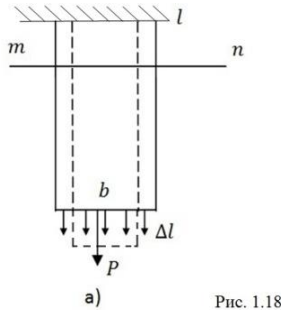
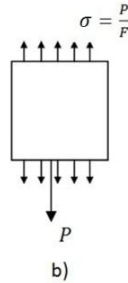


Рис. 1.18



Формула Гука встановлює зв'язок між подовженням

стрижня Δl і величиною навантаження P : $\Delta l = \frac{Pl}{EF}$

, де F – площа поперечного перерізу стрижня, а стала E називається модулем Юнга або модулем пружності і залежить від матеріалу стрижня. Напруження у стрижні будь де є постійним і за будь-

якого перерізу mn (рис.1.18б) дорівнює $\sigma = \frac{P}{F}$. Відносне подовження стрижня (лінійна

деформація) визначається як $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$. Звідси та з формули Гука отримаємо наступний

зв'язок між деформацією стрижня і напруженням у ньому: $\sigma = E\varepsilon$.

Стрижень, який ми розглядаємо, під дією навантаження не тільки подовжується, але й його ширина b зменшується на деяку величину Δb , і ми можемо підрахувати

відносне зменшення ширини стрижня $\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}$. За допомогою експерименту показано, що

величина $\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$ для даного матеріалу є сталою величиною і називається коефіцієнтом

Пуассона даного матеріалу. Для ізотропних матеріалів величини E і μ повністю визначають їх пружні властивості. Використовуючи визначення коефіцієнта Пуассона і

зв'язок між ε і σ отримаємо, що $\varepsilon' = -\frac{\mu}{E}\sigma$.

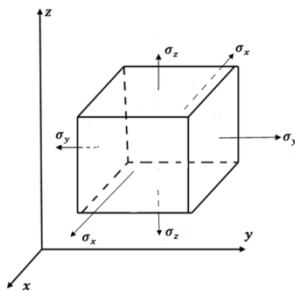


Рис. 1.19 а

Виріжемо із тіла елементарний паралелепіпед з гранями, паралельними координатним площинам. Нехай до кожної грані прикладене розтягуюче нормальне напруження (1.19а). Лінійна деформація паралелепіпеда вздовж вісі Ox складається з лінійних деформацій, які спричиняються напруженнями: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$:

$$\varepsilon = \varepsilon(\sigma_x) + \varepsilon(\sigma_y) + \varepsilon(\sigma_z).$$

Відповідно до попередніх міркувань

$$\varepsilon(\sigma_x) = \frac{1}{E}\sigma_x, \quad \varepsilon(\sigma_y) = -\frac{\mu}{E}\sigma_y, \quad \varepsilon(\sigma_z) = -\frac{\mu}{E}\sigma_z, \quad \text{звідки } \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)).$$

Аналогічно визначаються і дві інші лінійні залежності між лінійними деформаціями і нормальними напруженнями

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)), \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)).$$

Можна показати, що в силу лінійного зв'язку між нормальними напруженнями і лінійними деформаціями слідує пряма пропорційність між дотичними напруженнями і відповідними кутовими деформаціями.

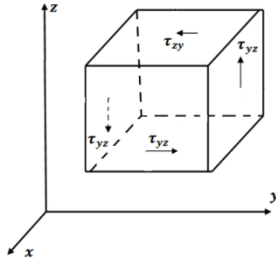


Рис. 1.19 б

Наприклад, з рис. 1.19б бачимо, що напруження τ_{yz} викликає тільки деформацію γ_{yz} . Коефіцієнт пропорційності між ними називається модулем зсуву $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$. В результаті приходимо до співвідношень,

які зв'язують компоненти тензорів напружень і деформацій та називаються законом Гука

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)), \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y))$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}, \quad \gamma_{xz} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xz}, \quad \gamma_{yz} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{yz} \quad (1.5)$$

Співвідношення (1.5) можна розв'язати відносно напружень. Для цього складемо перші три з них

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 2\mu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)),$$

$$\text{звідки } \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{E}{1-2\mu}\theta, \quad \text{де } \theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Виразимо $\sigma_y + \sigma_z = \frac{E}{1-2\mu}\theta - \sigma_x$ та підставимо в перше співвідношення закону Гука

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\left(\frac{E}{1-2\mu}\theta - \sigma_x\right)\right), \quad \text{звідки } \sigma_x = \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_x + \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\theta.$$

Враховуючи, що $\frac{E}{1+\mu} = 2G$ та позначаючи $\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$ одержимо

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\theta.$$

Аналогічно знаходяться ще два співвідношення

$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\theta \text{ та } \sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\theta.$$

Таким чином закон Гука можна записати у наступній формі

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x, \quad \sigma_y = \lambda\theta + 2G\varepsilon_y, \quad \sigma_z = \lambda\theta + 2G\varepsilon_z \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \end{aligned} \quad (1.6)$$

Коефіцієнти λ і G називаються коефіцієнтами Ламе і зв'язані із модулем пружності і коефіцієнтом Пуассона залежностями

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (1.7)$$

З'ясуємо зміст величини $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, для чого розглянемо елементарний паралелепіпед, до якого прикладені нормальні розтягуючі напруження (рис 1.19а). У результаті деформації об'єм паралелепіпеду V зростає на величину ΔV і відносне змінення об'єму (об'ємне розширення) можна знайти так

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{(a + \Delta_a)(b + \Delta_b)(c + \Delta_c) - abc}{abc}$$

де Δ_a , Δ_b , Δ_c приріст довжин a , b , c ребер паралелепіпеду. Після ділення правої частини почленно на знаменник та враховуючи, що $\varepsilon_x = \frac{\Delta_a}{a}$, $\varepsilon_y = \frac{\Delta_b}{b}$, $\varepsilon_z = \frac{\Delta_c}{c}$ отримаємо

$$\frac{\Delta V}{V} = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1.$$

Розкриваючи дужки і нехтую добутками і степенями деформацій в силу їх малості, знайдемо, що об'ємне розширення $\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \theta$. Замінюючи тут деформації через напруження за формулам (1.4), отримаємо

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Так як до паралелепіпеду прикладені додатні (розтягуючі напруження), то і об'ємне розширення θ буде додатнім, а тому коефіцієнт Пуассона зобов'язан здовільняти нерівності $\mu < \frac{1}{2}$. З співвідношень (1.7) буде впливати, що коефіцієнти Ламе λ і G є додатніми числами.

1.7. Повна система рівнянь теорії пружності та основні граничні задачі для неї. Теорема єдності.

Ми отримали повну систему рівнянь теорії пружності, яка складається з трьох диференціальних рівнянь рівноваги (1.2), шести співвідношень Коші (1.3) і шести співвідношень закону Гука у формі відносних деформацій (1.5) або відносно напружень (1.6). Невідомими у цій системі є 15 величин: 6 напружень, 6 деформацій і 3 переміщення. До цієї системи рівнянь необхідно додати ті або інші граничні умови на поверхні тіла. В залежності від граничних умов задачі теорії пружності розділяються на I, II і III основні задачі. Під I основною задачею теорії пружності розуміється така задача, у якій по заданим на границі навантаженням, необхідно визначити напруження у тілі. II основною задачею є задача, де по заданих на границі переміщеннях, необхідно визначити напруження у тілі (у тому числі і на границі). Під III основною задачею розуміється задача, в якій на одній частині тіла задані навантаження, а на іншій частині – переміщення і необхідно визначити напружений стан тіла.

Доведемо єдність розв'язку основних задач. Оскільки I та II основні задачі є частковими випадками III, то проведемо доведення для III основної задачі.

Нехай тіло, яке розглядається, займає об'єм V , на частині S_1 його поверхні S задані переміщення, а на частині, що лишилася, S_2 – напруження

$$u|_{S_1} = f_1, v|_{S_1} = f_2, w|_{S_1} = f_3, P_{vx}|_{S_2} = \varphi_1, P_{vy}|_{S_2} = \varphi_2, P_{vz}|_{S_2} = \varphi_3 \quad (1.8)$$

Розглянемо поверхневий інтеграл

$$J = \iint_S (uP_{vx} + vP_{vy} + wP_{vz}) ds \quad (1.9)$$

Використовуючи співвідношення (1.1) запишемо його у вигляді

$$\begin{aligned} J &= \iint_S \left[u(\sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n) + v(\tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n) + w(\tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n) \right] ds = \\ &= \iint_S \left[(u\sigma_x + v\tau_{xy} + w\tau_{xz})l + (u\tau_{xy} + v\sigma_y + w\tau_{yz})m + (u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\sigma_z)n \right] ds \end{aligned}$$

Враховуючи, що l , m і n є направляючими косинусами нормалі до поверхні S , застосуємо до останнього інтегралу формулу Остроградського

$$\iint_S (Pl + Qm + Rn) ds = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

Тоді

$$\begin{aligned}
J &= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (u\sigma_x + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (u\tau_{xy} + v\sigma_y + w\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\sigma_z) \right] dV = \\
&= \iiint_V \left[\frac{\partial u}{\partial x} \sigma_x + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \tau_{xy} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \tau_{xz} + \frac{\partial v}{\partial y} \sigma_y + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \tau_{yz} + \frac{\partial w}{\partial z} \sigma_z + \right. \\
&\quad \left. + u \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + w \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \right] dV
\end{aligned}$$

Використовуючи рівняння рівноваги (1.2) і співвідношення Коші (1.3), перетворимо цей інтеграл до вигляду

$$\begin{aligned}
J &= \iiint_V (\varepsilon_x \sigma_x + \gamma_{xy} \tau_{xy} + \gamma_{xz} \tau_{xz} + \varepsilon_y \sigma_y + \gamma_{yz} \tau_{yz} + \varepsilon_z \sigma_z - uX - vY - wZ) dV = \\
&= - \iiint_V (uX + vY + wZ) dV + 2 \iiint_V W dV
\end{aligned} \tag{1.10}$$

де величина $W = \frac{1}{2} (\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + \gamma_{xy} \tau_{xy} + \gamma_{xz} \tau_{xz} + \gamma_{yz} \tau_{yz})$ називається пружним потенціалом.

Замінімо у виразі для пружного потенціалу напруження через деформації, використовуючи закон Гука (1.6)

$$\begin{aligned}
2W &= \varepsilon_x (\lambda \theta + 2G \varepsilon_x) + \varepsilon_y (\lambda \theta + 2G \varepsilon_y) + \varepsilon_z (\lambda \theta + 2G \varepsilon_z) + G \gamma_{xy}^2 + G \gamma_{xz}^2 + G \gamma_{yz}^2 = \\
&= \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + 2G (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + G (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)
\end{aligned}$$

Так як сталі Ламе λ і G додатні, то пружний потенціал W є додатньо-визначена квадратична форма від деформацій. Тобто $W \geq 0$ і $W = 0$ тоді і тільки тоді, коли усі деформації, а отже і напруження, дорівнюють нулю.

Припустимо зараз, що система рівнянь теорії пружності при одних і тих самих граничних умовах (1.8) має два розв'язки $\varepsilon'_x, \dots, \sigma'_x, \dots, w'$ і $\varepsilon''_x, \dots, \sigma''_x, \dots, w''$. Різниця цих розв'язків $\varepsilon_x = \varepsilon'_x - \varepsilon''_x, \dots, \sigma_x = \sigma'_x - \sigma''_x, \dots, w = w' - w''$ задовольняє однорідній системі рівнянь теорії пружності ($X = Y = Z = 0$) з однорідними граничними умовами (1.8) ($f_1 = f_2 = f_3 = 0, \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$). Тоді з виразу (1.10) отримаємо, що

$$J = 2 \iiint_V W dV.$$

З іншого боку з виразу (1.9) і однорідних граничних умов (1.8) отримаємо, що

$$J = \iint_{S_1} (0 \cdot P_{vx} + 0 \cdot P_{vy} + 0 \cdot P_{vz}) ds + \iint_{S_2} (u \cdot 0 + v \cdot 0 + w \cdot 0) ds = 0$$

Таким чином $\iiint_V W dV = 0$, звідки $W = 0$.

А це можливо лише в тому випадку, коли

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0, \text{ а тоді і } \sigma_x = \sigma_y = \dots = \tau_{yz} = 0.$$

Таким чином ми отримали, що $\varepsilon'_x = \varepsilon''_x, \dots, \sigma'_x = \sigma''_x, \dots, \tau'_{yz} = \tau''_{yz}$ і розв'язок розглянутої граничної задачі єдиний (напружено-деформований стан визначається єдиним чином).

Що стосується переміщень, то з рівності нулю деформацій слідує, що переміщення сталі, тобто переміщення u' і u'' , v' і v'' , w' і w'' відрізняються на сталі, які визначають переміщення усього тіла V як абсолютно жорсткого тіла та ні впливають на напружено-деформований стан в цьому тілі.

1.8. Приведення рівнянь теорії пружності до системи трьох рівнянь Ламе. Врахування сил інерції та температури.

