А. Є. БАБЕНКО, М. І. БОБИР,
С. Л. БОЙКО, О. О. БОРОНКО

ТЕОРІЯ ПРУЖНОСТІ

Частина 1

А. Є. БАБЕНКО, М. І. БОБИР,
С. Л. БОЙКО, О. О. БОРОНКО

ТЕОРІЯ ПРУЖНОСТІ

Частина 1

Підручник

Затверджено Міністерством освіти і науки України

Київ
«Основа»
2009

УДК 539.3(075.8)
ББК 22.251я73
Т33

Затверджено Міністерством освіти і науки України як підручник для студентів вищих навчальних закладів (Лист № 1.4/18-Г-2453 від 02.12.08 р.)

Автори:
Бабенко А. Є., д-р т. н., проф.;
Бобир М. І., д-р т. н., проф.;
Бойко С. Л., к. т. н.;
Боронко О. О., д-р т. н., проф.

Рецензенти:
Львов Г. І., д-р т. н., проф., завідувач кафедри динаміки і міцності машин Харківського національного технічного університету «ХПІ»;
Піскунов В. Г., д-р т. н., проф., завідувач кафедри опору матеріалів та машинознавства Національного транспортного університету;
Лепіхін П. П., д-р ф.-м. н., проф., заступник директора з наукової роботи Інституту проблем міцності ім. Г.С. Писаренка НАН України.

Бабенко А. Є., Бобир М. І., Бойко С. Л., Боронко О. О.
Т33 **Теорія пружності.** Частина 1: Підруч. – К.: Основа, 2009. – 244 с.

ISBN 978-966-699-478-6

Підручник написано в результаті викладання курсу «Теорія пружності» протягом майже сорока років для студентів механіко-машинобудівного факультету спеціальності «Динаміка і міцність машин». Підручник має на меті подати курс з висвітленням фізичного змісту на основі сучасного математичного апарата. Викладання теоретичного матеріалу подано послідовно, щоб допомогти студентам засвоїти і оволодіти математичними методами. Підручник містить велику кількість задач з інженерним нахилом для активного оволодіння курсом, до більшості задач наведені розв'язки. Підручник буде корисним для студентів вищих навчальних закладів III–IV рівнів акредитації для всіх спеціальностей, які повинні володіти методами розрахунку конструкцій і конструктивних елементів на міцність.

УДК 539.3(075.8)
ББК 22.251я73

ISBN 978-966-699-478-6

Основні поняття з математики

У теорії пружності основними фізичними параметрами, які визначають напружено-деформований стан тіла як термодинамічної системи, є температура, ентропія, маса, робота, енергія, переміщення, швидкість, сила, деформація і напруження.

Фізичним величинам відповідають математичні об'єкти – скаляри, вектори і тензори, які відображають їхні властивості. Для кожної з цих величин як математичних об'єктів визначені відповідні алгебраїчні операції.

0.1 Скаляри

Скаляри—це величини, для визначення яких достатньо одного числа, наприклад: температура, ентропія, маса, робота, енергія. Порівнюватися можуть взагалі такі величини, які мають однакову розмірність. Скаляри вважаються однаковими, якщо збігаються їхні числові значення. Величина скаляра не залежить від системи координат.

0.2 Вектори

Вектор – це величина, для визначення якої крім числового значення треба задати її напрямок, наприклад: переміщення, швидкість, сила, момент сил. Вектор $\vec{a}$ визначається довжиною або модулем $|\vec{a}|$ та напрямком і графічно зображується стрілкою (рис.1). Модулем вектора називається його довжина. Нульовим вектором називається вектор, модуль якого дорівнює нулю і йому можна приписати будь-який напрямок, оскільки він не визначений.

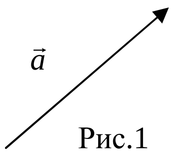

Рис.1

Два вектори рівні між собою, якщо вони мають однакові модулі і напрямки. Вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, ..., $\vec{a}_n$ називаються лінійно незалежними, якщо сума їхніх добутків на скаляри $\beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_n$ дорівнює нулю

$$\beta_1\vec{a}_1 + \beta_2\vec{a}_2 + \beta_3\vec{a}_3 + ... + \beta_n\vec{a}_n = 0, \quad (0.2.1)$$

лише за умови, що всі скаляри одночасно дорівнюють нулю

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = ... = \beta_n = 0.$$

Якщо існує лінійна залежність між векторами, тобто співвідношення (0.2.1) виконується за умови, що не всі β_k одночасно дорівнюють нулю, то принаймні один вектор може бути виражений через інші.

Існує фундаментальне положення лінійної алгебри, яке стверджує: в n вимірному просторі існує система n лінійно незалежних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, ..., \vec{e}_n$ і будь-який $n+1$-й вектор $\vec{b}$ може бути однозначно поданий у вигляді лінійної форми

$$\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 + ... + b_n\vec{e}_n.$$

Вектор можна визначити за допомогою системи координат. У фізичних задачах найчастіше використовується тривимірний простір, тому далі перетворення розглядається в тривимірному просторі. Систему координат можна задати, вибравши довільно лінійно незалежну систему векторів, їх кількість дорівнює кількості вимірів простору. Ці вектори створюють базис системи координат. Далі використовуються декартові координати. Вектори базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ взаємно ортогональні і мають одиничну довжину $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$, де величина

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j), \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

називається *символом Кронекера*. Будь-який вектор $\vec{a}$ може бути поданий як лінійна комбінація базисних векторів

$$\vec{a} = \vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3, \quad \vec{a} = \vec{e}_i a_i.$$

Знак суми за правилом Ейнштейна не ставиться. У подібних формулах вважається, що коли індекс повторюється, то береться сума, кількість доданків якої дорівнює розмірності простору. Величини a_1, a_2, a_3 називаються *компонентами вектора.* В декартовій системі вони співпадають з ортогональними проекціями вектора на осі координат (рис.2). Сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є третій вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, який є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис.3), або вектор, який замикає трикутник (рис.4).

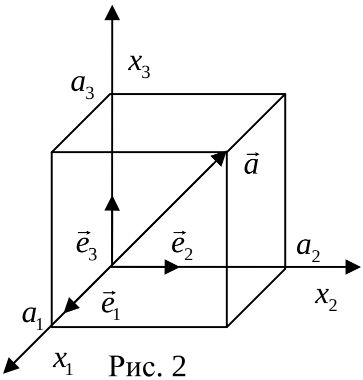

Рис. 2

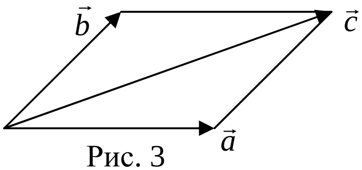

Рис. 3

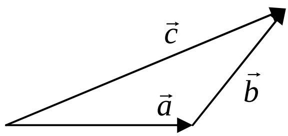

Рис. 4

Операція додавання векторів є:

1) комутативною

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$

тобто при складанні векторів результат не залежить від порядку доданків;

2) асоціативною

$$\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

За визначенням вектор $-\vec{a}$ означає вектор, модуль якого дорівнює $|-\vec{a}| = |\vec{a}|$, але напрямлений в протилежному напрямку вектора $\vec{a}$. Тому різниця $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ означає суму векторів $\vec{d} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$ (рис.5). При використанні координатної форми додавання векторів $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

їхні компоненти складаються

$$\vec{e}_k c_k = \vec{e}_k(a_k + b_k).$$

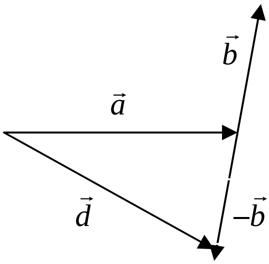

Рис. 5

Добуток вектора $\vec{a}$ на скаляр β є вектором $\vec{b} = \beta\vec{a}$, напрямок якого збігається з $\vec{a}$ при $\beta > 0$, а модуль в β разів більшім ніж $|\vec{a}|$, тобто $|\vec{b}| = \beta|\vec{a}|$. При використанні координатної форми компоненти вектора множаться на скаляр $\vec{e}_k b_k = \vec{e}_k(\beta a_k)$.

Добутки векторів на відміну від скалярів визначаються по-різному і мають різні типи: перший—скалярний, другий—векторний і окремо добутки декількох векторів, з яких найчастіше використовується добуток трьох. Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначається $\vec{a}\cdot\vec{b}$, і є скаляром, який дорівнює добутку їх модулів на косинус кута θ між векторами $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$. З визначення випливає: якщо один з векторів одиничний, наприклад $|\vec{a}| = 1$, то скалярний добуток дорівнює

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{b}|\cos\theta,$$

тобто проекції другого вектора, наприклад $\vec{b}$, на напрямок $\vec{a}$ (рис.6).Операція скалярного добутку має наступні властивості— вона є:

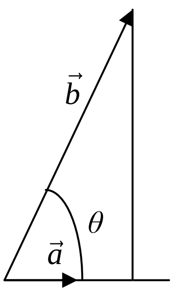

Рис. 6

1) комутативною $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$, тобто, результат не залежить від порядку множників;

2) дистрибутивною $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$.

З визначення скалярного добутку випливає, що умова перпендикулярності двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначається рівністю нулю їх скалярного добутку

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|(\cos\pi/2) = 0.$$

При використанні декартової системи координат, внаслідок попарної ортогональності базисних векторів, скалярний добуток у тривимірному просторі визначається за формулою

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначається $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ і є вектором, модуль якого дорівнює добутку їх модулів на синус кута θ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ і дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Векторний добуток $\vec{c}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, і напрямлений в ту сторону, з якої поворот першого множника до другого на менший кут виконується проти ходу годинникової стрілки (рис.7).

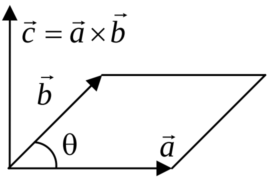

Рис. 7

Векторний добуток не комутативний $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, але він задовольняє закон дистрибутивності $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$. Необхідною і достатньою умовою паралельності векторів є рівність нулю їх векторного добутку $\vec{a} \times \vec{b} = 0$. Це випливає з того, що кут між паралельними векторами $\theta = 0$, тому $\sin 0 = 0$. При використанні декартової системи координат векторний добуток може бути поданий у вигляді

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}_1(a_2b_3 - a_3b_2) + \vec{i}_2(a_3b_1 - a_1b_3) + \vec{i}_3(a_1b_2 - a_2b_1).$$

Крім того, в багатьох випадках використовується подання векторного добутку за допомогою символів Леві-Чівіта ϵ_{ijk} які визначаються таким правилом:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad i,j,k \quad \text{створюють парну перестановку із} \quad 1,2,3; \\ -1, & \quad i,j,k \quad \text{створюють непарну перестановку із} \quad 1,2,3; \\ 0, & \text{якщо два індекса збігаються.} \end{cases}$$

Тоді $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \epsilon_{jkm}\vec{i}_j a_k b_m$ і, отже, $c_j = \epsilon_{jkm} a_k b_m$.

Розглянемо операції добутку трьох векторів. Найчастіше використовуються змішаний і подвійний векторні добутки.

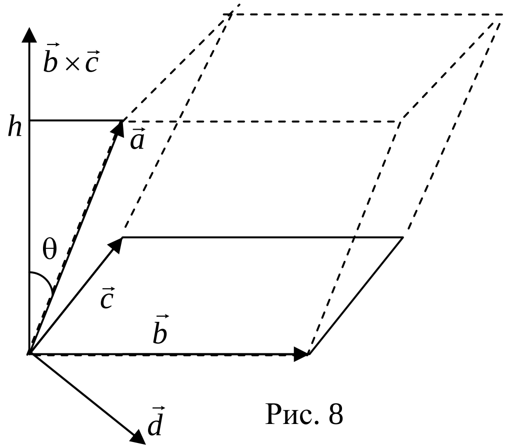

Рис. 8

Змішаний добуток–це скаляр

$$V = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = $$
$$= \left|\vec{a}\times\vec{b}\right||\vec{c}|\cos\theta = $$
$$= \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|h,$$

який дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис.8). В координатній формі він дорівнює визначнику, компонентами якого є проекції векторів

$$V = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Подвійний векторний добуток $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ є вектором $\vec{d}$, який лежить в площині векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$ і перпендикулярний до вектора $\vec{a}$. Вектор $\vec{d}$ можна знайти за формулою

$$\vec{d} = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

0.3 Тензори в евклідовому просторі

Тензором нульового рангу вважається скаляр, який повністю визначається одним числом. Тензором першого рангу є вектор, який може бути поданий як лінійна комбінація базисних векторів і визначається своїми компонентами, кількість яких дорівнює кількості вимірів простору. Якщо простір n–вимірний, то кожний вектор $\vec{a}$ можна подати у вигляді лінійної комбінації базисних векторів

$$\vec{a} = \vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \ldots + \vec{e}_n a_n, \;\; \vec{a} = \vec{e}_i a_i.$$

Компоненти вектора a_i можна визначити через скалярні добутки

$$a_1 = \vec{a} \cdot \vec{e}_1, \;\; a_2 = \vec{a} \cdot \vec{e}_2, \ldots, \;\; a_n = \vec{a} \cdot \vec{e}_n.$$

При повороті системи координат змінюються вектори локального базису, що зумовлює зміну проекцій або компонент вектора. Залежність компонент вектора від вибору координат ускладнює загальну картину оскільки, їх вибір може бути випадковим і відображає зайві деталі. Головне завдання тензорного числення полягає у тому, щоб виділити суть об'єкта, який вивчається, і відкинути другорядні деталі, викликані випадковим вибором системи координат.