Отриману вище систему рівнянь теорії пружності можна звести до трьох рівнянь відносно переміщень. Для цього виразимо у рівняннях рівноваги (1.2) напруження через деформації використовуючи закон Гука (1.6)

$$2G \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + G \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$$G \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + 2G \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} + G \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial z} + Y = 0$$

$$G \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} + G \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} + 2G \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} + Z = 0$$

Далі деформації виразимо через переміщення за допомогою співвідношень Коші (1.3)

$$2G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + X = 0$$

$$2G \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) + Y = 0$$

$$2G \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + Z = 0$$

або

$$G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + X = 0$$

$$G\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} + G \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + Y = 0$$

$$G\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} + G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + Z = 0$$

Використовуючи оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ та позначення $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$

приходимо до трьох рівнянь Ламе, які містять тільки переміщення тіла

$$G\Delta u + (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x} + X = 0$$

$$G\Delta v + (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial y} + Y = 0 \quad (1.11)$$

$$G\Delta w + (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial z} + Z = 0$$

Якщо кожне з рівнянь системи (1.11) розділити на G та взяти на увагу, що

$$\frac{\lambda + G}{G} = \frac{\lambda}{G} + 1 = \frac{\mu E \cdot 2(1 + \mu)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)E} + 1 = \frac{2\mu}{1 - 2\mu} + 1 = \frac{1}{1 - 2\mu},$$

тоді позначаючи $\mu_0 = \frac{1}{1 - 2\mu}$, систему рівнянь Ламе можна записати у вигляді

$$\Delta u + \mu_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{X}{G} = 0$$

$$\Delta v + \mu_0 \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{Y}{G} = 0$$

$$\Delta w + \mu_0 \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{Z}{G} = 0$$

Розглянуті раніше рівняння теорії пружності відповідали випадку, коли тіло знаходиться у рівновазі і відсутній рух, тобто, коли усі величини не залежать від часу. Для врахування залежності від часу слід скористатися принципом Даламбера, відповідно до якого, щоб перейти від рівнянь рівноваги до рівнянь руху, необхідно додати сили інерції. Виділимо у тілі елементарний паралелепіпед з ребрами dx , dy , dz (рис.1.16). Сила інерції є об'ємним навантаженням, і тому її величина може бути обчислена як добуток інтенсивності цього навантаження на об'єм його розподілення. Звідси на елементарний паралелепіпед у

напрямку вісі Ox буде діяти сила інерції $-\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} dx dy dz$, де ρ - густина матеріалу тіла.

Таким чином, інтенсивності сил інерції вздовж вісей Ox , Oy і Oz будуть дорівнювати відповідно: $-\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$, $-\rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$, $-\rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$. Серед рівнянь теорії пружності об'ємні сили

фігурують тільки в рівняннях рівноваги. Звідси, за принципом Даламбера, для врахування сил інерції необхідно змінити тільки рівняння рівноваги (1.2), замінив у них X , Y та Z на

$X - \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$, $Y - \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$ та $Z - \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ відповідно. Зміняться також і рівняння Ламе (1.11), які

виведені з рівнянь рівноваги. Вони в даному випадку примуть вигляд:

$$\begin{aligned} G\Delta U + (\lambda + G)\frac{\partial \theta}{\partial x} + X &= \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ G\Delta V + (\lambda + G)\frac{\partial \theta}{\partial y} + Y &= \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ G\Delta W + (\lambda + G)\frac{\partial \theta}{\partial z} + Z &= \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.12)$$

При цьому усі величини вже залежать від чотирьох аргументів – трьох просторових координат x, y, z і часу t .

Врахуємо зараз ефекти, які спричиняються зміною температури тіла. Розглянемо спочатку стрижень довжини l . При зміні його температури на величину T його довжина змінюється на Δl . Відповідно до закону Дюгамеля-Неймана відносно подовження стрижня пропорційне зміні його температури

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \alpha T$$

де α – коефіцієнт лінійного розширення. Якщо ми зараз розглянемо деформації елементарного паралелепіпеду, то його ребра отримають додаткові лінійні деформації, які дорівнюють αT . Це відобразиться на формулюванні закону Гука, який замість (1.5) прийме вигляд

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha T, \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha T, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x)] + \alpha T. \end{aligned}$$

Кутових деформацій при зміні температури не буде, це означає, що співвідношення в законі Гука для кутових деформацій не зміняться. Розв'язуючи отримані формули відносно напружень отримаємо:

$$\sigma_x = \lambda \theta + 2G\varepsilon_x - (3\lambda + 2G)\alpha T, \quad \sigma_y = \lambda \theta + 2G\varepsilon_y - (3\lambda + 2G)\alpha T,$$

$$\sigma_z = \lambda\theta + 2G\varepsilon_z - (3\lambda + 2G)\alpha T$$

Використовуючи ці співвідношення при виводі рівнянь Ламе, отримаємо їх з врахуванням сил інерції і температури

$$\begin{aligned} G\Delta U + (\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial x} + X &= \rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + (3\lambda + 2G)\alpha\frac{\partial T}{\partial x} \\ G\Delta V + (\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial y} + Y &= \rho\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (3\lambda + 2G)\alpha\frac{\partial T}{\partial y} \\ G\Delta W + (\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial z} + Z &= \rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + (3\lambda + 2G)\alpha\frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.13)$$

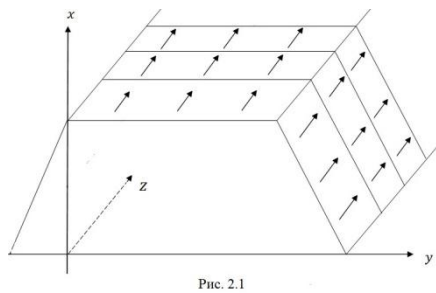
При постановці граничних задач для таких рівнянь необхідно окрім граничних умов задавати ще й початкові умови: температуру і переміщення у початковий момент часу.

2. Двовимірні задачі теорії пружності.

Розв'язування задач теорії пружності для загального випадку тримірних тіл пов'язано з великими математичними труднощами. У зв'язку з цим розглядають такі часткові випадки при яких напружно-деформовний стан залежить лише від двох змінних, наприклад, від x та y . Ці часткові випадки реалізуються для пружних тіл певної форми та при певному зовнішньому навантаженні. Розглянемо постановку деяких таких задач.

2.1. Деформація поздовжнього зсуву (антиплоска задача теорії пружності).

Розглянемо нескінченне пружне тіло, обмежене довільною циліндричною поверхнею з направляючою, яка паралельна вісі Oz . Нехай до тіла прикладене зовнішнє навантаження, направлене вздовж вісі Oz і яке не залежить від змінної z (рис.2.1).



Тоді тіло, яке ми розглядаємо, можна розбити на диски одиничної товщини площинами, які перпендикулярні до вісі Oz . Кожний такий диск деформується однаковим чином і, отже, усі переміщення і напруження не залежать від z . Крім того, переміщення вздовж вісей Ox та Oy , вочевидь, будуть малими і ми будемо вважати, що вони дорівнюють нулю, тобто $u = v = 0$, $w = w(x, y)$. З трьох рівнянь Ламе (1.10) перші два перетворюються на тотожність, а останнє приймає вигляд

$$G\Delta w + Z = 0 \quad \text{або} \quad \Delta w = -\frac{Z}{G} \quad (2.1)$$

З співвідношень Коші (1.3) отримаємо, що

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Звідки, за законом Гука (1.6), будуть відмінні від нуля тільки два напруження

$$\tau_{xz} = G \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = G \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.2)$$

Такий стан тіла називається деформацією поздовжнього зсуву або антиплоскою задачею теорії пружності. Ця задача представляє з себе найбільш просту задачу з двовимірних задач теорії пружності, так як, тут відмінні від нуля тільки одне переміщення і два напруження, і її розв'язання зводиться до розв'язку рівняння Пуассона (2.1) або Лапласа (при $Z = 0$) при відповідних граничних умовах. На границі тіла може бути задано або переміщення $w(x, y)$ або дотичне напруження.

Приклад 1. Розглянемо пружне тіло у вигляді нескінченного бруса $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -\infty < z < \infty$. Нехай краї $x = 0$ та $y = 0$ нерухомо закріплені, край

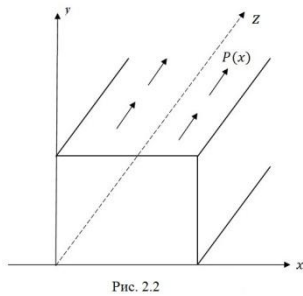


Рис. 2.2

$x = a$ вільний від напружень, а до краю $y = b$ прикладено зсувуюче дотичне напруження інтенсивності $p(x)$ (рис.2.2).

Тоді тіло буде знаходитися у стані антиплоскої деформації і задача зводиться до розв'язування рівняння Лапласа

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \quad (2.3)$$

з граничними умовами

$$w|_{x=0} = 0; \tau_{xz}|_{x=a} = G \frac{\partial w}{\partial x}|_{x=a} = 0 \quad (2.4)$$

$$w|_{y=0} = 0; \tau_{yz}|_{y=b} = G \frac{\partial w}{\partial y}|_{y=b} = p(x) \quad (2.5)$$

Через те, що рівняння однорідне та однорідні граничні умови за змінною x , то для розв'язування цієї задачі можна використати метод розділення змінних

$$w(x, y) = X(x) \cdot Y(y).$$

Розділив змінні у рівнянні (2.3), получимо два звичайних диференціальних рівняння

$$-X''(x) = \lambda X(x) \quad \text{та} \quad Y''(y) = \lambda Y(y), \quad \lambda = \text{const} \quad (2.6)$$

Розділив змінні у граничних умовах (2.4), получимо $X(0) = 0, X'(a) = 0$.

Таким чином ми прийшли до задачі Штурма-Лиувілля

$$-X''(x) = \lambda X(x), 0 \leq x \leq a$$

$$X(0) = 0, X(a) = 0.$$

Її розв'язок має вигляд $X_n(x) = \sin \mu_n x$, $\mu_n = \frac{\pi}{2a}(2n+1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Загальний розв'язок другого з рівнянь (2.6) буде мати вигляд

$$Y_n(y) = C_n \operatorname{ch} \mu_n y + D_n \operatorname{sh} \mu_n y.$$

Таким чином побудована рахована множина розв'язків

$$w_n(x, y) = (C_n \operatorname{ch} \mu_n y + D_n \operatorname{sh} \mu_n y) \sin \mu_n x,$$

які задовольняють рівнянню Лапласа та граничним умовам за змінною x . Загальний розв'язок нашої крайової задачі будемо шукати у вигляді

$$w(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n \operatorname{ch} \mu_n y + D_n \operatorname{sh} \mu_n y) \sin \mu_n x.$$

Коефіцієнти C_n та D_n знайдемо з крайових умов (2.5)

$$w|_{y=0} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin \mu_n x = 0$$

$$\tau_{yz}|_{y=b} = G \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n (C_n \operatorname{sh} \mu_n b + D_n \operatorname{ch} \mu_n b) \sin \mu_n x = p(x).$$

Враховуючи, що система функцій $\{\sin \mu_n x\}$ є ортогональною та повною на $[0; a]$ з нормою $\|\sin \mu_n x\|^2 = \frac{a}{2}$, на ці рівності можна дивитися як на розкладення у ряд Фур'є правих частій цих рівностей, звідки їх коефіцієнти Фур'є

$$C_n = 0, G \mu_n (C_n \operatorname{sh} \mu_n b + D_n \operatorname{ch} \mu_n b) = p_n, \text{ де } p_n = \frac{2}{a} \int_0^a p(x) \sin \mu_n x dx.$$

$$\text{Таким чином } C_n = 0, D_n = \frac{p_n}{G \mu_n \operatorname{ch} \mu_n b}.$$

Тоді розв'язком розглянутої задачі буде функція

$$w(x, y) = \frac{1}{G} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n sh \mu_n y}{\mu_n ch \mu_n b} \sin \mu_n x.$$

За формулами (2.2) можна знайти напруження у тілі

$$\tau_{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n sh \mu_n y}{ch \mu_n b} \cos \mu_n x, \tau_{yz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n ch \mu_n y}{ch \mu_n b} \sin \mu_n x.$$

Приклад 2. Розглянемо пружне тіло у вигляді нескінченної полоси $-\infty < x < +\infty, 0 \leq y \leq h, -\infty < z < \infty$. Нехай край $y = 0$ нерухомо закріплене, а до краю $y = h$ прикладено зсувуюче дотичне напруження інтенсивності $p(x)$ (рис.2.3). В цьому випадку тіло буде знаходитися у стані антиплоскої деформації. Таким чином, треба розв'язати рівняння Лапласа

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, -\infty < x < +\infty, 0 \leq y \leq h \quad (2.7)$$

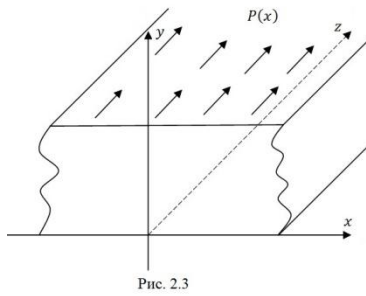


Рис. 2.3

з граничними умовами

$$w|_{y=0} = 0; \tau_{yz}|_{y=h} = G \frac{\partial w}{\partial y}|_{y=h} = p(x) \quad (2.8)$$

та умовами на нескінченності

$$w, \frac{\partial w}{\partial x} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \pm\infty. \quad (2.9)$$

Для розв'язка цієї задачі доцільно використати інтегральне перетворення Фур'є за змінною x

$$w_\alpha(y) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) e^{i\alpha x} dx, w(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w_\alpha(y) e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (2.10)$$