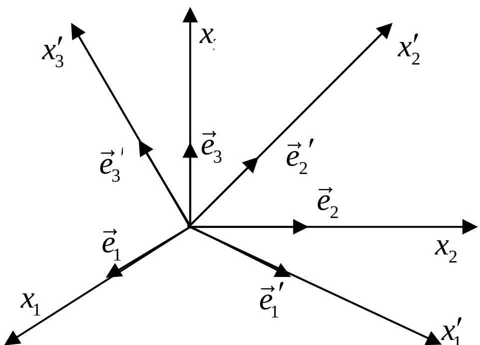

Рис. 9

Тому розглядається задача: задано вектор $\vec{a}$ в старій системі координат x_1, x_2 ,x_3, тобто відомі його компоненти a_1, a_2, a_3, задано нову систему координат x_1', x_2', x_3'. Треба знайти проекції вектора $\vec{a}$ — a_1', a_2', a_3' в новій системі. Положення нової системи координат відносно старої визначається проекціями векторів локального базису нової системи на осі старої системи (рис.9). Локальні вектори нового базису, як і будь-який вектор, можна подати через вектори старого базису у вигляді лінійних форм

$$\vec{e}_1' = \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{12}\vec{e}_2 + \alpha_{13}\vec{e}_3,$$

$$\vec{e}_2' = \alpha_{21}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2 + \alpha_{23}\vec{e}_3,$$

$$\vec{e}_3' = \alpha_{31}\vec{e}_1 + \alpha_{32}\vec{e}_2 + \alpha_{33}\vec{e}_3,$$

$$\vec{e}_i' = a_{ij}\vec{e}_j, \quad i,j = 1,2,3.$$

Коефіцієнти α_{ij}–це проекції векторів нового локального базису $\vec{e}_i'$ на вектори старого базису $\vec{e}_j$. Вони можуть бути визначені через скалярний добуток $a_{ij} = \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j$. З коефіцієнтами α_{ij} пов'язана матриця перетворення системи координат. Компоненти кожного рядка матриці є проекціями нових ортів на старі, а кожний стовпчик матриці–проекціями старих ортів на нові. Оскільки локальні вектори беруться нормованими, тобто одиничної довжини, і взаємно ортогональними, то скалярний добуток кожного рядка або стовпчика самого на себе дорівнює одиниці, а на будь-який інший–нулю:

$$|\alpha_{ij}| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\alpha_{ij}\alpha_{kj} = \alpha_{ji}\alpha_{jk} = \delta_{ik}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j), \end{cases}$$

де δ_{ij}–символ Кронекера. За правилом Ейнштейна береться сума по тих індексах, які повторюються. Визначник матриці дорівнює ± 1. Додатний знак означає, що орієнтація системи зберігається, а від'ємний – що орієнтація репера (локального базису взаємно ортогональних векторів) змінюється (права на ліву або навпаки). Таким чином, матриця ортонормована і її обернена дорівнює транспонованій $A^{-1} = A'$. Старі орти через нові виражаються формулами

$$\vec{e}_1 = \alpha_{11}\vec{e}_1' + \alpha_{21}\vec{e}_2' + \alpha_{31}\vec{e}_3',$$
$$\vec{e}_2 = \alpha_{12}\vec{e}_1' + \alpha_{22}\vec{e}_2' + \alpha_{32}\vec{e}_3',$$
$$\vec{e}_3 = \alpha_{13}\vec{e}_1' + \alpha_{23}\vec{e}_2' + \alpha_{33}\vec{e}_3',$$
$$\vec{e}_i = a_{ji}\vec{e}_j', \ \ i,j = 1,2,3.$$

Для того щоб знайти, як змінюються компоненти вектора $\vec{x}$ при повороті системи координат, його компоненту в новій системі можна виразити через скалярний добуток $x_i' = \vec{x} \cdot \vec{e}_i'$. Орт нової системи виражається через орти старої системи

$$\vec{e}_i' = a_{ij}\vec{e}_j,$$
$$x_i' = \vec{x} \cdot \vec{e}_i' = \vec{x} \cdot a_{ij}\vec{e}_j = a_{ij}\vec{x} \cdot \vec{e}_j = a_{ij}x_j.$$

Таким чином, одержують формули, які визначають компоненти вектора в новій системі:

$$x_i' = a_{ij}x_j, \tag{0.3.1}$$
$$x_1' = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3,$$
$$x_2' = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3,$$

$$x'_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3.$$

За визначенням тензором першого рангу називається математичний об'єкт, який визначається занумерованими одним індексом числами x_1, x_2, x_3, які при повороті системи координат перетворюються за законом (0.3.1). Ці числа називаються компонентами тензора.

У фізичних і геометричних задачах використовуються об'єкти, які приводять до тензорів вищих рангів. Це можна бачити з такого простого прикладу. Рівняння центральної поверхні другого порядку має вигляд

$$b_{ij}x_ix_j = 1, \quad i,j = 1,2,3,$$

де, як завжди, мають на увазі суму по індексах i,j, які повторю ються. Матриця коефіцієнтів вважається симетричною $b_{ij} = b_{ji}$. При повороті системи координат нові координати виражаються через старі за формулами $x'_m = \alpha_{mi}x_i$, старі через нові–$x_i = \alpha_{mi}x'_m$. Після підстановки у вираз для квадратичної форми одержуємо

$$b_{ij}\alpha_{mi}x'_m\alpha_{nj}x'_n = 1, \quad i,j = 1,2,3.$$

Порівняння з виразом для квадратичної форми $b'_{mn}x'_mx'_n = 1$ дає формули для перетворення її коефіцієнтів при переході до нових координат

$$b'_{mn} = \alpha_{mi}\alpha_{nj}b_{ij}. \tag{0.3.2}$$

За визначенням тензором другого рангу називаються занумеровані двома індексами числа b_{ij}, які при повороті системи координат перетворюються за законом (0.3.2). Ці числа називаються компонентами тензора. Умова симетрії $b_{ij} = b_{ji}$ не обов'язкова.

Довільний тензор другого рангу можна одержати як добуток двох тензорів першого рангу. Якщо взяти два вектори $\vec{x}(x_1,x_2,x_3)$ і $\vec{y}(y_1,y_2,y_3)$ та перебрати всі можливі попарні добутки їх координат, то одержать величини $b_{ij} = x_iy_j$, які перетворюються при повороті системи координат. Враховуючи, що $x'_m = \alpha_{mi}x_i$, $y'_n = \alpha_{nj}y_j$ і в новій системі

$$b'_{mn} = x'_my'_n,$$

одержуємо

$$b'_{mn} = \alpha_{mi}\alpha_{nj}x_iy_j = \alpha_{mi}\alpha_{nj}b_{ij}.$$

Звідси випливають формули перетворення

$$b'_{mn} = \alpha_{mi}\alpha_{nj}b_{ij}.$$

Одержані формули доводять, що величини b_{ij} є компонентами тензора другого рангу. Важливим є те, що тензор другого рангу завжди визначає лінійний оператор $\hat{b}$, який кожному вектору $\vec{x}$ ставить у відповідність вектор $\vec{y}$

$$\vec{y} = \hat{b}\vec{x}.$$

При цьому виконуються умови

$$\hat{b}(\vec{x}+\vec{z}) = \hat{b}\vec{x}+\hat{b}\vec{z}, \quad \hat{b}(a\vec{x}) = a\hat{b}\vec{x}.$$

Тут $\vec{x}$ і $\vec{z}$ довільні вектори, а a довільне скалярне число. Оскільки оператор лінійний, то

$$\hat{b}\vec{x} = \hat{b}(\vec{e}_1x_1+\vec{e}_2x_2+\vec{e}_3x_3) = x_1\hat{b}\vec{e}_1+x_2\hat{b}\vec{e}_2+x_3\hat{b}\vec{e}_3.$$

При переході до координатної форми вектори $x_i\hat{b}\vec{e}_i$ можуть бути задані у вигляді розкладу по ортах

$$\hat{b}\vec{e}_1 = b_{11}\vec{e}_1+b_{21}\vec{e}_2+b_{31}\vec{e}_3,$$

$$\hat{b}\vec{e}_2 = b_{12}\vec{e}_1+b_{22}\vec{e}_2+b_{32}\vec{e}_3,$$

$$\hat{b}\vec{e}_3 = b_{13}\vec{e}_1+b_{23}\vec{e}_2+b_{33}\vec{e}_3,$$

$$\hat{b}\vec{e}_i = b_{ji}\vec{e}_j.$$

Одержані співвідношення показують що лінійний оператор у координатній формі може бути поданий матрицею. Компоненти матриці перетворення залежать від вибору системи координат і визначаються як скалярний добуток, наприклад $\vec{e}_3\cdot\hat{b}\vec{e}_1 = b_{31}$.

В загальному випадку $b_{ij} = \vec{e}_i\cdot\hat{b}\vec{e}_j$. Щоб знайти як змінюються компоненти, достатньо записати попередню формулу в новій координатній системі $b'_{mn} = \vec{e}'_m\cdot\hat{b}\vec{e}'_n$ і використати формули для перетворення проекцій векторів $\vec{e}'_m = \alpha_{mi}\vec{e}_i$, $\vec{e}'_n = \alpha_{nj}\vec{e}_j$. Тоді

$$b'_{mn} = \alpha_{mi}\alpha_{nj}\vec{e}_i\cdot\hat{b}\vec{e}_j = \alpha_{mi}\alpha_{nj}b_{ij}.$$

Одержана формула перетворення збігається з правилом перетворення тензора

$$b'_{mn} = \alpha_{mi}\alpha_{nj}b_{ij},$$

тому компоненти b_{ij} створюють тензор другого рангу. Дія лінійного оператора на вектор в координатній формі приводить до його перетворення

$$y_i = b_{ij}x_j,$$

$$y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3,$$

$$y_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3,$$

$$y_3 = b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3.$$

Це перетворення в загальному випадку полягає в повороті вектора і зміні його довжини.

Часто суттєвим є частковий випадок лінійного оператора $\hat{b}$, коли він приводить до множення кожного вектора на одне і саме число λ, тобто змінюється тільки довжина вектора, а напрямок не змінюється. В цьому випадку $y_i = \lambda x_i$, матриця компонент цього оператора $\hat{b}$ не залежить від системи координат і має вид

$$\vec{y} = \hat{b}\vec{x} = \lambda\vec{x}, \quad \|b_{ij}\| = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

При $\lambda = 1$ оператор називається одиничним $\hat{b} = E$ і перетворення є тотожним $E\vec{x} = \vec{x}$, а відповідна йому матриця має вид

$$\|b_{ij}\| = \|\delta_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

Для тензорів визначені такі алгебраїчні операції:

1) операція додавання, яка визначена для тензорів одного рангу $\hat{c} = \hat{a} + \hat{b}$, за визначенням компоненти нового тензора дорівнюють сумі компонент $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$;

2) тензорний добуток це тензор, компонента якого є добутком компоненти одного тензора на компоненту другого тензора, на приклад добуток тензора першого рангу a_i на тензор другого рангу b_{jk}, становить собою всі можливі добутки кожної компоненти a_i на кожну компоненту b_{jk}. Ці добутки залежать від трьох індексів

і створюють тензор третього рангу, причому він залежить від порядку множників і, отже, порядку індексів $c_{ijk} = a_i b_{jk}$;

3) операція згортання, наприклад, задано тензор третього рангу a_{ijk} його згорткою по індексах j, k і є тензор a_{imm}, компоненти якого дорівнюють сумі компонент тензора a_{ijk} при фіксованих індексах i і усіх можливих компонентах, у яких однакові індекси $j = m,\ k = m$, тобто

$$a_{imm} = a_{i11} + a_{i22} + a_{i33}.$$

Ця сума залежить тільки від одного індекса і є тензором першого рангу.

0.4 Власні числа і власні вектори тензора

З геометричної точки зору дія тензора на вектор як лінійного оператора $\vec{y} = \hat{b}\vec{x}$ приводить до повороту вектора і зміни його довжини. В багатьох задачах необхідно знати вектори, напрямок яких не змінюється, а змінюється лише довжина $\vec{y} = \lambda\vec{x}$. Для таких векторів $\hat{b}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, а в координатній формі $b_{ij}x_j = \lambda x_i$, оскільки $x_i = \delta_{ij}x_j$, то з попереднього випливає

$$(b_{ij} - \lambda\delta_{ij})x_j = 0,$$

$$(b_{11} - \lambda)x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = 0,$$

$$b_{21}x_1 + (b_{22} - \lambda)x_2 + b_{23}x_3 = 0,$$

$$b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + (b_{33} - \lambda)x_3 = 0.$$

Одержана однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь має нетривіальний розв'язок тільки при умові, що її визначник дорівнює нулю

$$|b_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0,$$

$$\begin{vmatrix} (b_{11} - \lambda) & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & (b_{22} - \lambda) & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & (b_{33} - \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник одержуємо характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0,$$

його коефіцієнтами є інваріанти тензора

$$I_1 = b_{ii} = b_{11} + b_{22} + b_{33},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = |b_{ij}|.$$

Дійсні корені характеристичного рівняння показують, у скільки разів змінилася довжина відповідних векторів. Напрямок відповідних векторів визначається розв'язками однорідної системи.

0.5 Розклад лінійного оператора

Кожному лінійному оператору A з матрицею $\|a_{ij}\|$ можна поставити у відповідність спряжений оператор A' з транспонованою матрицею $\|a_{ji}\|$. Оператор, і відповідна йому матриця, називаються симетричними, якщо $A = A'$, і кососиметричними, якщо $A = -A'$. Оператор N і відповідна матриця називаються ортогональними, якщо $NN' = E$, де E–одинична матриця $e_{ij} = \delta_{ij}$, наприклад

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

тобто транспонована матриця дорівнює оберненій $N' = N^{-1}$. Лінійний оператор має такі властивості:

1) кожний неособливий лінійний оператор A, у відповідність якому можна поставити квадратну матрицю $\|a_{ij}\|$, може бути однозначно розкладений на суму $A = S + K$, симетричного $S = \frac{1}{2}(A + A')$ і кососиметричного оператора $K = \frac{1}{2}(A - A')$;

2) існують полярні розклади неособливого лінійного оператора A, які мають вигляд $A = SN$ і $A = N_1S_1$, де S і S_1–симетричні додатні оператори, а N і N_1– ортогональні оператори. Симетричні

додатні матриці однозначно визначаються співвідношеннями

$$S^2 = AA', \qquad S_1^2 = A'A.$$

0.6 Основні поняття тензорного аналізу

За визначенням вважається, що задано тензорне поле, якщо у кожній точці простору задані компоненти тензора як функції координат точки, наприклад $b_{ij} = b_{ij}(x_1,x_2,x_3)$.

Якщо ранг тензора дорівнює нулю, то поле є скалярним, тобто $f = f(x_1,x_2,x_3)$. Характеристикою скалярного поля є поверхні, на яких поле має однакову величину

$$f(x_1,x_2,x_3) = C.$$

Такі поверхні називаються поверхнями рівня, або ізоповерхнями. Найбільш розповсюдженою характеристикою швидкості зміни поля є його диференціальна характеристика —*градієнт поля*, який є вектором

$$grad f = \vec{e}_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \vec{e}_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \vec{e}_3\frac{\partial f}{\partial x_3} = \vec{e}_k\frac{\partial f}{\partial x_k}$$

і дає можливість знайти швидкість зміни поля в будь-якому напрямку. Швидкість зміни поля в заданому напрямку дорівнює проекції градієнта на заданий напрямок. Градієнт поля може бути виражений через оператор набла ∇

$$grad f = \nabla f = \vec{e}_k\frac{\partial}{\partial x_k}f = \vec{e}_k\frac{\partial f}{\partial x_k} = \vec{e}_k f_{,k}.$$

Дивергенцією векторного поля $\vec{a}(\vec{x})$ в точці називається величина

$$div\vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \frac{\partial a_k}{\partial x_k} = a_{k,k},$$

яку можна подати через оператор набла

$$div\vec{a} = \nabla\cdot\vec{a} = \vec{e}_k\frac{\partial}{\partial x_k}\cdot\vec{e}_m a_m =$$

$$= \vec{e}_k\cdot\vec{e}_m\frac{\partial a_m}{\partial x_k} = \delta_{km}\frac{\partial a_m}{\partial x_k} = \frac{\partial a_k}{\partial x_k} = a_{k,k}.$$

Ротором вектора $\vec{a}$ називається вектор $\vec{b}$, який позначається $rot\ \vec{a}$ і визначається диференціальним оператором

$$b_i = \frac{\partial a_k}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_k},$$

$$b_1 = \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} = a_{3,2} - a_{2,3},$$

$$b_2 = \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} = a_{1,3} - a_{3,1},$$

$$b_3 = \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} = a_{2,1} - a_{1,2}.$$

Вектор $\vec{b} = rot\ \vec{a}$ може бути подано через символічний оператор набла $\nabla = \vec{e}_i\ \partial / \partial x_i$

$$\vec{b} = rot\,\vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \times \vec{e}_k a_k = \vec{e}_j \times \vec{e}_k \frac{\partial a_k}{\partial x_j}.$$

Векторний добуток $\vec{e}_j \times \vec{e}_k$ часто виражається з використанням символів Леві–Чівіта і тоді результат має вид

$$\vec{b} = rot\,\vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \epsilon_{ijk}\ \vec{e}_i\ \frac{\partial a_k}{\partial x_j} = \epsilon_{ijk}\ \vec{e}_i\ a_{k,j}.$$

Потоком векторного поля $\vec{a}(\vec{x})$ через задану поверхню A, де $\vec{x} \in A$, називається взятий по цій поверхні інтеграл від елемента площинки поверхні dA, помноженого на нормальну складову вектора поля $\vec{a}(\vec{x})$

$$p = \int\!\!\int_A \vec{a} \cdot \vec{n} dA = \int\!\!\int_A a_i n_i dA =$$

$$= \int\!\!\int_A (a_x \cos\alpha_{nx} + a_y \cos\alpha_{ny} + a_z \cos\alpha_{nz}) dA.$$

Оскільки $\vec{n}$–одиничний вектор нормалі до поверхні A, то скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{n}$ виражає проекцію вектора $\vec{a}(\vec{x})$ на додатний напрямок нормалі. Потік векторного поля $\vec{a}(\vec{x})$ через задану поверхню є число.

Циркуляцією векторного поля $\vec{a}(\vec{x})$ по кривій MM_1 називається взятий по цій кривій криволінійний інтеграл від проекції векторного поля на дотичну до кривої

$$\Gamma = \int_{MM_1} \vec{a} \cdot \vec{t}\, dL,$$

де $\|\vec{t}\| = 1$–дотична одиничної довжини; dL–диференціал довжини дуги.

Теорема Гаусса–Остроградського
дає можливість знаходження потоку векторного поля $\vec{a}$ через замкнену поверхню A, яка обмежує просторове тіло об'ємом V, інтегруванням по об'єму тіла V дивергенції векторного поля

$$p = \iint_A \vec{a} \cdot \vec{n} dA = \iiint_V div \vec{a} dV = \iiint_V \nabla \cdot \vec{a} dV,$$

де $\nabla = \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k}$–набла оператор. Або в координатній формі

$$p = \iint_A a_i n_i dA = \iiint_V \nabla \cdot \vec{a} dV = \iiint_V \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \vec{e}_i a_i dV =$$

$$= \iiint_V \delta_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k} a_i dV = \iiint_V \delta_{ki} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} dV = \iiint_V \frac{\partial a_k}{\partial x_k} dV =$$

$$= \iiint_V a_{k,k} dV = \iiint_V \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \right) dV,$$

$$p = \iint_A a_i n_i dA = \iiint_V a_{k,k} dV.$$

Формула наведена у різних формах запису, в яких вона використовується.

Теорема Стокса
дає можливість виразити інтеграл по поверхні S через інтеграл по границі L, яка обмежує поверхню. Якщо функції $P_1(x_1,x_2,x_3)$, $P_2(x_1,x_2,x_3)$, $P_3(x_1,x_2,x_3)$ і їхні похідні $\frac{\partial P_i}{\partial x_j}$ неперервні в області включаючи границю $S+L$, то

$$\iint_S \left\{ \left(\frac{\partial P_3}{\partial x_2} - \frac{\partial P_2}{\partial x_3} \right) n_1 + \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_3} - \frac{\partial P_3}{\partial x_1} \right) n_2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P_2}{\partial x_1} - \frac{\partial P_1}{\partial x_2} \right) n_3 \right\} dS = \int_L (P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + P_3 dx_3).$$

Враховуючи поняття ротора і циркуляції векторного поля теорема Стокса має векторну інтерпретацію

$$\int\int_S \vec{n}\cdot rot\vec{P}dS = \int\int_S \vec{n}\cdot\nabla\times\vec{P}dS = \int_L \vec{P}\cdot\vec{n}dL,$$

$$\int\int_S \vec{n}\cdot rot\vec{P}dS = \int_L P_i n_i dL,$$

яка показує, що потік ротора векторного поля $rot\vec{P}$ через поверхню S, обмежену замкненим контуром L, дорівнює циркуляції вектора $\vec{P}$ по контуру.

У задачах механіки виникає задача диференціювання тензора. Повний диференціал компоненти тензора $b_{ij} = b_{ij}(x_1,x_2,x_3)$ в декартовій системі координат визначається як повний диференціал функції багатьох змінних

$$db_{ij} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}dx_k = \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_3}dx_3$$

де, як завжди, мають на увазі суму по індексу, який повторюється, тобто по k від 1 до 3. Повний диференціал компоненти тензора db_{ij} також є тензором. Для того щоб характеризувати приріст тензора, необхідно знати його частинні похідні, які можуть позначатися

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k} = b_{ij},_k.$$

При повороті системи координат похідні $b_{ij},_k$ задані в старій системі x_1,x_2,x_3 перетворюються при переході до нової системи x'_1,x'_2,x'_3 за правилом

$$b'_{mn},_l = \alpha_{mi}\alpha_{nj}\alpha_{lk}b_{ij},_k,$$

яке показує, що вони є тензором, ранг якого на одиницю більший, ніж ранг тензора b_{ij}.

Потоком тензорного поля $\hat{b}(\vec{x})$ через задану поверхню A, де $\vec{x}\in A$, називається взятий по цій поверхні інтеграл від елемента площинки поверхні dA, помноженого на результат згортки лінійного оператора або тензора $\hat{b}$ з вектором одиничної нормалі $\vec{n}$:

$$\vec{p} = \int\int_A \hat{b}\vec{n}dA = \int\int_A b_{ij}n_j dA.$$

Потік тензорного поля $\hat{b}(\vec{x})$ через задану поверхню є вектором. У координатній формі це співвідношення еквівалентне трьом

$$p_i = \int\int_A b_{ij} n_j dA.$$

Формула Гаусса–Остроградського аналогічно дає можливість вираження потоку тензорного поля через замкнену поверхню A, яка обмежує просторове тіло об'ємом V, через інтеграл по об'єму тіла. В координатній формі вона має вигляд

$$p_i = \int\int_A b_{ij} n_j dA = \int\int\int_V \left(\frac{\partial b_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial b_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial b_{i3}}{\partial x_3} \right) dV =$$
$$= \int\int\int_V b_{ij},_j dV.$$

Вираз

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial b_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial b_{i3}}{\partial x_3} = b_{ij},_j$$

називається дивергенцією тензора, вона є вектором і може бути виражена через набла оператор

$$\nabla \cdot \hat{b} = \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \vec{e}_j \vec{e}_i b_{ij} = \vec{e}_k \cdot \vec{e}_j \vec{e}_i \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k} = \delta_{kj} \vec{e}_i \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k} = \vec{e}_i \frac{\partial b_{ik}}{\partial x_k}.$$

Формули Гріна широко застосовуються при розв'язуванні рівнянь еліптичного типу, до яких належать рівняння теорії пружності. Якщо $u = u(x_1, x_2, x_3)$ і $w = w(x_1, x_2, x_3)$–функції, задані в області V з поверхнею Γ і неперервні разом з своїми першими похідними в $V + \Gamma$ і мають неперервні другі похідні в області V, то справедливі формули Гріна.

Перша формула Гріна

$$\int\int\int_V u \nabla^2 w dV = -\int\int\int_V \nabla u \cdot \nabla w dV + \int\int_\Gamma u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma.$$

Друга формула Гріна

$$\int\int\int_V (u \nabla^2 w - w \nabla^2 u) dV = \int\int_\Gamma (u \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial u}{\partial n}) d\Gamma,$$

де $\frac{\partial w}{\partial n}$ –похідна в напрямку зовнішньої нормалі $\vec{n}$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = n_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} + n_3 \frac{\partial w}{\partial x_3} = \vec{n} \cdot \nabla w,$$

$$\nabla^2 w = \nabla \cdot \nabla w = \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} w = \vec{e}_k \cdot \vec{e}_j \frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial x_k} =$$

$$= \delta_{kj} \frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial x_j} =$$

$$= \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} \quad - \text{лапласіан},$$

$$\nabla u = \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} u = \vec{e}_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} \quad - \text{градієнт} \quad u,$$

$$\nabla u \cdot \nabla w = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial w}{\partial x_3}.$$

Третя, або основна, інтегральна формула Гріна визначає функцію у внутрішніх точках області через похідну по нормалі до границі і лапласіан

$$\Omega \cdot u(M_0) = \int\int_\Gamma \left[\frac{1}{R_{M_0 P}} \frac{\partial u(P)}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0 P}} \right) \right] d\Gamma -$$

$$- \int\int\int_V \frac{\nabla^2 u(P)}{R_{M_0 P}} dV,$$

$$\Omega = \begin{cases} 4\pi, & \text{якщо точка} \quad M_0 \quad \text{лежить всередині} \quad V, \\ 2\pi, & \text{якщо точка} \quad M_0 \quad \text{лежить на границі} \quad \Gamma, \\ 0, & \text{якщо точка} \quad M_0 \quad \text{лежить зовні} \quad V. \end{cases}$$

Для гармонічних функцій $\nabla^2 u = 0$ і точок всередині області формула набирає вид

$$4\pi \cdot u(M_0) = \int\int_\Gamma \left[\frac{1}{R_{M_0 P}} \frac{\partial u(P)}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0 P}} \right) \right] d\Gamma.$$

За допомогою формул Гріна при розв'язку крайової задачі для еліптичних рівнянь можна перейти до інтегральних рівнянь і теорії потенціала.

0.7 Варіаційні принципи механіки

В основу механіки можна покласти закони Ньютона або варіаційні принципи. Можна показати що виходячи з варіаційних принципів можна одержати закони Ньютона і навпаки. Варіаційні принципи основані на постулаті, за яким затрати енергії при русі системи довільною траєкторією з початкової точки до кінцевої будуть мінімальними, коли траєкторія руху збігається з дійсною. Виходячи з цього постулату, варіаційні методи у відповідність кожній можливій траєкторії, тобто траєкторії, яка не порушує зв'язків, накладених на систему, ставлять величину, яка в загальному випадку називається дією, і, використовуючи методи математичного аналізу, з усіх можливих траєкторій руху шукають ту, на якій дія набуває мінімального значення. З математичної точки зору дія є функціоналом, оскільки вона є відображенням множини функцій, якими визначаються траєкторії руху системи, на множину чисел, яка визначає величину дії. Таким чином, задача визначення дійсної траєкторії руху зводиться до задачі мінімізації функціонала. Тому що шукається локальний мінімум, то розглядаються траєкторії, близькі до дійсної. Якщо дія $U = U(q_1,q_2,q_3,...,q_n)$ є функцією узагальнених координат $q_1,q_2,q_3,...,q_n$, де n–кількість степенів свободи механічної системи, і всі координати незалежні, то необхідною умовою мінімальності дії є рівність нулю першої варіації

$$\delta U(q_1,q_2,q_3,...,q_n) = 0.$$

Перша варіація визначається так само, як і диференціал функції багатьох змінних

$$\delta U(q_1,q_2,q_3,...,q_n) =$$
$$= \frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial U}{\partial q_3}\delta q_3 + ... + \frac{\partial U}{\partial q_n}\delta q_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial q_k}\delta q_k.$$

Тому необхідна умова мінімуму дії набирає виду

$$\frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial U}{\partial q_3}\delta q_3 + ... + \frac{\partial U}{\partial q_n}\delta q_n = 0. \qquad (0.7.1)$$

Необхідна умова мінімуму має векторну інтерпретацію. Величини

$$\frac{\partial U}{\partial q_1}, \ \frac{\partial U}{\partial q_2}, \ \frac{\partial U}{\partial q_3},...,\frac{\partial U}{\partial q_n}$$

є компонентами градієнта дії $\nabla U(q_1,q_2,q_3,...,q_n)$, величини $\delta q_1,\delta q_2,\delta q_3,...,\delta q_n$ є компонентами вектора можливих переміщень $\delta\vec{q}$, а вираз (0.7.1)—скалярний добутоком градієнта дії $\nabla U(q_1,q_2,q_3,...,q_n)$ на вектор можливих переміщень $\delta\vec{q}$ і рівняння (0.7.1) має вид

$$\delta U = \nabla U \cdot \delta\vec{q} = 0. \tag{0.7.2}$$

Рівність нулю скалярного добутку означає, що градієнт дії і вектор можливих переміщень взаємно ортогональні.

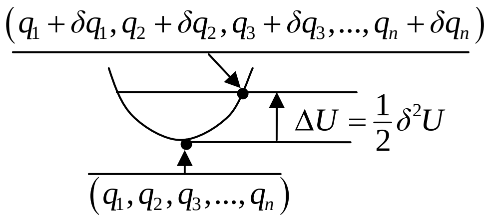

Рис.10

Рівняння (0.7.1) визначає тільки те, що функція $U = U(q_1,q_2,q_3,...,q_n)$ не змінює своєї величини, тобто має точку стаціонарності. Для того щоб більш точно дослідити її поведінку, необхідно знайти приріст функції. Для цього розкладаємо її в ряд і утримуємо члени другого порядку, члени вищого порядку відкидаються через малість величин $\delta q_1,\delta q_2,\delta q_3,...,\delta q_n$,

$$\Delta U(q_1,q_2,q_3,...,q_n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_k}\delta q_i \delta q_k + ...$$

У точці стаціонарності перша варіація дорівнює нулю, тому приріст функції визначається другим доданком

$$\Delta U(q_1,q_2,q_3,...,q_n) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_k}\delta q_i \delta q_k = \frac{1}{2}\delta^2 U. \tag{0.7.3}$$

Величина

$$\delta^2 U = \sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_k}\delta q_i \delta q_k \tag{0.7.4}$$

називається другою варіацією. Для того щоб функціонал мав мінімум, необхідно щоб друга варіація була додатньою (рис.10).