Застосуємо його до рівняння (2.7)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) e^{i\alpha x} dx = 0$$

Згідно з властивостями інтегрального перетворення Фур'є з урахуванням (2.9) маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} e^{i\alpha x} dx = (-i\alpha)^2 w_\alpha(y) = -\alpha^2 w_\alpha(y)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} e^{i\alpha x} dx = \frac{d^2}{dy^2} \int_{-\infty}^{\infty} w e^{i\alpha x} dx = w_{\alpha}''(y).$$

Таким чином отримуємо звичайне диференціальне рівняння відносно трансформанти $w_{\alpha}(y)$ шуканої функції

$$w_{\alpha}''(y) - \alpha^2 w_{\alpha}(y) = 0, 0 < y < h. \quad (2.11)$$

Застосуємо тепер інтегральне перетворення (2.10) до крайових умов (2.8)

$$\int_{-\infty}^{\infty} w|_{y=0} e^{i\alpha x} dx = 0, \text{ тобто } w_{\alpha}(0) = 0$$

$$G \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=h} e^{i\alpha x} dx = p_{\alpha}, \text{ тобто } G w_{\alpha}'(h) = p_{\alpha}, \text{ де } p_{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{i\alpha x} dx.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (2.11) має вигляд

$$w_{\alpha}(y) = A \cosh \alpha y + B \sinh \alpha y$$

З трансформованих крайових умов знайдемо

$$w_{\alpha}(0) = A = 0, w_{\alpha}'(h) = B \alpha \cosh \alpha h = \frac{p_{\alpha}}{G}, \text{ звідки } B = \frac{p_{\alpha}}{G \alpha \cosh \alpha h}.$$

Таким чином знайдена трансформанта шуканої функції

$$w_{\alpha}(y) = \frac{p_{\alpha} \sinh \alpha y}{G \alpha \cosh \alpha h}.$$

Тоді згідно з формулою обернення (2.10) маємо

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_{\alpha} \sinh \alpha y}{\alpha \cosh \alpha h} e^{-i\alpha x} dx.$$

За формулами (2.2) можна знайти напруження у тілі.

Якщо взяти зовнішнє навантаження у вигляді рівномірно розподіленого на проміжку $(a; b)$ навантаження інтенсивністю p_*

$$p(x) = \begin{cases} p_*, & x \in (a; b) \\ 0, & x \notin (a; b) \end{cases}$$

то його трансформанта є

$$p_{\alpha} = \int_{-a}^a p_* e^{i\alpha x} dx = 2p_* \int_0^a \cos \alpha x dx = 2p_* \frac{\sin \alpha a}{\alpha}.$$

У цьому випадку вирази для переміщення та напружень приймуть вигляд

$$w(x, y) = \frac{2p_*}{\pi G} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha a \cos \alpha x \operatorname{sh} \alpha y}{\alpha^2 \operatorname{ch} \alpha h} d\alpha$$

$$\tau_{xz}(x, y) = G \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{2p_*}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha a \sin \alpha x \operatorname{sh} \alpha y}{\alpha \operatorname{ch} \alpha h} d\alpha$$

$$\tau_{yz}(x, y) = G \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2p_*}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha a \cos \alpha x \operatorname{ch} \alpha y}{\alpha \operatorname{ch} \alpha h} d\alpha.$$

2.2. Плоска задача теорії пружності. Випадки деформації пружного тіла, які призводять до плоскої задачі.

Плоскою задачею теорії пружності будемо вважати задачу про знаходження напружень і переміщень у пружному тілі у декартовій системі координат, коли вони не залежать від третьої змінної, наприклад, від z , як це було у випадку антиплоскої задачі. Така ситуація реалізується у двох випадках деформації тіла: коли воно знаходиться в умовах плоскої деформації і коли воно знаходиться в умовах плоского напруженого стану.

Будемо вважати, що необмежене пружне тіло знаходиться в умовах плоскої деформації, якщо воно обмежено довільною циліндричною поверхнею з направляючою

вздовж вісі Oz , складові поверхневих та об'ємних навантажень вздовж цієї вісі дорівнюють нулю, а складові, що лишилися, не

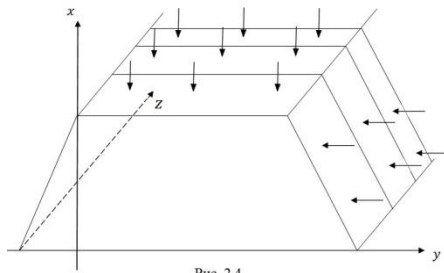


Рис. 2.4

залежать від змінної z (рис.2.4). Це дозволяє площинами, які перпендикулярні до вісі Oz , розбити тіло на диски, кожний з яких буде знаходитися в однакових умовах. Якщо ми розглянемо один з таких дисків, то сусідні з ним диски не дозволять йому пересуватися вздовж вісі Oz , а інші переміщення будуть залежати тільки від змінних x і y

$$u = u(x, y), v = v(x, y), w = 0 \quad (2.12)$$

Підставляючи ці значення у співвідношення Коші (1.3), отримаємо

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)) = 0, \quad \gamma_{xz} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0,$$

звідки

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y), \tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = 0 \quad (2.13)$$

Таким чином, у випадку плоскої деформації, необхідно визначити тільки три напруження σ_x , σ_y і τ_{xy} , напруження σ_z виражаються через напруження σ_x та σ_y .

Використаємо співвідношення (2.13) і запишемо закон Гука (1.6), який зв'язує деформації і напруження, у вигляді

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1+\mu}{E}((1-\mu)\sigma_x - \mu\sigma_y), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1+\mu}{E}((1-\mu)\sigma_y - \mu\sigma_x), \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Підставимо (2.12) у рівняння Ламе (1.12) та прийдемо до висновку, що випадок плоскої деформації може бути описан наступним спрощеним варіантом рівнянь Ламе

$$\begin{aligned} G\Delta u + (\lambda + G)\frac{\partial \theta}{\partial x} + X &= 0 \\ G\Delta v + (\lambda + G)\frac{\partial \theta}{\partial y} + Y &= 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\text{де } \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Або

$$\begin{aligned} \Delta u + \mu_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{X}{G} &= 0 \\ \Delta v + \mu_0 \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{Y}{G} &= 0, \text{ де } \mu_0 = (1 - 2\mu)^{-1}. \end{aligned}$$

До отриманих рівнянь слід додати крайові умови на границі тіла. Для задач плоскої деформації тіла реальний механічний сенс мають крайові умови слідуючих типів.

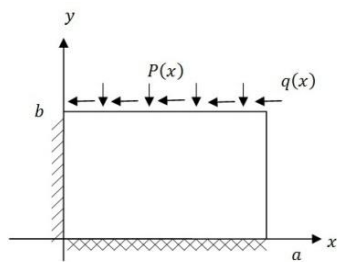


Рис. 2.5

1) Край нерухомо закріплено – нормальне та дотичне переміщення дорівнюють нулю.

Наприклад, якщо для прямокутної області $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ (рис.2.5) нерухомо закріплено край $y = 0$, то

$$u|_{y=0}=0, v|_{y=0}=0, 0 \leq x \leq a.$$

2) До краю прикладені задані нормальне та дотичне навантаження.

Наприклад, якщо завантажено край $y = b$, то

$$\sigma_y|_{y=b} = -p(x), \tau_{xy}|_{y=b} = -q(x), 0 \leq x \leq a.$$

Зокрема, якщо край вільний, то нормальне та дотичне напруження на ньому дорівнюють нулю. Наприклад, якщо край $x = a$ вільний, то $\sigma_x|_{x=a} = 0, \tau_{xy}|_{x=a} = 0, 0 \leq y \leq b$.

3) Край тіла знаходиться в умовах ковзкого закріплення (або гладкого контакту), коли дорівнюють нулю нормальне переміщення та дотичне напруження.

Наприклад, якщо край $x = 0$ знаходиться в умовах гладкого контакту, то

$$u|_{x=0} = 0, \tau_{xy}|_{x=0} = 0, 0 \leq y \leq b.$$

До другого варіанту плоскої задачі приходимо, коли тіло знаходиться у плоскому напруженому стані. Назвемо тонкою пластинною тіло у вигляді пружного шару товщини h , товщину якого вважаємо малою у порівнянні з двома іншими його розмірами. Площину, яка розділяє пластину по товщині на дві однакові частини, назвемо серединною площиною пластини.

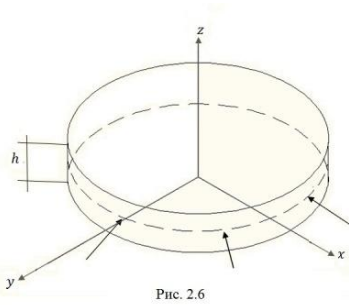


Рис. 2.6

Будемо вважати, що тіло знаходиться в умовах плоского напруженого стану, якщо воно є тонкою пластинною, навантаженою на границі силами, паралельними до серединної площини пластини (рис.2.6) і розподіленими за її товщиною симетрично відносно цієї площини, що виключає згин пластини. Як і у випадку плоскої деформації, складова об'ємних сил вздовж вісі Oz відсутня, а бокова поверхня пластини є вільною від напружень

$$\sigma_z = \left|_{z=\pm h/2} = 0; \tau_{xz} \right|_{z=\pm h/2} = 0; \tau_{yz} \right|_{z=\pm h/2} = 0.$$

Припускаючи малою товщину пластини h , вважаємо, що напруження не змінюються за товщиною пластини, тобто, залежать тільки від змінних x і y . Тоді в силу останніх співвідношень можна прийняти, що $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Звідки співвідношення закону Гука (1.5) запишуться у вигляді

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}, \quad (2.16)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

Співвідношення закону Гука (2.14) і (2.16) для плоскої деформації і для плоского напруженого стану різні, однак їх можна записати однотипно таким чином

$$\varepsilon_x = a\sigma_x - b\sigma_y, \quad \varepsilon_y = a\sigma_y - b\sigma_x, \quad \gamma_{xy} = 2(a+b)\tau_{xy} \quad (2.17)$$

де стали a і b приймають значення $a = \frac{1-\mu^2}{E}$, $b = \frac{\mu(1+\mu)}{E}$ у випадку плоскої деформації та $a = \frac{1}{E}$, $b = \frac{\mu}{E}$ у випадку плоского напруженого стану.

Звідси для переходу від плоскої деформації до плоского напруженого стану слід замінити μ на $\frac{\mu}{1+\mu}$ і E на $\frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2}E$. Тому для математичного формулювання плоского напруженого стану ми можемо використовувати рівняння Ламе (2.15), зробивши в них вказану заміну. В результаті отримаємо

$$G\Delta u + \frac{2\mu}{1-\mu}G\frac{\partial\theta}{\partial x} + X = 0, \quad G\Delta v + \frac{2\mu}{1-\mu}G\frac{\partial\theta}{\partial y} + Y = 0 \quad (2.18)$$

Таким чином, розглянуті випадки плоскої задачі зводяться до розв'язання рівнянь Ламе (2.15) або (2.18). Що до граничних умов для I основної задачі, то і тут, як і у просторовому випадку ними служать умови рівноваги контурних елементів (1.1), які в обох випадках, якщо взяти до уваги $P_{yz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, $n = \cos(\gamma, z) = 0$, приймають вигляд

$$P_{yx} = \sigma_x l + \tau_{xy} m, \quad P_{yy} = \sigma_y m + \tau_{xy} l \quad (2.19)$$

2.3. Зведення плоскої задачі до бігармонічного рівняння.