Задача знаходження мінімуму може мати й іншу форму, якщо на систему накладені додаткові умови, які виражаються у тому, що координати $q_1,q_2,q_3,...,q_n$ є залежними. В такому випадку задача визначення дійсної траєкторії руху зводиться до задачі мінімізації функціонала $U = U(q_1,q_2,q_3,...,q_n)$ з додатковими умовами

$$f(q_1,q_2,q_3,...,q_n) = 0. \qquad (0.7.5)$$

Для розв'язування такої задачі можна виключити одну зі змінних за допомогою додаткових умов, виражаючи її через останні q_k $(k = 1,2,3...,n-1)$ і підставляючи у вираз функціонала. Тоді одержуємо функціонал

$$U' = U'(q_1,q_2,q_3,...,q_{n-1})$$

у якого змінні $(q_1,q_2,q_3,...,q_{n-1})$ є незалежними поведінку якого мож- на досліджувати попередніми методами свободної варіаційної задачі. Такий підхід виправдовує себе на простих задачах. Проте часто виключення зайвих змінних потребує багато роботи і, крім того, часто додаткові умови бувають симетричними відносно змінних $q_1,q_2,q_3,...,q_n$ і тоді немає сенсу штучно виділяти одну із змінних, як залежну від останніх.

Другий шлях розв'язування таких задач мінімізації за наявності обмежень – це метод невизначених множників, знайдений Лагранжем. Якщо взяти варіацію додаткової умови (0.7.5), то одержимо

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial f}{\partial q_3}\delta q_3 + ... + \frac{\partial f}{\partial q_n}\delta q_n = 0. \qquad (0.7.6)$$

Рівняння (0.7.6) накладає зв'язки на варіації δq_k, в той же час в точці стаціонарності варіація $\delta U = \delta U(q_1,q_2,q_3,...,q_n)$ перетворюється на нуль

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial U}{\partial q_3}\delta q_3 + ... + \frac{\partial U}{\partial q_n}\delta q_n = 0. \qquad (0.7.7)$$

Виключити одну із залежних варіацій, наприклад δq_n, можна у такий спосіб: помножити рівняння (0.7.6) на якийсь невизначений множник λ і скласти з рівнянням (0.7.7). У результаті цього одержимо

$$\frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial U}{\partial q_3}\delta q_3 + ... + \frac{\partial U}{\partial q_n}\delta q_n +$$

$$+\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial f}{\partial q_2}\delta q_2+\frac{\partial f}{\partial q_3}\delta q_3+\ldots+\frac{\partial f}{\partial q_n}\delta q_n\right)=0. \qquad (0.7.8)$$

Вираз (0.7.8) перепишемо у вигляді

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial q_k}+\lambda\frac{\partial f}{\partial q_k}\right)\delta q_k=0. \qquad (0.7.9)$$

Тепер замість виключення δq_n можна вибрати множник λ таким, щоб на нуль перетворився множник

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_n}+\lambda\frac{\partial f}{\partial q_n}\right)=0. \qquad (0.7.10)$$

Після цього у сумі залишиться лише $n-1$ членів

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\partial U}{\partial q_k}+\lambda\frac{\partial f}{\partial q_k}\right)\delta q_k=0. \qquad (0.7.11)$$

Тепер залишились тільки ті δq_k, які можуть бути вибрані довільно і небхідною умовою виконання рівняння (0.7.11) є рівність нулю усіх коефіцієнтів при всіх δq_k

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_k}+\lambda\frac{\partial f}{\partial q_k}\right)=0, \quad k=1,2,3,\ldots,n-1. \qquad (0.7.12)$$

Тоді з (0.7.10) і (0.7.12) випливає, що всі коефіцієнти в (0.7.9) перетворюються на нуль, так начебто всі варіації δq_k є вільними. В результаті цього ідея методу невизначених множників Лагранжа може бути сформульована так: замість того, щоб розглядати умову перетворення на нуль варіації δU, з урахуванням обмежень, можна розглядати перетворення на нуль виразу

$$\delta U+\lambda\delta f, \qquad (0.7.13)$$

не звертати увагу на обмеження, оперуючи усіма δq_k як незалеж ними змінними. Оскільки добуток $\lambda\delta f$ перетворюється на нуль у результаті додаткової умови $f(q_1,q_2,q_3,\ldots,q_n)=0$, то виконується рівність

$$\delta U+\lambda\delta f=\delta(U+\lambda f). \qquad (0.7.14)$$

Результат попередніх міркувань можна виразити так: замість того щоб прирівнювати до нуля варіацію δU з урахуванням обмежень, можна замінити функціонал $U = U(q_1,q_2,q_3,...,q_n)$ на

$$\bar{U} = (U + \lambda f) \tag{0.7.15}$$

і прирівняти до нуля варіацію $\delta\bar{U}$ при довільних варіаціях δq_k. Якщо кількість додаткових обмежень m

$$f_1(q_1,q_2,q_3,...,q_n) = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_m(q_1,q_2,q_3,...,q_n) = 0, \quad (m < n),$$

то можна розглядати функціонал

$$\bar{U} = \left(U(q_1,q_2,q_3,...,q_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(q_1,q_2,q_3,...,q_n) \right). \tag{0.7.16}$$

Таким чином, метод невизначених множників Лагранжа замінює задачу з $n-m$ степенями свободи на задачу з $n+m$ степенями свободи у якій невідомими є $n+m$ величин

$$q_1,q_2,q_3,...,q_n; \quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,...,\lambda_m.$$

Для визначення цих величин маємо n рівнянь з умови

$$\delta\bar{U} = \delta\left(U(q_1,q_2,q_3,...,q_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(q_1,q_2,q_3,...,q_n) \right) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial U}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k + \sum_{i=1}^{m} f_i \delta\lambda = 0,$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \right) = 0, \quad k = 1,2,3,...,n \tag{0.7.17}$$

$$f_i(q_1,q_2,q_3,...,q_n) = 0. \quad i = 1,2,3,...,m$$

Останні m рівнянь є просто додатковими обмеженнями.
У задачах, пов'язаних з суцільним середовищем, стан тіла визначається координатами і частинними похідними. Функціонал

$$U = \int_V F(x_1,x_2,x_3,f,f_{x1},f_{x2},f_{x3})dV \tag{0.7.18}$$

залежить від функції $f(x_1,x_2,x_3)$ змінних x_1,x_2,x_3 і її частинних похідних першого порядку

$$f_{x1} = \frac{\partial f}{\partial x_1},\ \ f_{x2} = \frac{\partial f}{\partial x_2},\ \ f_{x3} = \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

для нелокальних обмежень, накладених в об'ємі і пов'язаних з похідними, найбільш зручним є метод невизначених множників Лагранжа. Задача мінімізації функціонала U при обмеженнях типу

$$D = \int_V u(x_1,x_2,x_3,f,f_{x1},f_{x2},f_{x3})dV$$

переходить у задачу мінімізації функціонала

$$I = U + \lambda D$$

і відповідно до умови

$$\delta I = \delta(U + \lambda D) = 0.$$

Задача мінімізації функціонала U при обмеженнях, накладених у кожний точці типу

$$g_k\left(x_1,x_2,x_3,u,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0, \qquad k = 1,2,3,$$

переходить у задачу мінімізації функціонала

$$\Phi = U + \int_V \lambda_k(x_1,x_2,x_3) g_k\left(x_1,x_2,x_3,u,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dV.$$

Найпростішою задачею варіаційного числення є знаходження функції $y(x)$, яка має неперервні частинні похідні по всім змінним до другого порядку включно і надає мінімуму функціоналу

$$U[y] = \int_a^b F\left(x,y,y'\right)dx, \tag{0.7.19}$$

заданому на $a \le x \le b$, за умов

$$y' = \frac{dy}{dx},\ \ y(a) = A,\ \ y(b) = B.$$

Це типова задача механіки у випадку, коли роль координати x відіграє час t, рух тіла повністю визначається траєкторією системи y і швидкостями y'. Необхідна умова існування такої функції $y(x)$

полягає в тому, що вона повинна задовольняти рівнянню Ейлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \tag{0.7.20}$$

Очевидно, якщо x замінити на час t, а $F(x,y,y')$–на Лагранжіан $L = T - V$, де T–кінетична енергія, а V–потенціальна, то розв'язок диференціального рівняння (0.7.19) дає рівняння руху. Якщо функціонал залежить від похідних вищих порядків, то необхідною умовою мінімуму є виконання рівняння

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} - ... + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0, \tag{0.7.21}$$

яке називається рівнянням Ейлера – Пуассона.

Задачі теорії пружності належать до задач типових для суцільного середовища, в яких кількість степенів свободи нескінченна, а стан тіла визначається координатами і частинними похідними. Якщо функціонал

$$U = \int_V F(x_1,x_2,x_3,f,f_{x1},f_{x2},f_{x3})dV \tag{0.7.22}$$

залежить від функції $f(x_1,x_2,x_3,)$ змінних x_1,x_2,x_3 і її частинних похідних першого порядку

$$f_{x1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \;\; f_{x2} = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \;\; f_{x3} = \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

то необхідною умовою екстремуму є виконання рівняння Ейлера

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial f_{x1}} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial F}{\partial f_{x2}} - \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial F}{\partial f_{x3}} = 0. \tag{0.7.23}$$

Формули (0.7.20), (0.7.21) наведені для тривимірного простору, для n-вимірного рівняння Ейлера

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial F}{\partial f_{xk}} = 0. \tag{0.7.24}$$

Розділ 1

Теорія напруженого стану

1.1 Напруження і їх визначення на довільних площинках

Розглянемо тіло, яке перебуває в стані рівноваги, тобто головний вектор і головний момент зовнішніх сил дорівнюють нулю. Візьмемо у тілі довільну точку і проведемо через неї довільно нахилену площинку (рис.1.1.1).

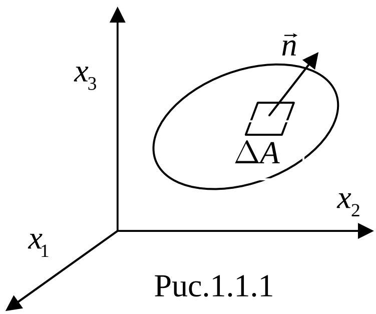

Рис.1.1.1

Площу виділеної малої площинки позначимо ΔA. Для того щоб визначити орієнтацію площинки, побудуємо одиничну нормаль $\vec{n}$ до неї. Осі координат будемо позначати x,y,z або відповідно x_1,x_2,x_3. Щоб задати орієнтацію площинки, достатньо задати проекції одиничної нормалі n_x,n_y,n_z або відповідно n_1,n_2,n_3 на осі координат. Оскільки вибирається нормаль одинич ної довжини $|\vec{n}| = 1$, то її проекції на осі координат дорівнюють косинусам кутів між нормаллю і відповідними осями. Косинуси кутів між нормаллю до площинки й осями називаються напрямними косинусами. На виділеній площинці ΔA діють внутрішні сили, позначимо їх головний вектор $\Delta\vec{p}$. Для визначення розподілу внутрішніх сил у кожній з точок тіла використовується вектор $\vec{p}$, за визначенням

$$\vec{p} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta A}, \tag{1.1.1}$$

який називається вектором напружень. Залежно від орієнтації відносно до площинки, напруження поділяються на нормальні й дотичні (рис.1.1.2).

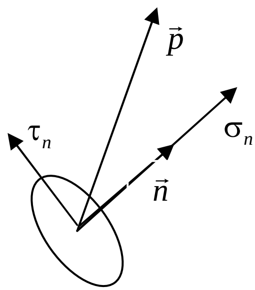

Рис.1.1.2

Для того щоб визначити величину нормальних напружень, достатньо спроектувати вектор напружень $\vec{p}$ на одиничну нормаль до площинки $\vec{n}$, тоді $\sigma_n = p\cos\alpha$. Оскільки нормаль одинична $|\vec{n}| = 1$, то в загальному випадку зручніше скористатись скалярним добутком

$$\sigma_n = \vec{p} \cdot \vec{n} = p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3 = p_i n_i. \tag{1.1.2}$$

Дотичні напруження можна знайти за теоремою Піфагора: оскільки $p^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2$, то $\tau_n = \sqrt{p^2 - \sigma_n^2}$. Очевидно, вектор напружень $\vec{p}$ залежить від орієнтації площинки або відповідної нормалі до неї, тобто існує залежність

$$\vec{p} = \vec{p}(\vec{n}). \tag{1.1.3}$$

Нехай ця залежність лінійна, інакше кажучи, існує лінійний оператор, який кожному вектору $\vec{n}$ ставить у відповідність вектор напружень $\vec{p}$, це буде доведено трохи пізніше. Відповідно відомій теоремі лінійної алгебри кожному лінійному оператору у скінченновимірному просторі можна поставити у відповідність матрицю. Простір, у якому розглядається тіло, тривимірний, тому залежність (1.1.3) набуває вигляду

$$\vec{p} = \hat{\sigma}\vec{n}. \tag{1.1.4}$$

У розгорнутому вигляді

$$(p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}\sigma_{12}\sigma_{13} \\ \sigma_{21}\sigma_{22}\sigma_{23} \\ \sigma_{31}\sigma_{32}\sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}. \tag{1.1.5}$$

Поряд з використаними позначеннями, характерними для сучасної літератури з механіки і лінійної алгебри, наводимо систему позначень, яка широко використовується в технічній літературі.

$$(p_x,p_y,p_z) = \begin{pmatrix} \sigma_x \tau_{xy} \tau_{xz} \\ \tau_{yx} \sigma_y \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \tau_{zy} \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}. \qquad (1.1.6)$$

Лінійний оператор $\hat{\sigma}$, який ставить у відповідність площинці (або нормалі до неї) вектор напружень, називається тензором напружень і він у кожній системі координат може бути заданий відповідною матрицею.

Розглянемо фізичну суть компонент тензора напружень. Для цього виріжемо куб площинами, паралельними координатним площинам, і розглянемо напруження, які діють на його гранях (рис.1.1.3).

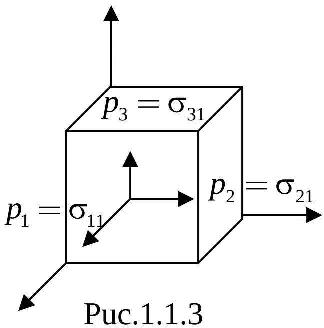

Рис.1.1.3

Почнемо з грані, нормаль до якої напрямлена вздовж осі x_1, тоді проекції одиничної нормалі на осі координат (або напрямні косинуси) будуть $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 0$. Вектор напружень визначається формулою (1.1.4). Перемножуючи за правилом добутку матриць рядок на стовпець, одержимо: $p_1 = \sigma_{11}$, $p_2 = \sigma_{21}$, $p_3 = \sigma_{31}$. Аналогічно знаходимо проекції вектора напружень на площинці з нормаллю, напрямленою вздовж осі x_2, $\vec{n}(0,1,0)$

$$p_1 = \sigma_{12}, \;\; p_2 = \sigma_{22}, \;\; p_3 = \sigma_{32},$$

а вздовж осі x_3 або z, $\vec{n}(0,0,1)$ одержуємо

$$p_1 = \sigma_{13}, \;\; p_2 = \sigma_{23}, \;\; p_3 = \sigma_{33}.$$

$$(p_1,p_2,p_3) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \sigma_{12} \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \sigma_{22} \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \sigma_{32} \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Одержаний результат показує, що компоненти тензора напружень знаходяться у відповідності з проекціями вектора напружень на відповідних площинках.