Проведене математичне моделювання плоскої деформації і плоского напруженого стану має той недолік, що диференціальні рівняння, до яких зводиться ці задачі, є різними. Покажемо, як обидва ці випадки можна звести до одного розв'язуючого бігармонічного рівняння. За основу візьмемо єдині для обох випадків диференціальні рівняння рівноваги (1.2), які у даному випадку приймуть вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ця система рівнянь не є замкнутою, тобто тут всього два рівняння, але три невідомі напруження. Для їх замикання необхідно третє рівняння. Використаємо умову суцільності або сумісності деформацій (1.4), яку ми получили раніше

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Використавши закон Гука (2.17), перейдемо до напружень

$$a \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - b \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + a \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - b \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = 2(a+b) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Після диференціювання першого рівняння з (2.20) за змінною x , другого за змінною y потрібно скласти результати. Тоді

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}.$$

Підстановка цього виразу у попередній, приводить до наступного запису рівнянь сумісності деформацій

$$\frac{a}{a+b} \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}. \quad (2.21)$$

Таким чином, знаходження трьох напружень у плоскій задачі теорії пружності звелось до розв'язання трьох диференціальних рівнянь (2.20)-(2.21). Зведемо ці три рівняння до одного для випадку, коли масові сили X і Y є сталі. У цьому випадку рівняння (2.21) стане однорідним $\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0$. Введемо функцію напружень $\Phi(x, y)$ і подамо через неї напруження наступним чином

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - yX - xY. \quad (2.22)$$

Після підстановки виразів (2.22) у рівняння рівноваги (2.20) отримаємо, що вони задовольняються тотожно. Підстановка (2.22) у однорідне рівняння (2.21) призводить до того, що функція напружень $\Phi(x, y)$ має задовольняти бігармонічному рівнянню

$$\Delta^2 \Phi(x, y) = 0, \quad (2.23)$$

$$\text{де } \Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Приклад. Розглянемо плоску задачу теорії пружності для пружної півплощини $-\infty < x < \infty, 0 \leq y < \infty$ (рис.2.7),

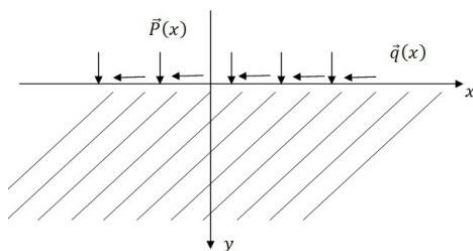


Рис. 2.7

до границі якої прикладені нормальне та дотичне навантаження. Задача зводиться до розв'язування

$$\text{бігармоничного рівняння} \quad \Delta^2 \Phi(x, y) = 0, -\infty < x < \infty, 0 < y < \infty \quad (2.24)$$

при крайових умовах

$$\sigma_y|_{y=0} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}|_{y=0} = -p(x), \tau_{xy}|_{y=0} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}|_{y=0} = -q(x). \quad (2.25)$$

та умовах на нескінченності

$$\Phi, \frac{\partial^k \Phi}{\partial x^k} \rightarrow 0 \text{ якщо } x \rightarrow \pm\infty, k=1,2,3 \text{ та } \Phi \rightarrow 0 \text{ якщо } y \rightarrow +\infty.$$

Для розв'язування задачі використаємося перетворенням Фур'є за змінною x

$$\Phi_\alpha(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y) e^{i\alpha x} dx, \Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\alpha(y) e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Після його застосування до рівняння (2.24) і крайових умов (2.25), прийдемо до одновірної крайової задачі

$$\Phi_\alpha^{IV}(y) - 2\alpha^2 \Phi_\alpha''(y) + \alpha^4 \Phi_\alpha(y) = 0, 0 < y < \infty \quad (2.26)$$

$$\Phi_\alpha(0) = \frac{1}{\alpha^2} p_\alpha, \Phi_\alpha'(0) = \frac{i}{\alpha} q_\alpha, \quad (2.27)$$

$$\text{де } p_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{i\alpha x} dx, q_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} q(x) e^{i\alpha x} dx.$$

Загальний розв'язок рівняння (2.26) є

$$\Phi_\alpha(y) = (A + By) e^{-|\alpha|y} + (C + Dy) e^{|\alpha|y}.$$

Так як розв'язок мусить спадати при $y \rightarrow +\infty$, то $C = D = 0$. Сталі A і B знайдемо з крайових умов (2.27)

$$A = \frac{1}{\alpha^2} p_\alpha, B = \frac{i}{\alpha^2} q_\alpha + \frac{|\alpha|}{\alpha^2} p_\alpha.$$

Таким чином знайдена трансформанта шуканої функції

$$\Phi_\alpha(y) = \frac{1}{\alpha^2} \left[(1 + |\alpha|y) p_\alpha + i\alpha y q_\alpha \right] e^{-|\alpha|y}.$$

Тоді за формулою обернення

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\alpha}(y) e^{-i\alpha x} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} \left[(1 + |\alpha|y) p_{\alpha} + i\alpha y q_{\alpha} \right] e^{-|\alpha|y} \cdot e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Тепер ми можемо знайти напруження

$$\sigma_x = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(1 - |\alpha|y) p_{\alpha} + i \left(2 \frac{|\alpha|}{\alpha} - \alpha y \right) q_{\alpha} \right] e^{-|\alpha|y} \cdot e^{-i\alpha x} d\alpha$$

$$\sigma_y = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(1 + |\alpha|y) p_{\alpha} + i\alpha y q_{\alpha} \right] e^{-|\alpha|y} \cdot e^{-i\alpha x} d\alpha$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[i\alpha y p_{\alpha} + (1 - |\alpha|y) q_{\alpha} \right] e^{-|\alpha|y} \cdot e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Розглянемо випадок, коли зовнішнє навантаження зводиться до зосередженої сили величини P , прикладеної нормально у початку координат $p(x) = P\delta(x)$, $q(x) = 0$.

Тоді $p_{\alpha} = P$, $q_{\alpha} = 0$ і у виразах для напружень інтеграли можна знайти

$$\sigma_x = -\frac{P}{\alpha} \int_0^{\infty} (1 - \alpha y) e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha = -\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\sigma_y = -\frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} (1 + \alpha y) e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha = -\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{Py}{\pi} \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha y} \sin \alpha x d\alpha = \frac{2P}{\pi} \cdot \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

3. Математичне моделювання задач розрахунку кручення пружних стрижнів.

3.1. Принцип Сен-Венана.

Для спрощення математичного формулювання багатьох задач теорії пружності, в тому числі і задачі кручення пружних стрижнів, використовується принцип Сен-Венана, що полягає у наступному. Припустимо, що до деякого тіла на невеликій частині його границі прикладене навантаження, розподілене довільним чином, і що існують головний вектор сил \vec{R} і головний момент \vec{M} (рис. 3.1).

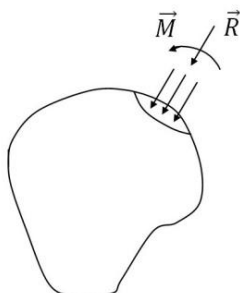


Рис. 3.1

Назвемо два навантаження статично еквівалентними, якщо їх головні вектори і головні моменти збігаються. Якщо тепер

замінити дане навантаження на статично йому еквівалентне, яке складається з \bar{R} і \bar{M} , то така заміна приведе до впливу на напружений стан тіла тільки на ділянці, близькій до області, де прикладено навантаження. На досить віддаленій від цієї області напружений стан тіла практично не зміниться.

Принцип Сен-Венана дозволяє на малих, порівняно з розмірами тіла, ділянках границі обмежитися знанням тільки головного вектора та головного моменту прикладеного навантаження, не цікавлячись законом його розподілу.

3.2. Зведення розрахунку кручення стрижнів до задачі Неймана.

Розглянемо прямий циліндричний стрижень довжини l , вісь якого співпадає з віссю Oz . Припустимо, що бокова поверхня стрижня вільна від напружень, нижній торець $z = 0$ нерухомо закріплено, а до верхнього торця $z = l$ прикладено навантаження, яке викликає кручення стрижня. (рис. 3.2)

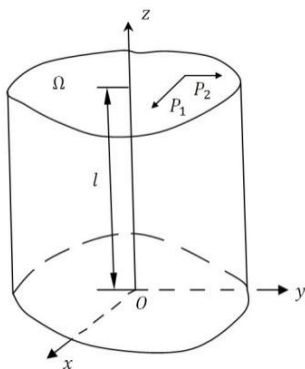


Рис. 3.2

$$\sigma_z|_{z=l} = 0, \quad \tau_{xz}|_{z=l} = P_1(x, y), \quad \tau_{yz}|_{z=l} = P_2(x, y). \quad (3.1)$$

За умовами стрижень скручується, але не згинається, а тому рівнодіюча навантажень P_1 і P_2 повинна дорівнювати нулю

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} P_1(x, y) dx dy &= \iint_{\Omega} \tau_{xz}|_{z=l} dx dy = 0 \\ \iint_{\Omega} P_2(x, y) dx dy &= \iint_{\Omega} \tau_{yz}|_{z=l} dx dy = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

де Ω – область, яку займає поперечний переріз стрижня.

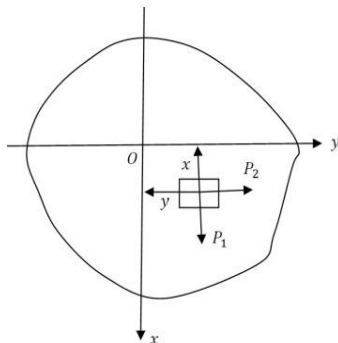


Рис. 3.3

Навантаження P_1 і P_2 еквівалентні дії парі сил, момент якої позначимо через M . Для його підрахунку розглянемо верхній торець стрижня (рис.3.3). Виділимо на ньому елементарний прямокутник $dxdy$. Навантаження P_1 створює від'ємний момент з плечем y , а P_2 – додатний момент з плечем x . В результаті до елементарного прямокутника $dxdy$ прикладений елементарний момент $dM = (xP_2 - yP_1)dxdy$. Після підсумовування цих елементарних моментів знайдемо

$$M = \iint_{\Omega} [xP_2(x, y) - yP_1(x, y)] dx dy = \iint_{\Omega} [x\tau_{yz} - y\tau_{xz}(x, y)]|_{z=l} dx dy \quad (3.3)$$

На основі принципу Сен-Венана ми не будемо задавати закон розподілу навантажень P_1 і P_2 , які задовольняють умовам (3.1), а будемо вимагати лише виконання інтегральної умови (3.3). Це не буде впливати на напружений стан стрижня удалині від верхнього торця.

За умовами бокова поверхня стрижня вільна від напружень, тому граничні умови на ній отримаємо з (1.1)

$$\begin{aligned}
\sigma_x \cos(\nu, x) + \tau_{xy} \cos(\nu, y) + \tau_{xz} \cos(\nu, z) &= 0 \\
\tau_{xy} \cos(\nu, x) + \sigma_y \cos(\nu, y) + \tau_{yz} \cos(\nu, z) &= 0 \\
\tau_{xz} \cos(\nu, x) + \tau_{yz} \cos(\nu, y) + \sigma_z \cos(\nu, z) &= 0,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

де ν – зовнішня нормаль до границі Γ області Ω . Так як нормаль ν перпендикулярна вісі Oz , то $\cos(\nu, z) = 0$. Позначимо $\cos(\nu, x) = \cos \alpha$, тоді $\cos(\nu, y) = \sin \alpha$ і умова (3.4) перепишеться у вигляді

$$\sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha = 0, \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha = 0, \tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \sin \alpha = 0 \tag{3.5}$$

Якщо в результаті кручення верхній торець стрижня повернеться на кут θl відносно нерухомого нижнього торця, то враховуючи, що кут повороту поперечного перетину стрижня є пропорційним відстані цього перетину від нерухомого торця, отримаємо, що перетин із центром O' , який відстає на довжину z від нижнього торця, обернеться на кут θz (рис.3.4).

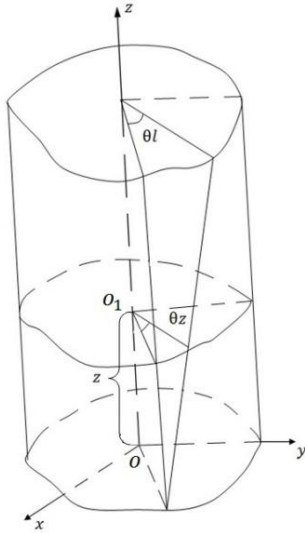


Рис. 3.4

Знайдемо переміщення точок цього перерізу вважаючи, що кожний такий перетин деформується однаковим чином. Нехай точка B переміститься в точку B' (рис.3.5). Якщо позначити $O'B = O'B' = r$ і $\angle CO'B = \alpha$, то $BB' = r\theta z$, і горизонтальні переміщення точки B будуть

$$\begin{aligned}
u &= BB' \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -r\theta z \sin \alpha = -\theta z y, \\
v &= BB' \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = r\theta z \cos \alpha = \theta z x
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Що до переміщення уздовж вісі Oz припустимо, що воно описується невідомою функцією $\varphi(x, y)$, яку назвемо функцією кручення $w = \theta \varphi(x, y)$. $\tag{3.7}$

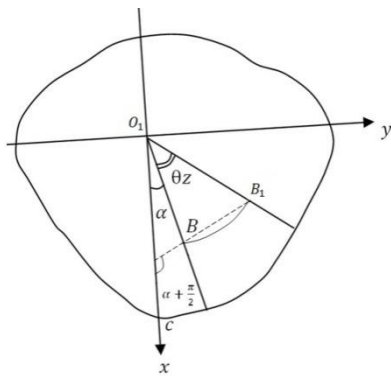


Рис. 3.5

Після підстановки переміщень (3.6) - (3.7) в співвідношення Коші (1.3), отримаємо наступні вирази для деформацій

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0, \gamma_{xz} = \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right), \gamma_{yz} = \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right).$$

Використовуючи закон Гука (1.6), знайдемо напруження в стрижні

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \tau_{xz} = \theta G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right), \tau_{yz} = \theta G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \tag{3.8}$$

Підставимо отримані напруження (3.8) в рівняння рівноваги (1.2). Перші два з них перетворяться на тотожності, а третє перейде в рівняння відносно функції кручення

$$\Delta\varphi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (3.9)$$

тобто функція кручення повинна бути гармонічною.

Після підстановки (3.8) в граничні умови (3.5) на бічній поверхні стрижня, отримаємо граничну умову для функції $\varphi(x, y)$. Перші дві з них обернуться у тотожність, а третя дає

$$G\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right)\cos\alpha + G\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right)\sin\alpha = 0, \quad \text{тобто}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\sin\alpha\right)|_{\Gamma} = y\cos\alpha - x\sin\alpha, \quad \text{звідки}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\Big|_{\Gamma} = y\cos\alpha - x\sin\alpha \quad (3.10)$$

Таким чином, розв'язання задачі кручення стержня зведено до розв'язання задачі Неймана (3.9) - (3.10).

Задача Неймана має розв'язок, який визначається з точністю до довільного постійного доданка, при виконанні умови

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} d\gamma = 0 \quad (3.11)$$

За допомогою формули Гріна у формі

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} (P \sin\alpha + Q \cos\alpha) d\gamma$$

покажемо виконання умови (3.11)

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} d\gamma = \int_{\Gamma} (y\cos\alpha - x\sin\alpha) d\gamma = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial(-x)}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Покажемо тепер виконання умов (3.2) на верхньому торці стержня. Почнемо з першої

$$\iint_{\Omega} \tau_{xz} \Big|_{z=l} dx dy = \theta G \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y \right) dx dy.$$

Використаємо тотожність

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[x \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[x \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x \right) \right] = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - y$$

та запишемо

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) dx dy &= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \right] \right] dx dy = \\
&= \int_{\Gamma} \left[x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \cos \alpha + x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \sin \alpha \right] d\gamma = \int_{\Gamma} x \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin \alpha + x \sin \alpha - y \cos \alpha \right] d\gamma = \\
&= \int_{\Gamma} x \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \right] d\gamma = 0.
\end{aligned}$$

Аналогічно, з використанням тотожності

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \right] = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x$$

доводиться виконання другої умови з (3.2).

Розглянемо тепер співвідношення (3.3) для обчислення моменту M

$$\begin{aligned}
M &= \iint_{\Omega} \left[x \tau_{yz} - y \tau_{xz} \right] \Big|_{z=l} dx dy = \theta G \iint_{\Omega} \left[x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) - y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \right] dx dy = \\
&= \theta G \iint_{\Omega} \left[\left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(y - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy - \theta G \iint_{\Omega} \left[x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy
\end{aligned}$$

Використання тотожності

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \right] = x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2$$

приводить до

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} \left[x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy &= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \right] \right] dx dy = \\
&= \int_{\Gamma} \left[\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \cos \alpha + \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \sin \alpha \right] d\gamma = \int_{\Gamma} \varphi \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \right] d\gamma = 0.
\end{aligned}$$

Таким чином

$$M = \theta G \iint_{\Omega} \left[\left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(y - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy = \theta D. \quad (3.12)$$

Співвідношення (3.12) зв'язує прикладений момент M з крученням стрижня θ , де величина

$$D = G \iint_{\Omega} \left[\left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(y - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy. \quad (3.13)$$

називається крутильною жорсткістю стрижня.

Таким чином, якщо ми розв'яжемо задачу Неймана та знайдемо функцію $\varphi(x, y)$, то можна підрахувати жорсткість стрижня D . Тепер, знає величину прикладеного моменту M та жорсткість D , можна знайти крутку стрижня $\theta = M/D$.

Відзначимо, що присутність у розв'язку задачі Неймана довільного сталого доданку не впливає на напружений стан в стрижні, так як у формули для напруження (3.8) входять тільки похідні функції кручення $\varphi(x, y)$.

3.3. Зведення розрахунку кручення стрижнів до задачі Діріхле.

Введемо гармонічну функцію $\psi(x, y)$, спряжену з гармонічною функцією $\varphi(x, y)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Розглянемо, як зміниться гранична умова (3.10).

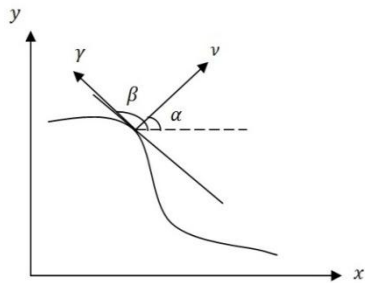


Рис. 3.6

З рис.3.6 видно, що кут $\alpha = \beta - \pi/2$. Тоді

$$\cos \alpha = \sin \beta, \sin \alpha = -\cos \beta \text{ і}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin \alpha = \frac{\partial \psi}{\partial y} \sin \beta + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos \beta = \frac{\partial \psi}{\partial \gamma}.$$

$$\text{Далі } y \cos \alpha - x \sin \alpha = y \sin \beta + x \cos \beta = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) \text{ і}$$

$$\text{гранична умова (3.10) прийме вигляд } \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right), \text{ звідки } \psi \Big|_{\Gamma} = \frac{x^2 + y^2}{2} + C.$$

Так як формули для напружень містять тільки похідні від функції $\psi(x, y)$, то для однозв'язних областей можна покласти $C = 0$.

Таким чином задача Неймана щодо функції $\varphi(x, y)$ зведена до задачі Діріхле щодо функції $\psi(x, y)$

$$\Delta\psi(x, y) = 0, (x, y) \in \Omega, \psi|_{\Gamma} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (3.14)$$

При цьому ненульові компоненти тензора напружень виражаться через функцію $\psi(x, y)$ наступним чином

$$\tau_{xz} = \theta G \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - y \right), \tau_{yz} = -\theta G \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - x \right), \quad (3.15)$$

а крутильна жорсткість стрижня D має вигляд

$$D = G \iint_{\Omega} \left[\left(x - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(y - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (3.16)$$

Часто розв'язання задачі про кручення стрижня зручніше зводити не до задачі Діріхле (3.14), а до розв'язання рівняння Пуассона з однорідною граничною умовою. Для цього введемо функцію напружень Прандтля

$$\Phi(x, y) = \psi(x, y) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2). \quad (3.17)$$

Подставимо її у формули (3.14) - (3.16) та отримаємо, що ця функція повинна бути розв'язком граничної задачі

$$\Delta\Phi(x, y) = -2, (x, y) \in \Omega, \Phi|_{\Gamma} = 0, \quad (3.18)$$

При цьому

$$\tau_{xz} = G\theta \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \tau_{yz} = -G\theta \frac{\partial \Phi}{\partial x}, D = G \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (3.19)$$

За допомогою формули Гріна останній вираз можна привести до виду

$$D = 2G \iint_{\Omega} \Phi(x, y) dx dy \quad (3.20)$$

Приклад. Розв'яжемо задачу кручення стержня прямокутного перерізу $\Omega = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$. Ця задача зводиться до розв'язання задачі Діріхле

$$\Delta\Phi(x, y) = -2, (x, y) \in \Omega \quad (3.21)$$

$$\Phi|_{x=0} = \Phi|_{x=a} = 0, \Phi|_{y=0} = \Phi|_{y=b} = 0.$$

Для побудови її розв'язку використаємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є за змінною x

$$\Phi_n(y) = \int_0^a \Phi(x, y) \sin \alpha_n x dx, \alpha_n = \frac{\pi n}{a}, n = 1, 2, \dots \quad \Phi(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(y) \sin \alpha_n x$$

Застосовуючи його до крайової задачі (3.21), прийдемо до одновимірної крайової задачі

$$\Phi_n''(y) - \alpha_n^2 \Phi_n(y) = \frac{1 - (-1)^n}{\alpha_n}, 0 < y < b \quad (3.22)$$

$$\Phi_n(0) = 0, \Phi_n(b) = 0.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння (3.22) має вигляд

$$\Phi_n(y) = A_n \operatorname{ch} \alpha_n y + B_n \operatorname{sh} \alpha_n y,$$

а частковим розв'язком неоднорідного рівняння буде $\frac{(-1)^n - 1}{\alpha_n^3}$. Од же, загальний

розв'язок рівняння (3.22) має вигляд

$$\Phi_n(y) = A_n \operatorname{ch} \alpha_n y + B_n \operatorname{sh} \alpha_n y + \frac{(-1)^n - 1}{\alpha_n^3}.$$

З крайових умов знайдемо значення сталих

$$A_n = \frac{1 - (-1)^n}{\alpha_n^3}, B_n = -\frac{1 - (-1)^n}{\alpha_n^3} \operatorname{th} \frac{\alpha_n b}{2}.$$

Таким чином знайдена трансформанта

$$\Phi_n(y) = \frac{1 - (-1)^n}{\alpha_n^3} \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha_n \left(y - \frac{b}{2} \right)}{\operatorname{ch} \alpha_n \frac{b}{2}} - 1 \right].$$

За формулою обернення

$$\Phi(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(y) \sin \alpha_n x = \frac{4}{a} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha_n \left(y - \frac{b}{2} \right)}{\operatorname{ch} \alpha_n \frac{b}{2}} - 1 \right] \frac{\sin \alpha_n x}{\alpha_n^3}.$$

Тепер можна знайти напруження

$$\tau_{xz} = \frac{4\theta G}{a} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{sh\alpha_n \left(y - \frac{b}{2}\right)}{ch\alpha_n \frac{b}{2}} \cdot \frac{\sin\alpha_n x}{\alpha_n^2}$$

$$\tau_{yz} = -\frac{4\theta G}{a} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[\frac{ch\alpha_n \left(y - \frac{b}{2}\right)}{ch\alpha_n \frac{b}{2}} - 1 \right] \cdot \frac{\cos\alpha_n x}{\alpha_n^2}.$$

За формулою (3.20) знайдемо крутильну жорсткість стрижня

$$D = \frac{8G}{a} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \int_0^b \left[\frac{ch\alpha_n \left(y - \frac{b}{2}\right)}{ch\alpha_n \frac{b}{2}} - 1 \right] dy \cdot \int_0^a \frac{\sin\alpha_n x}{\alpha_n^3} dx = \frac{16G}{a} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^4} \left[\frac{2}{\alpha_n} th\alpha_n \frac{b}{2} - b \right].$$

Задав величину прикладеного до стрижня моменту M , можемо знайти крутку

$\theta = M/D$, отже обчислити напруження у стрижні.

4. Математичне моделювання задач розрахунку пластин та балок на згин.

4.1. Основні допущення та наслідки з них.

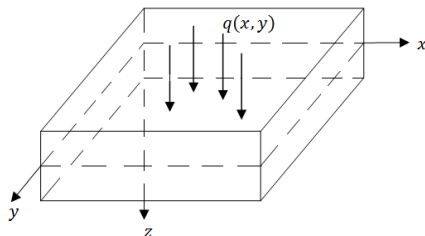


Рис. 4.1

Розглянемо тонку пластину товщини h і виберемо вісі координат так, щоб площина $z = 0$ була б серединною. До пластини прикладемо нормальне навантаження $q(x, y)$ (рис.4.1).

Задача, яку ми поставили не є плоскою, і нам слід виходити з загальних рівнянь теорії пружності. Для спрощення математичної моделі зробимо ряд припущень, які виявляються тим точніше, чим тонша пластина.

I. Напруженням σ_z у порівнянні із іншими компонентами тензора напружень можна знехтувати, тобто, прийняти $\sigma_z = 0$. При цьому припускається, що пластина згинається, але стиск її за товщиною не відбувається. Використовуючи це припущення з закону Гука (1.5) отримаємо, що

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy},$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y).$$

Розв'яжемо отримані співвідношення відносно напружень

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\mu\varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} \quad (4.1)$$

II. При згині пластини серединна площина не деформується, тобто горизонтальні переміщення дорівнюють нулю

$$u|_{z=0} = v|_{z=0} = 0.$$

III. Елемент у вигляді тонкого стрижня, подумки видалений з пластини і нормальний до серединної площини до деформації пластинки, переходить у прямолінійний елемент у вигляді тонкого стрижня, нормальний до серединної поверхні після згину.

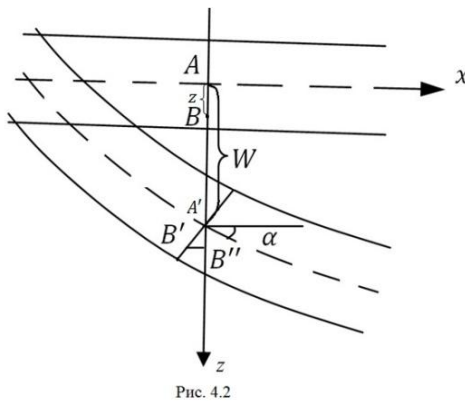


Рис. 4.2

Позначимо через $w(x, y)$ вертикальні переміщення точок серединної площини пластини і розглянемо переріз пластинки площиною, що перпендикулярна до вісі Oy (рис.4.2).

В результаті згину точки A і B , відповідно до припущень, приймуть положення A' і B' , тобто, т. B отримує переміщення вздовж вісі Ox , яке дорівнює

$$u = -B'B'' = -A'B''\tan\alpha = -z \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Розглянемо переріз пластинки площиною, що перпендикулярна до вісі Ox , отримаємо аналогічно, що

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Підставимо знайдені значення переміщення у співвідношення Коші (1.3) та отримаємо

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Отримані вирази (4.1) для напружень застосуємо, щоб знайти вирази для напружень через прогин $w(x, y)$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad \tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для того, щоб виразити решту напружень τ_{xz} і τ_{yz} через прогин, використаємо перші два рівняння рівноваги (1.2), з яких із врахуванням (4.2), знайдемо

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w,$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial y} \Delta w, \text{ де } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Проінтегруємо отримані рівності за змінною z , отримаємо

$$\tau_{xz} = \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w + A(x, y), \quad \tau_{yz} = \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \Delta w + B(x, y),$$

де A і B довільні функції. Для їх визначення скористаємося умовами

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \text{ при } z = \pm \frac{h}{2}.$$

В результаті отримаємо, що

$$\tau_{xz} = -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \Delta w, \quad \tau_{yz} = -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \Delta w \quad (4.3)$$

Таким чином усі напруження виражено через прогин серединної площини пластини.

4.2. Перехід від напружень до сумарних (інтегральних) характеристик.