Причому компоненти тензора напружень, розташовані на головній діагоналі, σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}—дорівнюють нормальним напруженням, а позадіагональні - дотичним напруженням.

Доведемо, що залежність між вектором напружень $\vec{p}$ і одиничною нормаллю $\vec{n}$ лінійна. Для цього знайдемо вектор напружень на довільно нахиленій площинці, виражаючи його компоненти через компоненти тензора напружень і проекції одиничної нормалі. З цією метою виріжемо тетраедр за допомогою координатних площин і нахиленої площинки (рис.1.1.4) і скористаємось умовами рівноваги. Позначимо площу нахиленої площинки з нормаллю $\vec{n} - dA$, площу площинки з нормаллю, паралельною осі $x_1 - dA_1$, відповідно $x_2 - dA_2$, $x_3 - dA_3$. Сума проекцій усіх сил на осі повинна дорівнювати нулю. Проектуємо сили на вісь x_1

$$p_1 dA - \sigma_{11} dA_1 - \sigma_{12} dA_2 - \sigma_{13} dA_3 = 0,$$

$$p_1 = \sigma_{11}\frac{dA_1}{dA} + \sigma_{12}\frac{dA_2}{dA} + \sigma_{13}\frac{dA_3}{dA}.$$

Враховуючи, що

$$\frac{dA_1}{dA} = \cos\varphi_{x_1} = n_{x_1} = n_1,$$

$$\frac{dA_2}{dA} = \cos\varphi_{x_2} = n_{x_2} = n_2,$$

$$\frac{dA_3}{dA} = \cos\varphi_{x_3} = n_{x_3} = n_3,$$

одержимо

$$p_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3.$$

Аналогічно, проектування сил на осі x_2 і x_3 дає:

$$p_2 = \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3,$$

$$p_3 = \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3$$

або

$$p_x = \sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z,$$

$$p_y = \tau_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z,$$

$$p_z = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z,$$

або в тензорному вигляді

$$p_i = \sigma_{ij} n_j, \tag{1.1.6a}$$

де індекси i,j набувають значення 1,2,3. У правій частині за правилом Ейнштейна мають на увазі суму по індексу, що повторюється, від 1 до 3

$$\sigma_{ij} n_j = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j = \sigma_{i1} n_1 + \sigma_{i2} n_2 + \sigma_{i3} n_3.$$

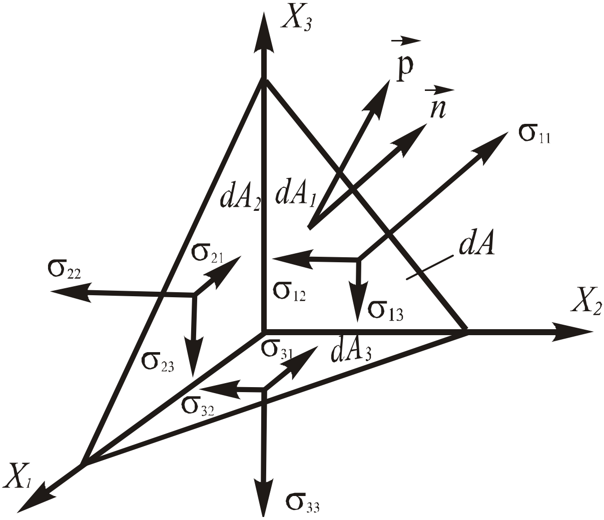

Рис.1.1.4

Одержані співвідношення дають можливість, як і (1.1.4), знайти вектор напружень на довільно нахиленій площинці і доводять, що залежність між вектором напружень $\vec{p}$ і одиничною нормаллю $\vec{n}$ лінійна.

Задача 1.1.1. Задано тензор напружень у точці

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Визначити вектор напружень на площинці з одиничною нормаллю $\vec{n}(2/3, -2/3, 1/3)$.

Розв'язок

Згідно з (1.1.6а) $p_i = \sigma_{ij} n_j$, звідки

$$p_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3, \;\; p_1 = 3 \cdot \frac{2}{3} - 0 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3},$$

$$p_2 = \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3, \;\; p_2 = 0 \cdot \frac{2}{3} - 5 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{10}{3}$$

$$p_3 = \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3, \;\; p_3 = 2 \cdot \frac{2}{3} - 0 \cdot \frac{2}{3} + 7 \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{3}.$$

Задача 1.1.2. Для вектора напружень, знайденого в попередній задачі, визначити величини вектора напружень $p = |\vec{p}|$, нормальних напружень σ_n, дотичних напружень τ_n і знайти кут між вектором напружень і нормаллю до площинки.

Розв'язок

Величина вектора напружень $p = |\vec{p}|$ визначається як довжина діагоналі прямокутного паралелепіпеда, фактично за теоремою Піфагора

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = \sqrt{(8/3)^2 + 3^2 + (11/3)^2} \approx 5{,}44,$$

за формулою (1.1.2)

$$\sigma_n = \vec{p} \cdot \vec{n} = p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3 = p_i n_i,$$

$$\sigma_n = \frac{8}{3} \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} + \frac{11}{3} \cdot \frac{1}{3} = 5,$$

і за формулою – $\tau_n = \sqrt{p^2 - \sigma_n^2}$, $\tau_n = \sqrt{(5{,}44)^2 - 5^2} \approx 2{,}13$. Кут між вектором напружень і нормаллю до площинки можна знайти користуючись властивостями скалярного добутку

$$\sigma_n = \vec{p} \cdot \vec{n} = pn\cos\phi = p\cos\phi,$$

$$\cos\phi = \sigma_n / p = 5/5{,}44 = 0{,}919, \;\; \phi \approx 24^0.$$

Задача 1.1.3. Задано вектори напружень, які діють на трьох взаємно ортогональних площинках. Довести, що сума квадратів векторів цих напружень не залежить від орієнтації системи координат, тобто вона є інваріантом.

Розв'язок

Одиничні нормалі до координатних площинок мають проекції $n(1{,}0{,}0)$, $n(0{,}1{,}0)$, $n(0{,}0{,}1)$, тому проекції векторів на цих площинках $\sigma_{1j}, \sigma_{2j}, \sigma_{3j}$. Сума їхніх квадратів дорівнює $S = \sigma_{1j}\sigma_{1j} + \sigma_{2j}\sigma_{2j} + \sigma_{3j}\sigma_{3j} = \sigma_{ij}\sigma_{ij}$, а це інваріант.

Задача 1.1.4. Напружений стан у точці задано тензором напружень:

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & a\sigma & b\sigma \\ a\sigma & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & \sigma \end{pmatrix},$$

де a,b,c–сталі величини, а σ величина напружень. Вибрати сталі a,b,c так, щоб вектор напружень $\vec{p}$ на октаедричній площинці дорівнював нулю.

Розв'язок

Октаедрична площинка рівнонахилена до осей координат, тому $n_1 = n_2 = n_3$. Крім того, нормаль має одиничну довжину $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, тому $n_1 = n_2 = n_3 = 1/\sqrt{3}$. Згідно (1.1.6a) $p_i = \sigma_{ij} n_j$ і з умови $\vec{p} = 0$, випливає $p_1 = p_2 = p_3 = 0$. Одержуємо

$$\begin{aligned} 1 + a + b &= 0, \\ a + 1 + c &= 0, \\ b + c + 1 &= 0. \end{aligned}$$

З цих рівнянь знаходимо $a = b = c = -1/2$. Тензор напружень має вигляд

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & -\sigma/2 & -\sigma/2 \\ -\sigma/2 & \sigma & -\sigma/2 \\ -\sigma/2 & -\sigma/2 & \sigma \end{pmatrix}.$$

Задача 1.1.5. Задано тензор напружень у точці $O(0{,}0{,}0)$:

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Визначити вектор напружень на площинці, яка проходить через точку $O(0,0,0)$ паралельно площині, показаній на рис.1.1.5, перетинаючи осі координат в точках $a=1/4,\ b=1/3,\ c=1/12$.

Розв'язок

Рівняння площини $A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3=B$, яка перетинає осі координат у точках a,b,c має вигляд $x_1/a+x_2/b+x_3/c=1$. Коефіцієнти рівняння визначаються довжинами відрізків осей координат точок перетину з ними площини $A_1=1/a,\ A_2=1/b,\ A_3=1/c, B=1$. Рівняння заданої площини

$$4x_1+3x_2+12x_3=1.$$

Вектор, нормальний до площини можна, задати формулою

$$\vec{N}=A_1\vec{e}_1+A_2\vec{e}_2+A_3\vec{e}_3,$$

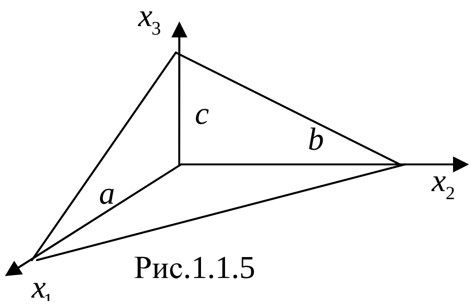

Рис.1.1.5

тому $\vec{N}=4\vec{e}_1+3\vec{e}_2+12\vec{e}_3$. У формули для визначення напружень на довільних площинках входять проекції одиничної нормалі $\vec{n}$. Їх можна знайти, поділивши вектор на його довжину $\vec{n}=\vec{N}/\left|\vec{N}\right|$. Тоді $\left|\vec{N}\right|=\sqrt{4^2+3^2+12^2}=13$,

$$\vec{n}=(4/13)\vec{e}_1+(3/13)\vec{e}_2+(12/13)\vec{e}_3,$$

$$n_1=4/13,\ n_2=3/13,\ n_3=12/13.$$

Тепер визначаємо проекції вектора напружень

$$p_i=\sigma_{ij}n_j=\sigma_{i1}n_1+\sigma_{i2}n_2+\sigma_{i3}n_3,$$

$$p_1=7\cdot 4/13-5\cdot 3/13+0\cdot 12/13=1,$$

$$p_2=-5\cdot 4/13+3\cdot 3/13+1\cdot 12/13=1/13,$$

$$p_3=0\cdot 4/13+1\cdot 3/13+2\cdot 12/13=27/13.$$

1.2 Перетворення компонент тензора напружень при повороті системи координат

Розглянемо наступну задачу. Нехай існує система координат x,y,z або x_1,x_2,x_3, яку будемо називати старою. В цій старій системі заданий тензор напружень, тобто відомі його компоненти σ_{ij}. Задано систему координат x',y',z', або x'_1,x'_2,x'_3, яку назвемо новою. Знайти компоненти тензора напружень σ'_{ij} в новій системі. В першу чергу треба визначити положення нової системи відносно старої. Ця задача вирішується заданням проекцій ортів нової системи $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ на орти старої системи $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$. Для цього треба задати кути між новими і старими осями. Оскільки орти $\vec{e}_k'$, $\vec{e}_m$ мають одиничні довжини, то косинуси кутів між ними дорівнюють проекціям нових ортів на старі і можуть бути визначені як скалярні добутки відповідних ортів. Тобто проекція $\vec{e}_1'$ на $\vec{e}_1$, яку позначимо

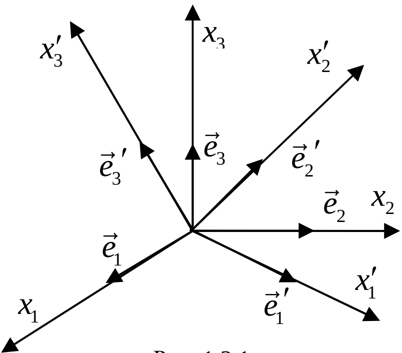

Рис. 1.2.1

$$\alpha_{11} = \cos(\vec{e}_1',\vec{e}_1)$$

визначається як скалярний добуток $\vec{e}_1' \cdot \vec{e}_1$. Аналогічно

$$\cos\left(\vec{e}_i',\vec{e}_j\right) = \alpha_{ij} = \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j.$$

Використовуючи ці коефіцієнти, можна визначити нові орти через старі

$$\vec{e}_1' = \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{12}\vec{e}_2 + \alpha_{13}\vec{e}_3,$$

$$\vec{e}_2' = \alpha_{21}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2 + \alpha_{23}\vec{e}_3,$$

$$\vec{e}_3' = \alpha_{31}\vec{e}_1 + \alpha_{32}\vec{e}_2 + \alpha_{33}\vec{e}_3,$$

або $\vec{e}_k' = \alpha_{ki}\vec{e}_i$. Визначені таким чином коефіцієнти α_{ij}, або відповідні напрямні косинуси $\cos\left(\vec{e}_i',\ \vec{e}_j\right)$, створюють матрицю перетворення системи координат

$$\|\alpha_{ij}\| = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23} \\ \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

Оскільки базисні вектори системи координат мають одиничну довжину їхні скалярні добутки дорівнюють одиниці, якщо вектори співпадають. Унаслідок того, що базисні вектори системи координат взаємно ортогональні їхні скалярні добутки дорівнюють нулю, якщо вектори не співпадають. Внаслідок цих властивостей, якщо матрицю перетворення помножити на транспоновану то одержиться одинична матриця. Це свідчить про те, що транспонована матриця однакова з оберненою. Визначник матриці дорівнює об'єму паралелепіпеда побудованого на векторах, проекції яких на осі координат дорівнюють елементам рядка або стовпчика матриці. Оскільки вектори базису одиничні і взаємно ортогональні то паралелепіпед перетворюється на куб одиничного об'єму і визначник матриці дорівнює одиниці. Така матриця, у якої обернена матриця дорівнює транспонованій і визначник якої дорівнює одиниці, називається ортонормованою. Розглянемо спочатку задачу знаходженя проекцій вектора сили в новій системі, якщо задано проекції сили в старій системі і матрицю перетворення системи координат. Нехай в старій системі координат виділена площинка і до неї прикладена сила з проекціями p_x, p_y, p_z або p_1, p_2, p_3. Силу можна задати через проекції на орти старої системи координат