Для виключення змінної z перейдемо від напружень до сумарних характеристик. Виділимо у пластині малий елемент $h dx dy$ і розглянемо діюче на нього напруження.

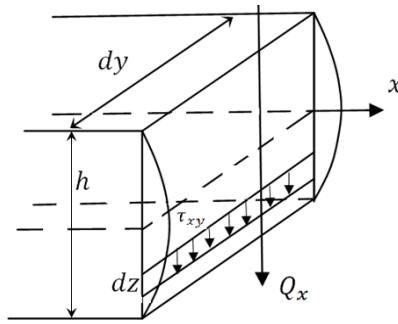


Рис. 4.3

Розглянемо спочатку напруження τ_{xz} , яке діє по перерізу з нормаллю x . Якщо по товщині пластинки виділити елементарну смугу ширини dz (рис.4.3), то дія цього напруження на смугі $dy dz$ еквівалентна дії елементарної сили $dQ_x^* = \tau_{xz} dy dz$. Знайдемо суму цих елементарних сил по товщині пластинки, що еквівалентно інтегруванню за z , отримаємо повну рівнодіючу дотичного напруження τ_{xz} , розподілену по майданчику $h dy$

$$Q_x^* = dy \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz$$

Віднесемо цю величину до довжини смужки dy , отримаємо

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz.$$

Ця величина називається поперечною силою в пластині по перетину з нормаллю x і має розмірність сили, віднесеної до одиниці довжини. Підрахуємо інтеграл з використанням (4.3) та знайдемо, що поперечна сила

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta W, \quad (4.4)$$

де стала $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ називається згінною або циліндричною жорсткістю пластинки.

Аналогічно, знайдемо суму напружень τ_{yz} по майданчику hdy та прийдемо до поперечної сили в пластині по перерізу з нормаллю y

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta W. \quad (4.5)$$

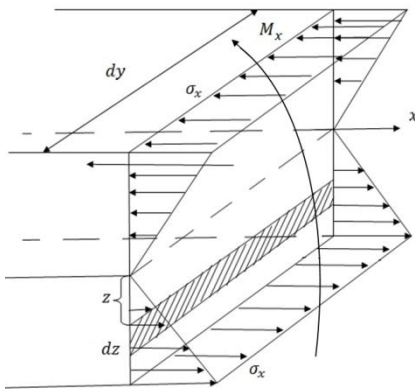


Рис. 4.4

Розглянемо напруження σ_x . На відміну від τ_{xz} підсумовування σ_x по майданчику hdy призводить, очевидно, до пари сил. Для підрахунку моменту цієї пари виділимо елементарну смужку ширини dz на відстані z від серединної площини пластини (рис. 4.4). Напруження σ_x на цій смужці викликає елементарний момент $dM_x^* = z\sigma_x dy dz$. Знайдемо суму цих елементарних моментів, тобто проінтегруємо по товщині пластинки і відносемо результат до довжини смужки dy та отримаємо величину

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz$$

яку називають згинаючим моментом у пластині по перерізу з нормаллю x і який має розмірність сили за рахунок віднесення до довжини, хоча розмірність моменту це є сила помножена на довжину. Використання (4.2) приводить до наступного виразу згинаючого моменту через прогин пластинки

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right). \quad (4.6)$$

Аналогічно, після підсумовування напружень σ_y по майданчику hdy , приходимо до згинаючого моменту в пластині, який діє по перерізу з нормаллю y

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz = -D \left(\mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right). \quad (4.7)$$

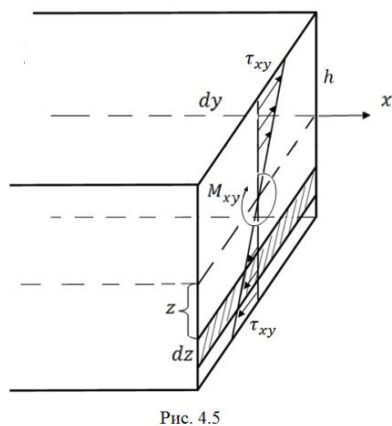


Рис. 4.5

Розглянемо тепер напруження $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (рис.4.5). Його дія на майданчику hdy приводить до пари сил з елементарним моментом $dM_{xy}^* = z\tau_{xy}dydz$. Проінтегруємо по товщині пластинки і віднесемо результат до довжини смужки, приходимо до обертальних моментів в пластині, які діють по перерізах з нормальми x та y

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} z\tau_{xy}dz,$$

для яких з урахуванням (4.2) отримаємо наступне подання через прогин $w(x, y)$

$$M_{xy} = M_{yx} = -(1-\mu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (4.8)$$

Таким чином, при записі умов рівноваги для деякого елемента пластинки $hdx dy$ ми можемо використовувати не напруження, а їх сумарні характеристики (4.4) - (4.8), для знаходження яких досить знати прогин $w(x, y)$.

4.3 Виведення диференціального рівняння згину пластини.

Отримаємо рівняння, що дозволяє відшукати прогин $w(x, y)$, для чого розглянемо

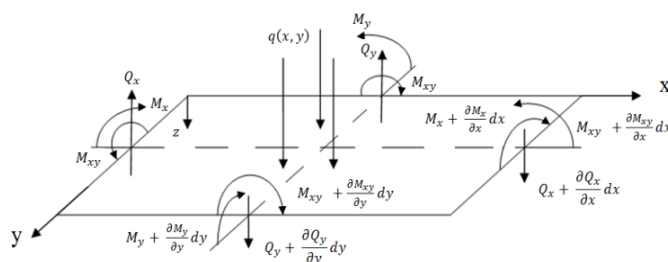


Рис. 4.6

елемент пластини $dx dy$ з усіма діючими на нього силами (рис. 4.6).

Цей елемент, як і вся пластина, знаходиться в рівновазі, тому скористаємося умовами рівноваги. Проекції всіх сил на вісі Ox та Oy дорівнюють нулю, а після проектування на вісь Oz одержимо

$$-Q_x dy + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_y dx + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx + q dx dy = 0,$$

звідки
$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q(x, y) = 0.$$

Підстановка виразів (4.4), (4.5) приводе до того, що функція $w(x, y)$ повинна задовольняти бігармонічне рівняння

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad \text{або} \quad \Delta^2 w(x, y) = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (4.9)$$

яке називають диференціальним рівнянням згину пластин або рівнянням Софі Жермен.

Відзначимо, що суми моментів щодо координатних вісей, призводять до тотожностей.

Отже, розв'язок задачі згину пластин, зводиться до розв'язання бігармонічного рівняння (4.9) і знаходження прогину $w(x, y)$, через який виражаються всі інші величини.

Якщо порівняти формули (4.2) для напруження σ_x і (4.6) для згинального моменту M_x , можна отримати зв'язок між ними

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1-\mu^2} \cdot \frac{M_x}{D} = \frac{M_x}{J} \cdot z, \text{ де } J = \frac{h^3}{12}.$$

Максимальне значення напруження отримуємо при $z = \pm \frac{h}{2}$ (рис. 4.4), звідки

$$\sigma_{x, \min}^{\max} = \pm \frac{M_x}{J} \cdot \frac{h}{2} = \pm \frac{6}{h^2} M_x.$$

4.4. Математичне формулювання умов закріплення пластини. Трансформація Кірхгофа.

Найбільш поширеними випадками закріплення країв пластини є наступні: край пластини жорстко закріплений, край пластини вільно обпертий і край пластини вільний. Опишемо ці випадки закріплення і дамо їх математичне трактування.

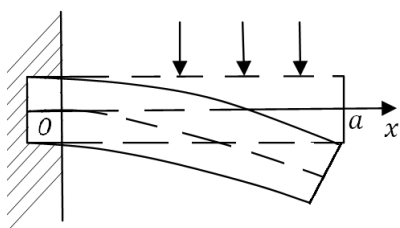


Рис. 4.7

1. Якщо край пластинки $x = 0$ жорстко затиснений, тобто якщо він замуrowаний в абсолютно жорстке тіло як показано на рис. 4.7, то прогин точок цього краю дорівнює нулю і на ньому площина, дотична до вигнутої серединної поверхні, збігається з серединною площиною до згину. Звідси отримуємо крайові умови

$$w|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}|_{x=0} = 0. \quad (4.10)$$

Якщо жорстко затиснений край $y = 0$, то крайовими умовами будуть

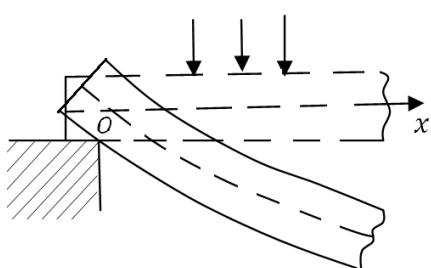


Рис. 4.8

$$w|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y}|_{y=0} = 0$$

2. Якщо край пластини $x = 0$ вільно обпертий (рис 4.8), то точки на цьому краю не переміщуються. Крім того якщо провести переріз уздовж краю $x = 0$, то в ньому напруження σ_x відсутнє, а тому там не буде і згинаючого моменту. Звідси отримуємо крайові умови:

$$w|_{x=0} = 0, \quad M_x|_{x=0} = 0. \quad (4.11)$$

При вільному обпиранні краю $y = 0$ крайові умови мають вигляд

$$w|_{y=0} = 0, \quad M_y|_{y=0} = 0$$

3. Нехай край пластини вільний, тобто на ньому відсутнє будь-якого роду закріплення, як на правому краю $x = a$ (рис. 4.7). Тоді на нього можна дивитися як на перетин з нормаллю x , по якому не діють жодні напруження $\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$, що призводить до наступних крайових умов

$$M_x|_{x=a} = 0, M_{xy}|_{x=a} = 0, Q_x|_{x=a} = 0. \quad (4.12)$$

У разі вільного краю $y = b$ крайовими умовами будуть наступні

$$M_y|_{y=b} = 0, M_{xy}|_{y=b} = 0, Q_y|_{y=b} = 0$$

Крайова умова (4.12) містить три умови на відміну від (4.10) і (4.11). Покажемо, що випадок вільного краю може бути зведений до двох граничних умов за допомогою, так званої, трансформації Кірхгофа, заснованої на приведенні крутильного моменту до додаткової поперечної сили.

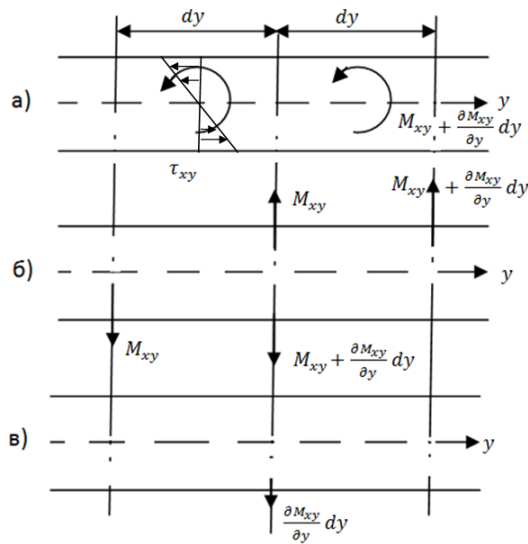


Рис. 4.9

Розглянемо довільний переріз пластини площиною з нормаллю x і на ньому два елементи довжиною dy , які примикають один до одного. На першому з них діє крутильний момент $M_{xy}dy$, який є сумарною характеристикою напруження τ_{xy} , а на другому - крутильний момент $\left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy\right)dy$ (рис.4.9а). Дію кожного з цих моментів можна замінити на дію пари сил з тим же моментом і плечем dy (рис.4.9б). Якщо знайдемо суму цих пар сил, то отримаємо, що розподіл крутильних моментів M_{xy} еквівалентний розподілу додаткових поперечних

сил з інтенсивністю $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$ (рис.4.9в). Таким чином, крутильний момент, що діє в перерізі з нормаллю x , буде врахований, якщо ми замість поперечної сили Q_x будемо розглядати узагальнену поперечну силу

$$V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}.$$

За допомогою формул (4.4), (4.5) і (4.8) отримаємо вирази для узагальнених поперечних сил через прогин $w(x, y)$:

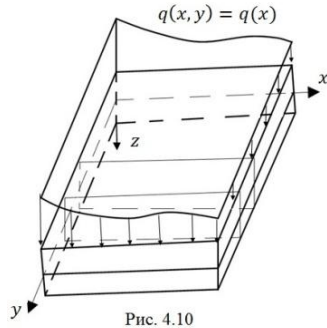
$$V_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], V_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left[(2 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]. \quad (4.13)$$

Крайові умови (4.12) для вільного краю тоді можна записати у вигляді

$$M_x|_{x=a} = 0, V_x|_{x=a} = 0. \quad (4.14)$$

4.5 Циліндричний згин пластин і згин балок.

Згин пластини називається циліндричним, якщо в результаті згину серединна площина пластини переходить в циліндричну поверхню. Такий згин виходить, наприклад, якщо зовнішнє навантаження залежить тільки від однієї змінної і відповідних умов закріплення країв пластинки.



Так, на рис.4.10 циліндричний згин одержимо при жорсткому защемленні краю $x = 0$ і вільних решти країв пластинки та при умові, коли зовнішнє навантаження $q(x, y) = q(x)$. Якщо у цій пластинці жорстко защежити краї $x = 0$ і $y = 0$, то циліндричного згину не буде, незважаючи на те, що зовнішнє навантаження залежить від однієї змінної. У разі циліндричного згину форма вигнутої поверхні не залежить від y , і пластину можна розбити на балки одиничної ширини, кожна з яких деформується однаковим чином. Звідси $w = w(x)$ і рівняння згину пластини приймає вигляд

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{D}. \quad (4.15)$$

При цьому

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad Q_x = -D \frac{d^3 w}{dx^3} = \frac{dM_x}{dx}, \quad \sigma_x = \frac{M_x}{J} \cdot z.$$

Від задачі про циліндричний згин пластини можна перейти до задачі про згин балки одиничної ширини. Для цього треба тільки врахувати, що балка є ізолювана, а не згинається спільно з сусідніми, як при циліндричному згині. Тут та сама ситуація, що і в двох плоских задачах - плоскої деформації, реалізованої в кожному з дисків, що складають деяке циліндричне тіло і впливають один на другий, і плоскому напруженому стані, що реалізується в ізолюваному диску. Згадуючи, що в цих двох задачах різниця полягала у формулюванні закону Гука (порівняйте (2.9) та (2.11)), звернемося до нього. В обох випадках $\sigma_z = 0$. У разі циліндричного згину пластинки (аналог плоскої деформації) $\varepsilon_y = 0$, звідки користуючись співвідношенням закону Гука

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad \text{отримаємо, що } \sigma_y = \mu\sigma_x \text{ і тоді}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1 - \mu^2}{E} \sigma_x.$$

У разі ізолюваної балки (аналог плоского напруженого стану) $\sigma_y = 0$, тому $\varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x$.

Таким чином, щоб перейти від циліндричного згину пластини до згину балки треба в формулах замінити $\frac{1 - \mu^2}{E}$ на $\frac{1}{E}$. Цей множник входить тільки в вираз $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu_2)}$, яка

заміниться на EJ , де $J = \frac{h^3}{12}$. Остаточнo, згин балки описується формулами

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{EJ}, M_x = -EJ \frac{d^2 w}{dx^2}, Q_x = -EJ \frac{d^3 w}{dx^3}. \quad (4.16)$$

Ці формули отримані для балки одиничної ширини і висоти h , тобто прямокутного перерізу. Для узагальнення результатів на випадок балки довільного перерізу з'ясуємо значення множника $J = \frac{h^3}{12}$. Розглянемо балку, поперечний переріз якої симетричний щодо

вісей Oy і Oz і має площу F (рис.4.11).

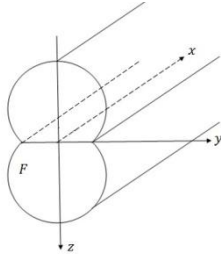


Рис. 4.11

Назвемо моментом інерції цього перерізу відносно осі Oy величину

$$J_y = \iint_F z^2 dF$$

Підррахуємо цю величину для розглянутої вище балки прямокутника перерізу

$$J_y = \int_{-1/2}^{1/2} dy \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12},$$

тобто множник J є моментом інерції поперечного перерізу балки. Таким чином для балки з довільним поперечним перерізом, симетричним щодо вісей oy та oz , збережуться формули (4.16), в яких в якості J треба взяти момент інерції J_y поперечного перерізу балки.

Кінці балки можуть бути жорстко затиснені, вільно опертими або вільними, залежно від чого слід до рівняння (4.16) додати відповідні умови, наприклад для кінця $x = 0$

$$w(0) = w'(0) = 0, w(0) = w''(0) = 0, w''(0) = w'''(0) = 0.$$

5. Основні рівняння теорії пружності у криволінійних системах координат.

У попередніх розділах були одержані рівняння теорії пружності у декартовій системі координат. З ній зручно працювати, якщо тіло, що розглядається, обмежено координатними площинами $x = const$, $y = const$, $z = const$ або координатними прямими у випадку двовірних задач. Для областей у вигляді клину, циліндру, конусу або сфери зручніше використовувати циліндричну або сферичну системи координат. Розглянемо зараз, як записуються основні рівняння теорії пружності у цих системах координат.

5.1. Циліндрична система координат.

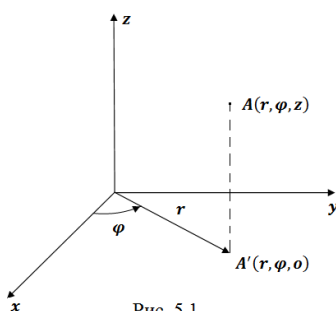
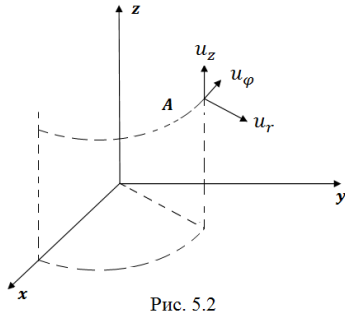


Рис. 5.1

Циліндрична система координат (r, φ, z) : $0 \leq r < \infty$,

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\infty < z < \infty$ пов'язана з декартовою системою координат співвідношеннями (рис.5.1)

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z.$$



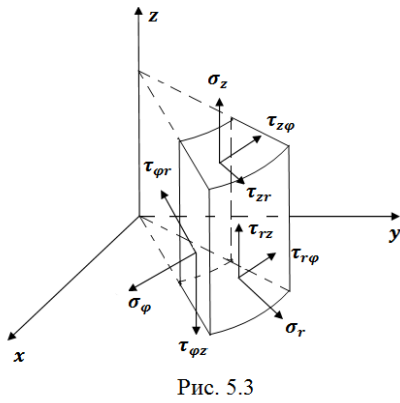
Переміщення точок тіла вздовж відповідних координат будемо позначати u_r, u_φ, u_z відповідно (рис.5.2). Співвідношення Коши у цьому випадку мають вигляд

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} u_r, \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\varphi$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}, \gamma_{\varphi z} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \quad (5.1)$$

Об'ємне розширення

$$\Theta = \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (5.2)$$



Напрямок нормальних та дотичних напружень, які діють по відповідним перетинам, приведені на рис.5.3.

Співвідношення закону Гука (1.6) однакові в усіх системах координат. Напруження зв'язані з переміщеннями співвідношеннями

$$\sigma_r = 2G \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \mu \mu_0 \Theta \right), \sigma_\varphi = 2G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} u_r + \mu \mu_0 \Theta \right),$$

$$\sigma_z = 2G \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \mu \mu_0 \Theta \right)$$

$$\tau_{r\varphi} = G \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} u_\varphi \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right), \tau_{rz} = G \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \tau_{\varphi z} = G \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right) \quad (5.3)$$

де $\mu_0 = (1 - 2\mu)^{-1}$.

Диференціальні рівняння рівноваги у циліндричній системі координат мають вигляд

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) + X_r = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{\varphi r} + X_\varphi = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{zr} + X_z = 0$$

де X_r, X_φ, X_z інтенсивності об'ємних сил, діючих вздовж відповідних напрямків.

Рівняння Ламе у цьому випадку мають вигляд

$$\begin{aligned}\Delta u_r - \frac{1}{r^2} u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \mu_0 \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{X_r}{G} &= 0 \\ \Delta u_\varphi - \frac{1}{r^2} u_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\mu_0}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} + \frac{X_\varphi}{G} &= 0 \\ \Delta u_z + \mu_0 \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{X_z}{G} &= 0,\end{aligned}\tag{5.4}$$

де оператор Лапласа у циліндричній системі координат $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Так само, як у декартовій системі координат, ми можемо розглянути антиплоску задачу (деформацію повздовжнього зсуву) у циліндричній системі координат. Вона реалізується у тілі, яке обмежено циліндричною поверхню з твірною, паралельною вісі Oz . До тіла прикладене зовнішнє дотичне навантаження вздовж вісі Oz , величина якого не залежить від z . Тоді будь-який переріз тіла площиною, яка перпендикулярна вісі Oz , буде деформовано однаковим чином і ми можемо розглядати, наприклад, переріз площиною xOy (рис. 5.4).

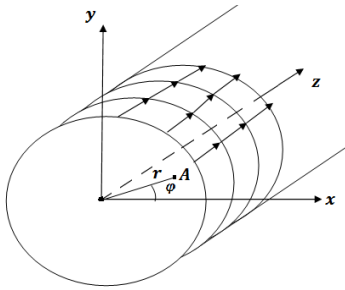


Рис. 5.4

У цьому випадку переміщення $u_r = u_\varphi = 0$, а $u_z = u_z(r, \varphi)$. Останнє мусить задовольняти рівнянню Пуассона

$$\Delta u_z + \frac{X_z}{G} = 0.$$

Відмінними від нуля будуть тільки два напруження

$$\tau_{rz} = G \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad \tau_{\varphi z} = G \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi}.\tag{5.5}$$

Приклад. Розглянемо антиплоску задачу для клина (рис.5.5)

$$0 < r < \infty, 0 < \varphi < \alpha, -\infty < z < \infty.$$

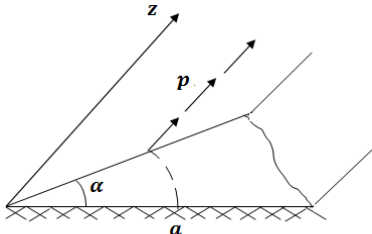


Рис. 5.5

Позначимо $w = u_z(r, \varphi)$. Ця функція повинна бути гармонійною

$$\Delta w(r, \varphi) = 0, \text{ або } r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = 0.\tag{5.6}$$

Припустимо, що нижня основа клина нерухомо закріплена, а до верхньої основи прикладена у точці $r = a$ зосереджена сила величини P

$$w|_{\varphi=0}=0, \tau_{\varphi z}|_{\varphi=\alpha}=G \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi}|_{\varphi=\alpha}=P\delta(r-a). \quad (5.7)$$

Крім того величини $w, r \frac{\partial w}{\partial r}$ мусять бути обмеженими при $r \rightarrow 0$, а при $r \rightarrow \infty$ вони прямувати до нуля.

Для розв'язування задачі використаємо інтегральне перетворення Мелліна за змінною r

$$w_s(\varphi) = \int_0^{\infty} w(r, \varphi) r^{s-1} dr, \quad (5.8)$$

де s комплексний параметр, з формулою обернення

$$w(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} w_s(\varphi) r^{-s} ds, \quad (5.9)$$

де інтегрування ведеться у площині комплексної змінної s вздовж прямої, яка паралельна мнимій вісі, та розташованої в залежності від вимог поведінки функції $w(r, \varphi)$ при $r \rightarrow 0$ та $r \rightarrow \infty$.

Застосуємо інтегральне перетворення (5.8) до рівняння (5.6) та крайових умов (5.7).

Прийдемо до одновимірної крайової задачі

$$w_s''(\varphi) + s^2 w_s(\varphi) = 0, 0 < \varphi < \alpha$$

$$w_s(0) = 0, w_s'(\alpha) = \frac{P}{G} a^s.$$

Загальний розв'язок рівняння є $w_s(\varphi) = A \sin \varphi s + B \cos \varphi s$. З крайових умов знайдемо

$$A = \frac{Pa^s}{Gs \cos \alpha s}, B = 0.$$

Таким чином знайдена трансформанта $w_s(\varphi) = \frac{Pa^s \sin \varphi s}{Gs \cos \alpha s}$.

За формулою обернення (5.9)

$$w(r, \varphi) = \frac{P}{G} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\sin \varphi s}{s \cos \alpha s} \left(\frac{a}{r}\right)^s ds. \quad (5.10)$$

Підінтегральна функція у (5.10) має прости полюси у точках, де $\cos \alpha s = 0$, тобто у

$$\text{точках } s_k = \frac{\pi(2k+1)}{2\alpha}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Візьмемо шлях інтегрування у полосі $-\frac{\pi}{2\alpha} < \gamma < \frac{\pi}{2\alpha}$.

Якщо $r > a$, то $\left(\frac{a}{r}\right)^s \rightarrow 0$ при $\text{Re } s \rightarrow +\infty$. Тому

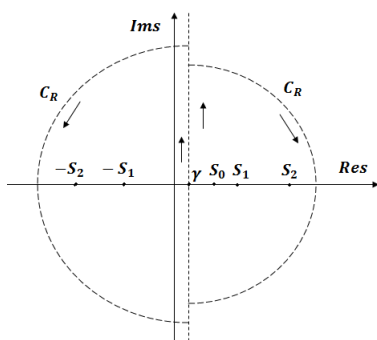


Рис. 5.6

замкнено контур інтегрування у правій півплощині (рис.5.6) та за допомогою теореми про лишки знайдемо

$$w(r, \varphi) = -\frac{P}{G} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re} s \frac{\sin \varphi s}{s \cos \alpha s} \left(\frac{a}{r}\right)^s = \frac{2P}{\pi G} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \sin \frac{\pi(2k+1)}{2\alpha} \varphi \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{\pi}{2\alpha}(2k+1)}$$

Якщо ж $0 < r < a$, то $\left(\frac{a}{r}\right)^s \rightarrow 0$ при $\operatorname{Re} s \rightarrow -\infty$. Замикаючи контур інтегрування у лівій півплощині, получимо

$$w(r, \varphi) = \frac{P}{G} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} s \frac{\sin \varphi s}{s \cos \alpha s} \left(\frac{a}{r}\right)^s = -\frac{2P}{\pi G} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} \sin \frac{\pi(2k-1)}{2\alpha} \varphi \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{\pi}{2\alpha}(2k-1)}.$$

Таким чином ми побудували розв'язок, який має потрібні властивості $w \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ та при $r \rightarrow \infty$.