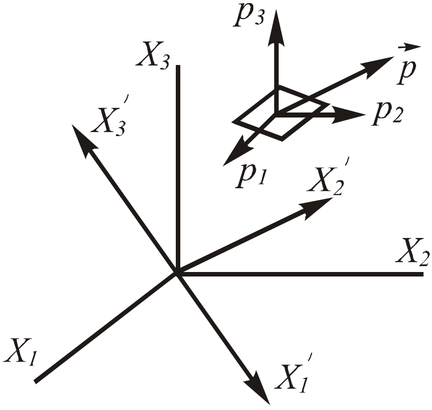

Рис. 1.2.2

$$\vec{p} = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 + p_3\vec{e}_3,$$

$$\vec{p} = p_i\vec{e}_i. \qquad (1.2.1)$$

Аналогічно можна задати силу в новій системі координат через її проекції на нові осі

$$\vec{p} = p_1'\vec{e}_1' + p_2\vec{e}_2' + p_3'\vec{e}_3',$$

$$\vec{p} = p_k'\vec{e}_k'. \tag{1.2.2}$$

Оскільки в лівих частинах формул (1.2.1), (1.2.2) одна і та сама сила, то праві частини також рівні

$$p_i\vec{e}_i = p_k'\vec{e}_k'.$$

Помножимо ліву і праву частини скалярно на $\vec{e}_j'$

$$p_k'\vec{e}_k' \cdot \vec{e}_j' = p_i\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j'.$$

Оскільки орти системи координат взаємноортогональні, тому скалярний добуток базисних векторів $\vec{e}_k' \cdot \vec{e}_j'$ дорівнює одиниці, якщо $k = j$, і нулю, якщо $k \neq j$:

$$\vec{e}_k' \cdot \vec{e}_j' = \begin{cases} 1, & (k = j), \\ 0, & (k \neq j). \end{cases}$$

Така величина позначається δ_{ij} і називається символом Кронекера

$$\vec{e}_k' \cdot \vec{e}_j' = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & (k = j), \\ 0, & (k \neq j). \end{cases}$$

Тоді ліва частина набирає вигляду $p_k'\vec{e}_k' \cdot \vec{e}_j' = p_j'$ при $k = j$ і нулю в інших випадках. В правій частині скалярний добуток–це компоненти матриці перетворення

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j' = \alpha_{ij},$$

тому одержуємо

$$p_j' = \alpha_{ji}p_i, \tag{1.2.3}$$

$$p_x' = p_1' = \alpha_{11}\,p_1 + \alpha_{12}\,p_2 + \alpha_{13}\,p_3,$$

$$p_y' = p_2' = \alpha_{21}\,p_1 + \alpha_{22}\,p_2 + \alpha_{23}\,p_3,$$

$$p_z' = p_3' = \alpha_{31}\,p_1 + \alpha_{32}\,p_2 + \alpha_{33}\,p_3.$$

Аналогічно можна знайти формули, які виражають проекції вектора в старій системі через проекції в новій системі

$p_i = \alpha_{ji} p'_j$. Той самий результат можна одержати, розглядаючи (1.2.3) як систему рівнянь відносно невідомих p_1, p_2, p_3 і враховуючи, що обернена матриця збігається з транспонованою.

Тепер знайдемо формули перетворення компонент тензора напружень. Розглянемо площинку, на якій діє вектор напружень $\vec{p}$. Нехай існують дві системи координат: стара (x_1,x_2,x_3) і нова (x'_1,x'_2,x'_3), взаємна орієнтація яких визначається матрицею перетворення $\|\alpha_{ij}\|$. Компоненти вектора напружень в старій системі p_i визначаються через компоненти тензора в старій системі співвідношеннями $p_i = \sigma_{ij} n_j$, відповідно в новій системі $p'_k = \sigma'_{km} n'_m$. Компоненти вектора напружень пов'язані співвідношеннями

$$p'_k = \alpha_{ki} p_i.$$

З останніх трьох співвідношень маємо

$$\sigma'_{km} n'_m = \alpha_{ki} \sigma_{ij} n_j.$$

Виражаємо проекції одиничної нормалі в старій системі координат через її проекції в новій системі $n_j = \alpha_{mj} n'_m$. Підставляємо їх у попереднє співвідношення і одержуємо

$$\sigma'_{km} n'_m = \alpha_{ki} \cdot \alpha_{mj} \sigma_{ij} n'_m,$$

звідки випливає

$$\sigma'_{km} = \alpha_{ki} \alpha_{mj}\, \sigma_{ij}. \tag{1.2.4}$$

Одержані формули дають можливість знайти компоненти тензора напружень в новій системі через компоненти тензора напружень в старій системі координат і одночасно доводять, що об'єкт, який було названо тензором напружень, дійсно є тензором, оскільки він перетворюється при поворотах системи координат за правилами тензора.

1.3 Головні напруження і головні площинки

Площинки називаються головними, якщо на них відсутні дотичні напруження. В цьому випадку вектор напружень $\vec{p}$ збігається за напрямком з одиничною нормаллю до площинки $\vec{n}$ (рис.1.3.1)

$$\vec{p} = \sigma \vec{n},$$

де σ–коефіцієнт пропорційності, або, проектуючи на осі координат, одержимо

$$p_i = \sigma n_i,$$

$$p_1 = \sigma n_1, \;\; p_2 = \sigma n_2, \;\; p_3 = \sigma n_3.$$

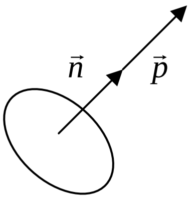

Рис.1.3.1

З другого боку, проекції вектора напружень в загальному випадку визначаються через тензор напружень $p_i = \sigma_{ij} n_j$. Оскільки ліві частини останніх двох співвідношень збігаються, то збігаються і праві, тому

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma n_i \quad \text{або} \quad \sigma_{ij} n_j - \sigma n_i = 0.$$

Оскільки $n_i = \delta_{ij} n_j$, то

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma) n_j = 0.$$

Таким чином, одержуємо однорідну систему лінійних рівнянь для визначення проекцій одиничної нормалі $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$ до головної площинки. У розгорнутому вигляді вона має вид

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma) n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 &= 0, \\ \sigma_{21} n_1 + (\sigma_{22} - \sigma) n_2 + \sigma_{23} n_3 &= 0, \\ \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + (\sigma_{33} - \sigma) n_3 &= 0. \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

З математики відомо, що однорідна система має нетривіальні (не нульові) розв'язки, якщо її визначник дорівнює нулю:

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0. \tag{1.3.2}$$

Розкриваючи визначник, одержуємо характеристичне рівняння для визначення головних напружень:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0. \tag{1.3.3}$$

Коефіцієнти цього рівняння

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11}\sigma_{12} \\ \sigma_{21}\sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11}\sigma_{13} \\ \sigma_{31}\sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22}\sigma_{23} \\ \sigma_{32}\sigma_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = |\sigma_{ij}| \tag{1.3.4}$$

не залежать від орієнтації системи координат, тому називаються інваріантами тензора напружень, відповідно: I_1–перший, I_2–другий, I_3–третій інваріант. Оскільки рівняння кубічне, то воно має три корені, які визначають три головні напруження σ_1,σ_2,σ_3. Індекси вибирають так, щоб

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3. \tag{1.3.5}$$

Після визначення головних напружень можна знайти їх орієнтацію, тобто проекції одиничної нормалі до головної площинки, або, що те саме, її напрямні косинуси. Наприклад, для визначення напрямку σ_1

$$\begin{aligned} (\sigma_{11}-\sigma_1)n_1+\sigma_{12}n_2+\sigma_{13}n_3=0, \\ \sigma_{21}n_1+(\sigma_{22}-\sigma_1)n_2+\sigma_{23}n_3=0, \\ \sigma_{31}n_1+\sigma_{32}n_2+(\sigma_{33}-\sigma_1)n_3=0. \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Оскільки визначник цієї системи дорівнює нулю, то вона вироджена, тобто з трьох рівнянь не більше ніж два є лінійно незалежними. Тому для визначення проекцій нормалі з цих трьох рівнянь треба взяти два лінійно незалежних, до них додати умову, що вектор нормалі нормований, тобто він має одиничну довжину

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2=1 \tag{1.3.7}$$

і з одержаних трьох рівнянь знайти n_1,n_2,n_3. Так само знаходять орієнтації σ_2 і σ_3.

Задача 1.3.1. Задано компоненти тензора напружень в старій системі координат x_1,x_2,x_3. Знайти компоненти тензора напружень в новій системі x_1',x_2',x_3', положення якої задається матрицею перетворення

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad ||\alpha_{ij}|| = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок

За формулою $\sigma'_{km} = \alpha_{ki} \cdot \alpha_{mj} \sigma_{ij}$ знаходимо компоненти тензора напружень в новій системі x'_1, x'_2, x'_3, наприклад:

$$\sigma'_{11} = \alpha_{1i}\alpha_{1j}\sigma_{ij} = \alpha_{11}\alpha_{1j}\sigma_{1j} + \alpha_{12}\alpha_{1j}\sigma_{2j} + \alpha_{13}\alpha_{1j}\sigma_{3j} =$$
$$= \alpha_{11}\alpha_{11}\sigma_{11} + \alpha_{11}\alpha_{12}\sigma_{12} + \alpha_{11}\alpha_{13}\sigma_{13} + \alpha_{12}\alpha_{11}\sigma_{21} +$$
$$+ \alpha_{12}\alpha_{12}\sigma_{22} + \alpha_{12}\alpha_{13}\sigma_{23} + \alpha_{13}\alpha_{11}\sigma_{31} + \alpha_{13}\alpha_{12}\sigma_{32} +$$
$$+ \alpha_{13}\alpha_{13}\sigma_{33} = \alpha_{11}\alpha_{11}\sigma_{11} + 2\alpha_{11}\alpha_{12}\sigma_{12} + 2\alpha_{11}\alpha_{13}\sigma_{13} +$$
$$+ \alpha_{12}\alpha_{12}\sigma_{22} + 2\alpha_{12}\alpha_{13}\sigma_{23} + \alpha_{13}\alpha_{13}\sigma_{33} = 0 \cdot 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot (-2) +$$
$$+ 2 \cdot 0 \cdot (1/\sqrt{2}) \cdot 0 + (1/\sqrt{2}) \cdot (1/\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} +$$
$$+ 2 \cdot (1/\sqrt{2}) \cdot (1/\sqrt{2}) \cdot 0 + (1/\sqrt{2}) \cdot (1/\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) = 0.$$

Аналогічно визначають інші компоненти. В результаті одержимо

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & -1 \\ 2 & -1 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Звичайно при виконанні таких розрахунків треба використовувати обчислювальні машини.

Задача 1.3.2. Задано компоненти тензора напружень в старій системі (x_1, x_2, x_3) координат

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$

Знайти компоненти тензора напружень в новій системі (x'_1, x'_2, x'_3), положення якої показано на рис.1.3.2.

Розв'язок

Спочатку необхідно визначити матрицю перетворення. Оскільки вісь x'_1 утворює однакові кути з осями x_1, x_2, x_3, то проекції одиничного базисного вектора $\vec{e}'_1$ на всі осі однакові

$$\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = 1/\sqrt{3}.$$

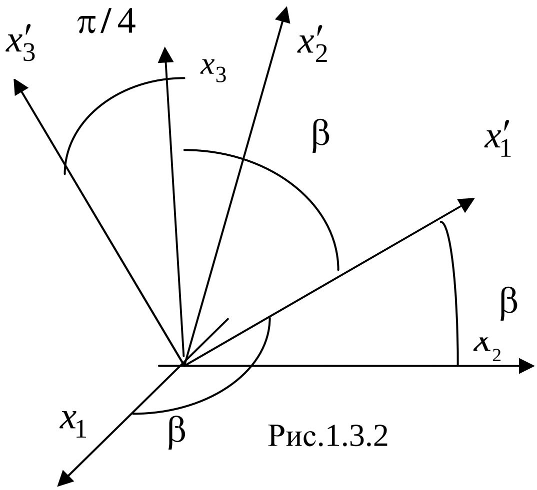

Рис.1.3.2

Крім того, задано кут $\pi/4$ між базисним вектором $\vec{i}_3'$ та віссю x_3, тому $\alpha_{33} = 1/\sqrt{2}$. У результаті матриця перетворення набирає вигляд:

$$||\alpha_{ij}|| = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Останні невідомі компоненти матриці перетворення визначаються з умови її ортогональності $\alpha_{ij}\alpha_{ik} = \delta_{jk}$ та нормованості. Наприклад,

$$\alpha_{31}/\sqrt{3} + \alpha_{32}/\sqrt{3} + (1/\sqrt{2})(1/\sqrt{3}) = 0,$$

$$\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + 1/2 = 1,$$

$$\alpha_{31} = 0, \quad \alpha_{32} = -1/\sqrt{2},$$

і т.д. З цих умов одержуємо

$$||\alpha_{ij}|| = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Тепер можна скористатися формулою

$$\sigma'_{ij} = \alpha_{im}\alpha_{jn}\sigma_{mn},$$

де σ'_{ij}–компоненти тензора напружень в новій системі координат; σ_{mn}–компоненти тензора напружень в старій системі, наприклад:

$$\sigma'_{11} = \alpha_{1m}\alpha_{1n}\sigma_{mn} = \alpha_{11}\alpha_{1n}\sigma_{1n} + \alpha_{12}\alpha_{1n}\sigma_{2n} + \alpha_{13}\alpha_{1n}\sigma_{3n} =$$
$$= \alpha_{11}\alpha_{11}\sigma_{11} + \alpha_{12}\alpha_{11}\sigma_{21} + \alpha_{13}\alpha_{11}\sigma_{31} + \alpha_{11}\alpha_{12}\sigma_{12} +$$
$$+ \alpha_{12}\alpha_{12}\sigma_{22} + \alpha_{13}\alpha_{12}\sigma_{32} + \alpha_{11}\alpha_{13}\sigma_{13} + \alpha_{12}\alpha_{13}\sigma_{23} + \alpha_{13}\alpha_{13}\sigma_{33}.$$

Після підстановки $\sigma'_{11} = \tau$ і т.д. одержимо

$$||\sigma'_{ij}|| = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}.$$

Задача 1.3.3. Задано тензор напружень у точці

$$||\sigma_{ij}|| = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначити головні напруження, положення головних площинок (головних осей тензора напружень).

Розв'язок

Знаходимо інваріанти тензора напружень

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 3,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -8.$$

Записуємо характеристичне рівняння

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0,$$
$$\sigma^3 - 3\sigma^2 - 6\sigma + 8 = 0.$$

Знаходимо його корені, які дорівнюють $1, 4, -2$. Тому $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = -2$. В загальному випадку корені знаходять чисельними методами, найчастіше методом Ньютона. Далі визначаємо положення головних площинок (головних осей тензора напружень) розв'язуючи систему (1.3.6). Наприклад, знайдемо положення головної площинки, на якій діє головне напруження $\sigma_1 = 4$ (напрямок головної осі тензора напружень, вздовж якої напрямлено головне напруження $\sigma_1 = 4$):

$$\begin{aligned} &(3-4)n_1 + n_2 + n_3 = 0,\\ &n_1 + (0-4)n_2 + 2n_3 = 0,\\ &n_1 + 2n_2 + (0-4)n_3 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-n_1 + n_2 + n_3 = 0,\\ &n_1 - 4n_2 + 2n_3 = 0,\\ &n_1 + 2n_2 - 4n_3 = 0. \end{aligned}$$

Визначник цієї системи

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

дорівнює нулю, тому з цієї системи треба взяти будь-які два лінійно незалежних рівняння і до них додати умову нормування нормалі

$$\begin{aligned} &-n_1 + n_2 + n_3 = 0,\\ &n_1 - 4n_2 + 2n_3 = 0,\\ &n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \end{aligned}$$

Із цих трьох рівнянь визначають три невідомі n_1, n_2, n_3 :

$$n_1 = 2/\sqrt{6}, \quad n_2 = 1/\sqrt{6}, \quad n_3 = 1/\sqrt{6}.$$

Аналогічно визначають положення головних площинок, на яких діють головні напруження $\sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = -2$ (напрямки відповідних головних осей тензора напружень).