Зараз, знає переміщення $w(r, \varphi)$ можна знайти напруження за формулами (5.5).

Також у циліндричній системи координат можна розглядати плоскі задачі теорії пружності. Наприклад, плоска деформація виникає у необмеженому тілі, яке обмежено циліндричною поверхнею з направляючою вздовж вісі Oz . При цьому складові зовнішнього навантаження вздовж вісі Oz дорівнюють нулю, а решта складових зовнішнього навантаження не залежать від змінної z . Це дозволяє площинами,

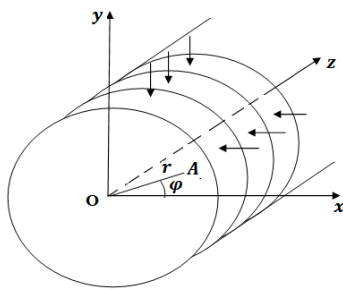


Рис. 5.7

перпендикулярними вісі Oz , розбити тіло на диски, кожен з яких деформується однаковим образом (рис. 5.7).

В такому випадку $u_r = u_r(r, \varphi)$, $u_\varphi = u_\varphi(r, \varphi)$, $u_z = 0$.

Відмінними від нуля будуть тільки напруження

$\sigma_r(r, \varphi)$, $\sigma_\varphi(r, \varphi)$, $\tau_{r\varphi}(r, \varphi)$, які визначаються за формулами

$$(5.3), \text{ де } \Theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}.$$

При цьому переміщення мусять задовольняти скороченої системи рівнянь Ламе

$$\Delta u_r - \frac{1}{r^2} u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \mu_0 \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{X_r}{G} = 0 \quad (5.11)$$

$$\Delta u_\varphi - \frac{1}{r^2} u_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\mu_0}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} + \frac{X_\varphi}{G} = 0$$

де оператор Лапласа $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$

Можна також розглянути задачу плоского напруженого стану, яку реалізується в одному ізольованому диску. Як і у декартові системі координат різниця з плоскою деформацію у співвідношеннях закону Гука.

У циліндричній системі координат двовірні задачі також виникають при розгляданні вісісиметричних задач, коли вісь Oz є віссю симетрії для розглядаємого тіла і зовнішнє навантаження не залежить від координати φ . В цьому випадку

$$u_r = u_r(r, z), u_\varphi = 0, u_z = u_z(r, z).$$

Деформації та напруження також не залежать від змінної φ . Відмінними від нуля будуть тільки напруження $\sigma_r(r, z), \sigma_z(r, z), \tau_{rz}(r, z)$, які визначаються за формулами (5.3), де

$$\Theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

З трьох рівнянь Ламе (5.4) друге обернеться у тотожність, а решту зручніше записати у вигляді

$$(1 + \mu_0) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} u_r \right] + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \frac{X_r}{G} = 0 \quad (5.12)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + (1 + \mu_0) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \mu_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \frac{X_z}{G} = 0.$$

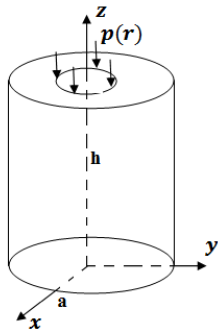


Рис. 5.8

Вісісиметрична задача виникає, наприклад, якщо розглядається пружне тіло у вигляді циліндра радіусу a і висоти h (рис.5.8). Припустимо, що до верхньої основи прикладене вісісиметричне нормальне навантаження $\sigma_z|_{z=h} = -p(r)$, $\tau_{zr}|_{z=h} = 0$. Нижня основа опирається на абсолютно твердий полу простір $z \leq 0$, тобто на ньому виконуються умови ковзкого контакту $u_z|_{z=0} = 0$, $\tau_{zr}|_{z=0} = 0$. Циліндрична поверхня $r = a$ може бути

- вільною від напружень $\sigma_r|_{r=a} = 0$, $\tau_{rz}|_{r=a} = 0$;
- знаходиться в умовах ковзкого контакту $u_r|_{r=a} = 0$, $\tau_{rz}|_{r=a} = 0$;
- нерухомо закріплена $u_r|_{r=a} = 0$, $u_z|_{r=a} = 0$.

Для розв'язання вісісиметричних задач у циліндричній системі координат використовується інтегральне перетворення Ханкеля.

5.2. Сферична система координат.

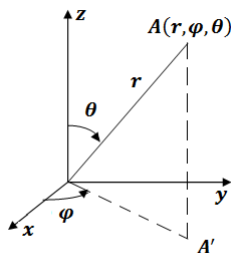


Рис. 5.9

Сферична система координат (r, φ, θ) : $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ пов'язана з декартовою системою координат співвідношеннями (рис.5.9)
 $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$.

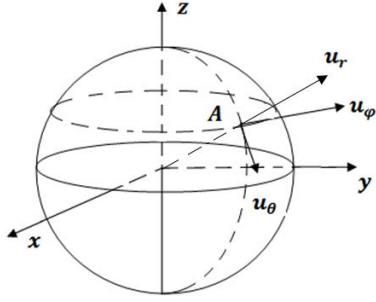


Рис. 5.10

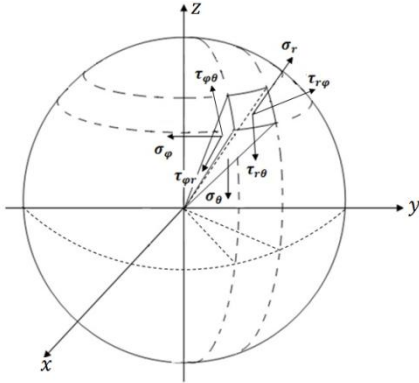


Рис. 5.11

Переміщення точок тіла вздовж відповідних координат будемо позначати u_r, u_φ, u_θ відповідно (рис.5.10).

Співвідношення Коши мають вигляд

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta \frac{1}{r} u_\theta, \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r \\ \gamma_{r\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} u_\varphi + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}, \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}, \\ \gamma_{\varphi\theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta u_\varphi + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right)\end{aligned}\quad (5.13)$$

Напрямок нормальних та дотичних напружень, які діють по відповідним перетинам, приведені на рис.5.11. Напруження зв'язані з переміщеннями співвідношеннями

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 2G \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \mu \mu_0 \Theta \right), \sigma_\varphi = 2G \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r + \operatorname{ctg} \theta u_\theta + \mu \mu_0 \Theta \right), \\ \sigma_\theta &= 2G \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) + \mu \mu_0 \Theta \right)\end{aligned}\quad (5.14)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{G}{r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} u_\theta \right) + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right), \tau_{r\varphi} = \frac{G}{r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} u_\varphi \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right), \gamma_{\varphi\theta} = \frac{G}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta u_\varphi + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right)$$

$$\text{де } \Theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right).$$

Диференціальні рівняння рівноваги мають вигляд

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} (2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_\theta + \operatorname{ctg} \theta \tau_{r\theta}) + X_r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (3\tau_{r\varphi} + 2\operatorname{ctg} \theta \tau_{\varphi\theta}) + X_\varphi &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (3\tau_{r\theta} + \operatorname{ctg} \theta (\sigma_\theta - \sigma_\varphi)) + X_\theta &= 0\end{aligned}\quad (5.15)$$

де X_r, X_φ, X_θ інтенсивності об'ємних сил, діючих вздовж відповідних напрямків.

Оператор Лапласа у сферичній системі координат має вигляд

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] = \frac{1}{r^2} \tilde{\Delta}.$$

Рівняння Ламе мають вигляд

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}u_r - 2 \left[u_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] + \mu_0 r^2 \frac{\partial \Theta}{\partial r} + r^2 \frac{X_r}{G} &= 0 \\
\tilde{\Delta}u_\theta + 2 \left[\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{2 \sin^2 \theta} u_\theta - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] + \mu_0 r \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + r^2 \frac{X_\theta}{G} &= 0 \\
\tilde{\Delta}u_\varphi + \frac{2}{\sin \theta} \left[\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{1}{2 \sin \theta} u_\varphi \right] + \mu_0 r \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} + r^2 \frac{X_\varphi}{G} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Більш прості співвідношення отримуємо, якщо задача є вісісемітричною, тобто вісь Oz є віссю симетрії для розглядаемого тіла і прикладене до тіла зовнішнє навантаження не залежить від змінної φ . В цьому випадку $u_\varphi = 0, \tau_{r\varphi} = 0, \tau_{\theta\varphi} = 0$, а решта переміщень та напружень не залежать від змінної φ . Відмінні від нуля напруження зв'язані з переміщеннями формулами

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= 2G \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \mu \mu_0 \Theta \right), \sigma_\varphi = 2G (u_r + \operatorname{ctg} \theta u_\theta + \mu \mu_0 \Theta), \sigma_\theta = 2G \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) + \mu \mu_0 \Theta \right) \\
\tau_{r\theta} &= \frac{G}{r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} u_\theta \right) + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right),
\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\text{де } \Theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta).$$

Переміщення мусять задовольняти спрощений системі рівнянь Ламе

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}u_r - 2 \left[u_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) \right] + \mu_0 r^2 \frac{\partial \Theta}{\partial r} + r^2 \frac{X_r}{G} &= 0 \\
\tilde{\Delta}u_\theta + 2 \left[\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{2 \sin^2 \theta} u_\theta \right] + \mu_0 r \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + r^2 \frac{X_\theta}{G} &= 0 \\
\text{де } \tilde{\Delta} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right).
\end{aligned} \tag{5.18}$$

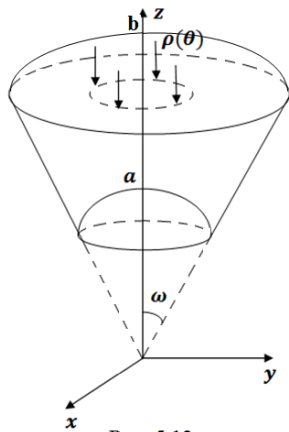


Рис. 5.12

Вісісемітрична задача виникає, наприклад, якщо розглядається пружне тіло у вигляді конуса, двічі зрізаного по сферичним поверхням $a \leq r \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \omega$ (рис. 5.12).

Припустимо, що до верхньої сферичної поверхні $r = b$ прикладене вісісемітричне нормальне навантаження $\sigma_r|_{r=b} = p(\theta), \tau_{r\theta}|_{r=b} = 0, 0 \leq \theta \leq \omega$.

Нижня сферична поверхня $r = a$ вільна від напружень

$$\sigma_r|_{r=a} = 0, \tau_{r\theta}|_{r=a} = 0, 0 \leq \theta \leq \omega.$$

Відносно конічної поверхні $\theta = \omega$ припустимо, що вона

знаходиться в умовах ковзкого контакту

$$u_\theta|_{\theta=\omega}=0, \tau_{\theta r}|_{\theta=\omega}=0, a \leq r \leq b.$$

Найбільш простою задачею у сферичній системі координат є вісісемитрична задача кручення.

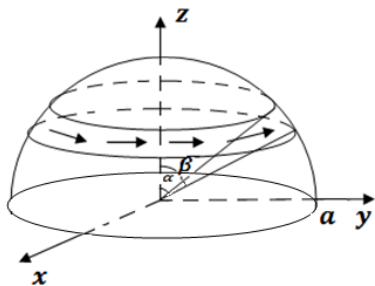


Рис. 5.13

Розглянемо вісісемитрично тіло, наприклад, півкулю

$$0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \text{ до якої прикладене вісісемитричне}$$

зовнішнє навантаження, яке викликає тільки кручення тіла (рис.5.13). В цьому випадку відмінні від нуля тільки одне переміщення $u_\varphi = u_\varphi(r, \theta)$ та два дотичних напруження

$$\tau_{r\varphi} = Gr \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} u_\varphi \right), \tau_{\theta\varphi} = Gr \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \cot \theta u_\varphi \right).$$

З системи рівнянь Ламе (5.16) залишиться тільки одне рівняння

$$\tilde{\Delta} u_\varphi - \frac{1}{\sin^2 \theta} u_\varphi + r^2 \frac{X_\varphi}{G} = 0,$$

$$\text{де } \tilde{\Delta} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

До цього рівняння слід додати відповідні крайові умови. Нехай, наприклад, нижня основа розглядаємої півкулі нерухомо закріплена $u_\varphi|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0, 0 < r < a$, а до частки

поверхні півкулі прикладене дотичне навантаження, яке викликає кручення

$$\tau_{r\varphi}|_{r=a} = p(\theta), \alpha < \theta < \beta.$$

Також можна вважати, що об'ємне навантаження відсутнє $X_\varphi = 0$.

Список рекомендованої літератури

1. Амензаде Ю.А. Теория упру гости. – М.: Высш. Школа, 1981. – с.288.
2. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – с. 939.
3. Новацкий В. Теория упругости. –М.: Мир, 1975. –с.872.
4. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1970.– 285.
5. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Гостехтеориздат, 1934. – с.172.
6. Трефц Е. Математическая теория упругости. – М.: Гостехтеориздат, 1934. – с.172.

Для першочергового вивчення матеріалу рекомендується [4,5], а для більш глибокого – [1,2,3,6].