Задача 1.3.4. Задано тензор напружень у точці

$$||\sigma_{ij}|| = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}.$$

Визначити головні напруження, положення головних площинок (головних осей тензора напружень). Розв'язок цієї задачі аналогічний розв'язку попередньої:

$$I_1 = 3a, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = 0,$$

$$\sigma^3 - 3\sigma^2 = 0,$$

$$\sigma_1 = 3a, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0.$$

Знайдемо положення головної площинки, на якій діє головне напруження $\sigma_1 = 3a$ (напрямок головної осі тензора напружень, вздовж якої напрямлено головне напруження $\sigma_1 = 3a$):

$$(a-3a)n_1 + an_2 + an_3 = 0,$$

$$an_1 + (a-3a)n_2 + an_3 = 0,$$

$$an_1 + an_2 + (a-3a)n_3 = 0,$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$$

Звідси $n_1 = n_2 = n_3 = 1/\sqrt{3}$.

Для визначення положення головних площинок, на яких діють головні напруження $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, одержують однакові системи рівнянь

$$an_1 + an_2 + an_3 = 0,$$

$$an_1 + an_2 + an_3 = 0,$$

$$an_1 + an_2 + an_3 = 0,$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$$

Цих рівнянь недостатньо для однозначного визначення положення ще двох головних осей. Таким чином, довільна пара взаємноперпендикулярних осей, перпендикулярних до напрямку першої осі, може бути головними осями. Звичайно, ця довільно вибрана пара має задовольняти умові ортогональності. Проекції нормалей до головних площинок створюють матрицю переходу до головних площинок, яка, як матриця повороту, повинна бути ортогональною і нормованою.

$$||\alpha_{ij}|| = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ \alpha_{21} & \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

Виберемо, наприклад,

$$\alpha_{21} = 1/\sqrt{2}, \quad \alpha_{22} = -1/\sqrt{2}, \quad \alpha_{23} = 0.$$

При цьому виборі задовольняється умова ортогональності

$$\alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} + \alpha_{13}\alpha_{23} = 0$$

і умова нормованості

$$\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 = 1,$$

$$||\alpha_{ij}|| = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

Ще раз звертаємо увагу на те, що оскільки в декартовій системі координат базисні вектори взаємно ортогональні, то третій рядок повинен бути ортогональним до першого

$$\alpha_{11}\alpha_{31} + \alpha_{12}\alpha_{32} + \alpha_{13}\alpha_{33} = 0$$

і задовольняти умову

$$\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 = 1,$$

з якої після підстановки першого вектора випливає,

$$\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33} = 0,$$

і також повинен бути ортогональним до другого

$$\alpha_{21}\alpha_{31} + \alpha_{22}\alpha_{32} + \alpha_{23}\alpha_{33} = 0,$$

з чого після підстановки другого вектора випливає

$$\alpha_{31} - \alpha_{32} = 0,$$

звідки $\alpha_{31} = 1/\sqrt{6}, \quad \alpha_{32} = 1/\sqrt{6}, \quad \alpha_{33} = -2/\sqrt{6},$

$$||\alpha_{ij}|| = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Рядки одержаної матриці і є проекціями на осі координат нормалей до головних площинок.

1.4 Максимальні нормальні напруження

Першим етапом розрахунків на міцність є задача визначення максимальних нормальних напружень. Розв'яжемо цю задачу. Для того щоб спростити перетворення, виріжемо куб площинами, які є головними площинками, і осі координат орієнтуємо в напрямку нормалей до головних площинок. Це не обмежує одержаний результат. Оскільки на головних площинках дотичні напруження відсутні, тобто дорівнюють нулю, то при такому виборі координат тензор напружень діагоналізується

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \tag{1.4.1}$$

Компоненти вектора напружень на довільній площинці відповідно до формул (1.1.5) дорівнюють

$$p_1 = \sigma_1 n_1, \quad p_2 = \sigma_2 n_2, \quad p_3 = \sigma_3 n_3,$$

де n_1, n_2, n_3–проекції одиничної нормалі на осі координат, пов'язані умовою

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \tag{1.4.2}$$

Величина вектора напружень дорівнює

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2},$$

$$p = \sqrt{\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2}. \tag{1.4.3}$$

Таким чином, постає задача знаходження максимуму величини вектора напружень p при обмеженні (1.4.1). Щоб позбутися обмежень (1.4.1), визначимо з них n_3

$$n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$$

і підставимо у (1.4.2), тоді $p = \sqrt{\left(\sigma_1^2 - \sigma_3^2\right) n_1^2 + \left(\sigma_2^2 - \sigma_3^2\right) n_2^2 + \sigma_3^2}$. Тепер p є функцією незалежних n_1 і n_2. Необхідною умовою екстремуму є рівність нулю частинних похідних

$$\frac{\partial p}{\partial n_1} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n_2} = 0.$$

З цих умов маємо

$$\frac{\partial p}{\partial n_1} = \frac{\left(\sigma_1^2 - \sigma_3^2\right) n_1}{\sqrt{\left(\sigma_1^2 - \sigma_3^2\right) n_1^2 + \left(\sigma_2^2 - \sigma_3^2\right) n_2^2 + \sigma_3^2}} = 0, \tag{1.4.4}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n_2} = \frac{\left(\sigma_2^2 - \sigma_3^2\right) n_2}{\sqrt{\left(\sigma_1^2 - \sigma_3^2\right) n_1^2 + \left(\sigma_2^2 - \sigma_3^2\right) n_2^2 + \sigma_3^2}} = 0.$$

Оскільки головні напруження довільні, тобто в загальному випадку

$$\sigma_1^2 - \sigma_3^2 \neq 0, \quad \sigma_2^2 - \sigma_3^2 \neq 0,$$

то рівняння (1.4.3) виконуються за умови $n_1 = 0$, $n_2 = 0$, але з (1.4.1) випливає $n_3 = 1$, і тоді $p = \sigma_3$.

Аналогічно, виключаючи з умови (1.4.1) n_1 або n_2 і прирівнюючи до нуля похідні, одержимо ще два випадки

$$n_1 = 1, \quad n_2 = n_3 = 0, \quad p = \sigma_1,$$
$$n_2 = 1, \quad n_1 = n_3 = 0, \quad p = \sigma_2.$$

Одержані результати показують, що вектор напружень p досягає екстремальної величини на площинках, які збігаються з головними. Враховуючи умову $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, маємо максимальну величину $p = \sigma_1$, мінімальну $p = \sigma_3$.

1.5 Максимальні дотичні напруження

Дотичні напруження визначаються теоремою Піфагора

$$\tau_n = \sqrt{p^2 - \sigma_n^2}.$$

Зручніше досліджувати на максимум величину $\tau_n^2 = p^2 - \sigma_n^2$, яка досягне максимуму одночасно з τ_n. Як і при знаходженні максимальної величини нормальних напружень, для спрощення задачі осі координат орієнтуємо по нормалі до головних площинок, тоді величина напружень визначається формулою

$$p^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2,$$

а величина нормальних -

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2.$$

Тоді квадрат дотичних напружень дорівнює

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - \left(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2\right)^2.$$

Як і в попередньому випадку, маємо задачу визначення максимуму величини, яка залежить від одиничної нормалі $\vec{n}$ за умови $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. Щоб перейти до задачі визначення максимуму τ_n^2 без обмежень, виключаємо n_3 з умови нормування $n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$ і одержуємо

$$\begin{aligned}\tau_n^2 = &\left(\sigma_1^2 - \sigma_3^2\right) n_1^2 + \left(\sigma_2^2 - \sigma_3^2\right) n_2^2 + \sigma_3^2 - \\ &- \left[(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 + \sigma_3\right]^2.\end{aligned}$$

Беремо похідні $\partial\tau_n^2/\partial n_1$, $\partial\tau_n^2/\partial n_2$, прирівнюємо їх до нуля і одержуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned}\left(\sigma_1^2 - \sigma_3^2\right) n_1 - 2\left[(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 + \sigma_3\right](\sigma_1 - \sigma_3) n_1 = 0,\\ \left(\sigma_2^2 - \sigma_3^2\right) n_2 - 2\left[(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 + \sigma_3\right](\sigma_2 - \sigma_3) n_2 = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\{(\sigma_1 + \sigma_3) - 2\left[(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 + \sigma_3\right]\right\} n_1 = 0,\\ \left\{(\sigma_2 + \sigma_3) - 2\left[(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 + \sigma_3\right]\right\} n_2 = 0.\end{aligned}$$

Проаналізуємо розв'язки одержаної системи. Варіант $n_1 = 0$, $n_2 = 0$ веде до того, що $n_3 = 1$ і тоді площинка є головною, на якій за визначенням $\tau_n^2 = 0$. Проте нас цей розв'язок не цікавить, тому що він дає мінімальну величину τ_n^2, а нам потрібна максимальна. Другий розв'язок $n_2=0$, $n_1\neq 0$, тоді

$$\sigma_1+\sigma_3-2\big[(\sigma_1-\sigma_1)n_1^2+\sigma_3\big]=0,$$

звідки $1-2n_1^2=0$, $n_1=1/\sqrt{2}$. З умови $n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$ маємо розв'язок

$$n_1=1/\sqrt{2},\ n_2=0,\ n_3=1/\sqrt{2}.$$

Тоді

$$\tau_n^2=(\sigma_1-\sigma_3)^2/4,\quad \tau_n=(\sigma_1-\sigma_3)/2.$$

Аналогічно знаходимо третій можливий розв'язок $n_1=0$, $n_2\neq\ 0$ що дає: $n_1=0$, $n_2=1/\sqrt{2}$, $n_3=1/\sqrt{2}$, $\tau_n=(\sigma_2-\sigma_3)/2$.

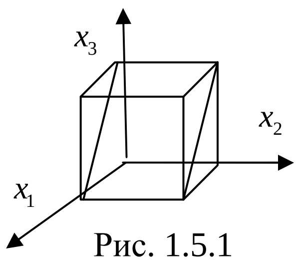

Рис. 1.5.1

Якщо з умови $n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$ визначити не n_3, а n_1 або n_2, то одержимо ще один розв'язок

$$n_1=1/\sqrt{2},\quad n_2=1/\sqrt{2},\quad n_3=0,$$
$$\tau_n=(\sigma_1-\sigma_2)/2.$$

Враховуючи, що $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$, одержуємо

$$\tau_{\max}=(\sigma_1-\sigma_3)/2 \tag{1.5.1}$$

і ці максимальні напруження діють на площинці з нормаллю

$$n_1=1/\sqrt{2},\quad n_2=0,\quad n_3=1/\sqrt{2}. \tag{1.5.2}$$

Оскільки проекції одиничної нормалі дорівнюють напрямним косинусами, то

$$\cos\varphi_x=1/\sqrt{2},\quad \varphi_x=\pi/4,$$
$$\cos\varphi_z=1/\sqrt{2},\quad \varphi_z=\pi/4,$$

тобто ця площинка рівнонахилена до осей x_1 і x_3 або x, z (рис.1.5.1). Інші екстремальні дотичні напруження діють на площинках, однаково нахилених до осей x_1,x_2 або x_2,x_3 і досягають величин

$$\tau=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2},$$

$$\tau=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}.$$

Задача 1.5.1 Задано тензор напружень у точці

$$||\sigma_{ij}|| = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначити максимальні дотичні напруження.

Розв'язок

Спочатку визначаємо головні напруження. Для цього знаходимо інваріанти $I_1 = 0, \quad I_2 = -175, \quad I_3 = -750$. Записуємо характеристичне рівняння

$$\sigma^3 - 150\sigma + 750 = 0,$$

його корені $\sigma_1 = 10, \quad \sigma_1 = 5, \quad \sigma_3 = -15$. Максимальні дотичні напруження

$$(\sigma_1 - \sigma_3)/2 = (10 + 15)/2 = 12{,}5.$$

1.6 Диференціальні рівняння рівноваги, симетричність тензора напружень

Розглядається тіло, обмежене поверхнею A з об'ємом V, яке перебуває в стані рівноваги (рис.1.6.1).

Обов'язковими умовами стану рівноваги є рівність нулю головного вектора $\vec{R} = 0$ і головного моменту $\vec{M} = 0$ сил, прикладених до тіла. Скористаємося першою умовою $\vec{R} = 0$. Всі сили, прикладені до тіла, поділяються на дві групи: перша група–сили прикладені до поверхні тіла, які визначаються своєю інтенсивністю–силою прикладеною до одиниці площі поверхні $\vec{p}$; друга група–об'ємні сили, які прикладені до одиниці об'єму і визначаються інтенсивністю $\vec{X}$–силою прикладеною до одиниці об'єму. На малу площинку площею dA діє мала сила $\vec{p}dA$. Шоб знайти силу, прикладену до поверхні тіла, треба знайти суму всіх цих малих сил, тобто взяти інтеграл по поверхні тіла. Переходячи до границі одержимо $\int_A \vec{p}dA$. На малий об'єм dV діє мала сила $\vec{X}dV$. Для того щоб знайти силу, прикладену до всього тіла, треба знайти суму всіх цих малих сил, тобто взяти інтеграл по об'єму тіла. Переходячи до границі одержимо $\int_V \vec{X}dV$.

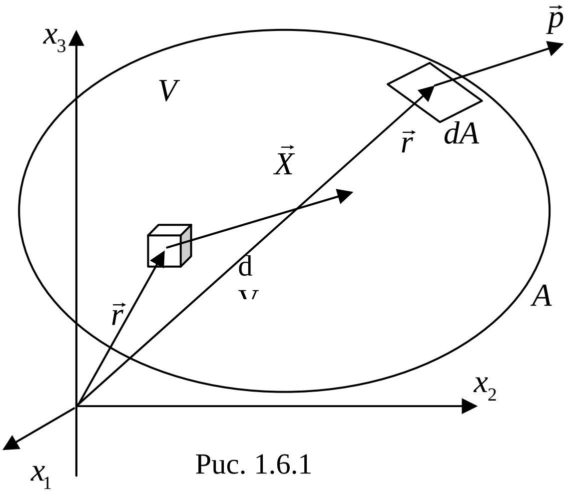

Рис. 1.6.1

Головний вектор сил, прикладених до тіла, дорівнює сумі поверхневих і об'ємних сил. З умови рівноваги він дорівнює нулю, тому одержимо

$$\int_A \vec{p}\,dA + \int_V \vec{X}\,dV = 0. \tag{1.6.1}$$

Проектуючи на осі координат (1.6.1), одержуємо

$$\int_A \vec{p}_i\,dA + \int_V \vec{X}_i\,dV = 0. \tag{1.6.2}$$

Виражаємо в першому інтегралі інтенсивність поверхневих сил через напруження, скориставшись зв'язком між вектором на довільно нахиленій площинці і тензором напружень $p_i = \sigma_{ij}n_j$, і замінюємо інтеграл по поверхні інтегралом по об'єму за допомогою формули Гаусса–Остроградського

$$\int_A \vec{p}_i\,dA + \int_V \vec{X}_i\,dV = \int_A \sigma_{ij}n_j\,dA + \int_V \vec{X}_i\,dV = \int_V (\sigma_{ij,j} + X_i)\,dV.$$

В силу вимоги (1.6.1) маємо

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + X_i)\,dV = 0.$$

Оскільки об'єм довільний, то для того щоб одержаний інтеграл дорівнював нулю необхідною і достатньою умовою є вимога яка полягає втому що підінтегральна функція дорівнює нулю, тому

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad i,j = 1,2,3. \tag{1.6.3}$$

Це і є диференціальні рівняння рівноваги.

Скористаємося другою умовою рівноваги–головний момент $\vec{M} = 0$. Момент сили дорівнює векторному добутку радіуса-вектора на силу. Тому елементарний момент відносно центра моментів O можна знайти за формулою

$$d\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p} dA + \vec{r} \times \vec{X} dV.$$

Якщо скористатися символами Леві-Чівіта $\in_{ijk}$, які визначаються наступним чином:

1) $i,j,k = 1,2,3$, тобто індекси i,j,k набувають значення 1,2,3;

2) якщо два з них однакові, то $\in_{ijk} = 0$;

3) якщо індекси i,j,k створюють парну перестановку з 1,2,3, то $\in_{ijk} = 1$;

4) якщо індекси i,j,k створюють непарну перестановку з 1,2,3, то $\in_{ijk} = -1$.

Елементарний момент відносно центра моментів O можна записати у вигляді

$$\vec{d}M = \in_{ijk} \vec{e}_i x_j p_k dA + \in_{ijk} \vec{e}_i x_j X_k dV,$$

де $\vec{e}_i$–базисні вектори системи координат; x_j–проекції радіуса-вектора на координатні осі

$$\vec{r} = \vec{e}_j x_j = \vec{e}_1 x_1 + \vec{e}_2 x_2 + \vec{e}_3 x_3;$$

$p_k, \quad X_k$–проекції інтенсивності сил $\vec{p}$, прикладених до одиниці площі, поверхні і відповідно $\vec{X}$, прикладеної до одиниці об'єму.

Щоб знайти весь момент, беремо інтеграл по поверхні і відповідно по об'єму

$$\vec{M} = \int_A \in_{ijk} \vec{e}_i x_j p_k dA + \int_V \in_{ijk} \vec{e}_i x_j X_k dV.$$

Проектуючи на осі координат, маємо

$$M_i = \int_A \in_{ijk} x_j p_k dA + \int_V \in_{ijk} x_j X_k dV.$$

Поверхневі сили виражаємо через компоненти тензора напружень $p_k = \sigma_{km} n_m$ і використовуємо умову $\vec{M} = 0$

$$\int_A \in_{ijk} x_j \sigma_{km} n_m dA + \int_V \in_{ijk} x_j X_k dV = 0.$$

Перший інтеграл по поверхні замінюємо інтегралом по об'єму за формулою Гаусса—Остроградського

$$\int_V (\in_{ijk} x_j \sigma_{km}),_m dV + \int_V \in_{ijk} x_j X_k dV = 0,$$
$$\int_V \in_{ijk} x_j,_m \sigma_{km} dV + \int_V \in_{ijk} x_j \sigma_{km},_m dV + \int_V \in_{ijk} x_j X_k dV = 0,$$
$$\int_V \in_{ijk} x_j,_m \sigma_{km} dV + \int_V \in_{ijk} x_j (\sigma_{km},_m + X_k) dV = 0.$$

Внаслідок диференціальних рівнянь рівноваги підінтегральна функція в другому інтегралі дорівнює нулю, тому

$$\int_V \in_{ijk} x_j,_m \sigma_{km} dV = 0.$$

Наслідком незалежності координат є те, що похідні $x_j,_m$ дорівнюють одиниці, якщо координати збігаються і нулю, якщо—не збігаються:

$$x_j,_m = \frac{\partial x_j}{\partial x_m} = \begin{cases} 1 & (j = m) \\ 0 & (j \neq m) \end{cases} = \delta_{jm},$$

де δ_{jm}—символ Кронекера. Враховуючи, що $\delta_{jm}\sigma_{km} = \sigma_{kj}$, маємо

$$\int_V \in_{ijk} \sigma_{kj} dV = 0,$$

$$\int_V (\in_{123} \sigma_{32} + \in_{132} \sigma_{23}) dV = 0,$$
$$\int_V (\sigma_{32} - \sigma_{23}) dV = 0,$$
$$(\sigma_{32} - \sigma_{23}) = 0,$$
$$\sigma_{32} = \sigma_{23}.$$

Оскільки об'єм довільний, то з останніх співвідношень випливає, що

$$\begin{aligned} &\sigma_{12} = \sigma_{21}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{32}, \quad \sigma_{31} = \sigma_{13}, \\ &\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \end{aligned} \tag{1.6.4}$$

Це доводить, що тензор напружень симетричний і має тільки шість незалежних компонент. Крім того, одержаний результат показує, що одних рівнянь рівноваги недостатньо для визначення напружень тому, що тензор напружень має шість незалежних компонент, а рівнянь рівноваги тільки три.

Задача 1.6.1 Вивести рівняння рівноваги і довести, що тензор напружень симетричний, шляхом безпосереднього проектування сил і моментів на осі координат.

Розв'язок

Розглянемо елементарний куб розмірами dx,dy,dz, вирізаний з тіла. На грані $x = 0$ діють напруження $\sigma_x, \quad \tau_{xy}, \quad \tau_{xz}$. На протилежній грані, координата якої x отримує приріст dx, напруження одержують відповідний приріст і дорівнюють

$$\begin{aligned} \sigma_x + d\sigma_x &= \sigma_x + \tfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx, \\ \tau_{xy} + d\tau_{xy} &= \tau_{xy} + \tfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx, \\ \tau_{xz} + d\tau_{xz} &= \tau_{xz} + \tfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx. \end{aligned}$$

Відповідні напруження, що діють на гранях, нормалі до яких паралельні осям x_2 або y і x_3 або z, показані на рис.1.6.2. Унаслідок умов рівноваги сума проекцій сил на осі і сума моментів відносно осей повинна дорівнювати нулю. Проектуємо сили на вісь x_1

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dxdz - \tau_{yx} dzdx +$$
$$+ \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dxdy - \tau_{zx} dxdy + X dxdydz = 0,$$

де X–проекція інтенсивності об'ємних сил на вісь x.

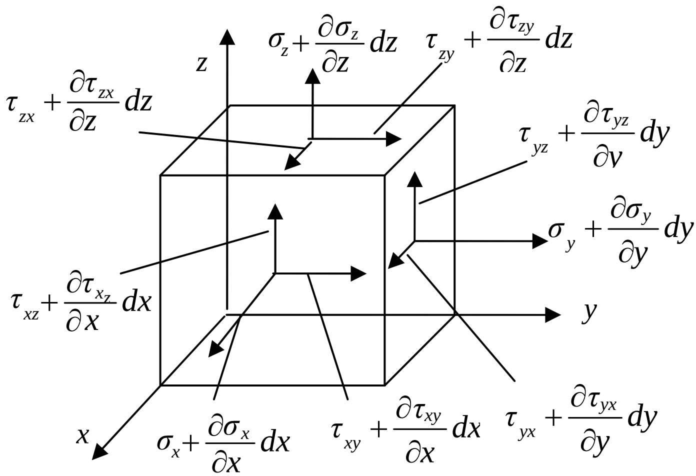

Рис. 1.6.2

Після зведення подібних доданків і ділення на об'єм куба $dxdydz$ одержуємо $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$. Аналогічно, проектуючи на останні осі, одержимо ще два рівняння.

Одержана система з трьох диференціальних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0, \end{array} \right. \tag{1.6.5}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0, \qquad \sigma_{ij,j} + X_i = 0$$

називається *диференціальними рівняннями рівноваги.*

Скористаємось умовою - сума моментів відносно довільної осі дорівнює нулю. Розглянемо суму моментів відносно осі x_3, або z. Почнемо з граней, нормаль до яких паралельна осі x_1 :

$$\sigma_x \, dydz \frac{dy}{2} - \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz \frac{dy}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dydzdx.$$

Потім розглянемо грань, нормаль до якої паралельна осі x_2 :

$$-\sigma_y dxdz\frac{dx}{2}+\left(\sigma_y+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy\right)dxdz\frac{dx}{2}-\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dxdzdy.$$

Після цього розглядаємо грань, нормаль до якої паралельна осі x_3:

$$\left(\tau_{zy}+\tfrac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz\right)dxdy\tfrac{dx}{2}-\tau_{zy}d_xd_y\tfrac{dx}{2}+\tau_{zx}dxdy\tfrac{dy}{2}-$$
$$-\left(\tau_{zx}+\tfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dxdy\tfrac{dy}{2}.$$

Сума цих трьох доданків після зведення подібних, відкидання членів четвертого порядку (малих порівняно з членами третього порядку) і ділення на об'єм дає $\tau_{xy}-\tau_{yx}=0$. Аналогічні результати дають умови суми моментів відносно осей x_1 і x_2. В результаті маємо

$$\tau_{xy}=\tau_{yx},\quad \tau_{yz}=\tau_{zy},\quad \tau_{zx}=\tau_{xz}. \tag{1.6.6}$$

Ці співвідношення показують, що дотичні напруження на взаємноортогональних площинках однакові за величиною. Це явище називається *законом парності дотичних напружень*. Остаточно з умов рівноваги випливає, що компоненти тензора напружень задовольняють три диференціальні рівняння $\sigma_{ij},_j+X_i=0$. Зі співвідношень $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ випливає, що тензор напружень має шість незалеж них компонент, які задовольняють три рівняння. З трьох рівнянь рівноваги або статики визначити однозначно шість величин неможливо, тому задача визначення напружень є статично невизначеною.

Задача 1.6.2 Записати рівняння рівноваги для малого за розмірами тіла, яке перебуває на поверхні Землі (рис.1.6.3).

Розв'язок

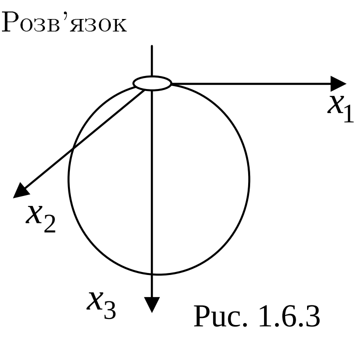

Рис. 1.6.3

Оскільки розглядається мале тіло, то вважається, що сила притягання тіла Землею напрямлена паралельно осі x_3, яка проходить через центр Землі, тому $X=Y=0$, $Z=\rho g$, де g–прискорення вільного падіння; ρ–густина. Тоді рівняння рівноваги набирають вигляду

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\rho g=0.$$

Задача 1.6.3 Записати рівняння рівноваги для тіла, яке перебуває у полі гравітації зосередженої маси M, розташованої у точці з координатами (ξ,η,ζ) (рис.1.6.4).

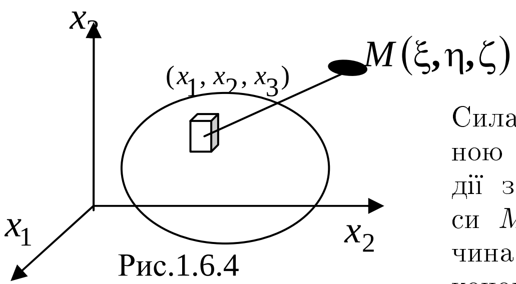

Рис.1.6.4

Сила гравітації є центральною силою, тому лінія її дії з'єднує центри ваги маси M і елемента dV. Величина сили визначається законом всесвітнього тяжіння $F=k\frac{m_1m_2}{r^2}$. Де k–гравітаційна стала, $m_1=\rho$, $m_2=M$, де ρ–густина, M – величина зосередженої маси, r–відстань між центрами мас M і елементарного об'єму dV

$$r^2=(\xi-x_1)^2+(\eta-x_2)^2+(\zeta-x_3)^2.$$

Для того щоб знайти проекції сили $\vec{F}$ на осі координат, треба знати косинуси кутів між напрямком сили і осями координат. Оскільки напрямок сили співпадає з напрямком відрізка, який з'єднує центри ваги, косинуси кутів між відрізком і осями координат дорівнюють відношенням проекцій відрізка на осі до його довжини

$$\cos\phi_x=\frac{\xi-x}{r},\quad \cos\phi_y=\frac{\eta-y}{r},\quad \cos\phi_z=\frac{\zeta-z}{r}.$$

Рівняння рівноваги набувають вигляду

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+\frac{\rho M}{r^3}(\xi-x)=0,$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+\frac{\rho M}{r^3}(\eta-y)=0,$$
$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\rho M}{r^3}(\zeta-z)=0.$$

Задача 1.6.4 Показати, що за відсутності об'ємних сил рівняння рівноваги можна задовольнити, виражаючи напруження через систему функцій:

а) Максвелла $\phi_1(x_1,x_2,x_3)$, $\phi_2(x_1,x_2,x_3)$, $\phi_3(x_1,x_2,x_3)$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}&=\frac{\partial^2\phi_3}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x_3^2},\ \sigma_{12}=-\frac{\partial^2\phi_3}{\partial x_1\partial x_2},\\
\sigma_{22}&=\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2\phi_3}{\partial x_1^2},\ \sigma_{23}=-\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x_2\partial x_3},\\
\sigma_{33}&=\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x_2^2},\ \sigma_{31}=-\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x_3\partial x_1}.
\end{aligned}$$

б) Морера $\psi_1(x_1,x_2,x_3),\psi_2(x_1,x_2,x_3),\psi_3(x_1,x_2,x_3)$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}&=\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_2\partial x_3},\ \sigma_{12}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}-\frac{\partial\psi_3}{\partial x_3}\right),\\
\sigma_{22}&=\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1\partial x_3},\ \sigma_{23}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\psi_3}{\partial x_3}\right),\\
\sigma_{33}&=\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x_1\partial x_2},\ \sigma_{31}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}-\frac{\partial\psi_3}{\partial x_3}\right).
\end{aligned}$$

1.7 Кульовий тензор, девіатор напружень

Тензор напружень можна представити у вигляді суми двох тензорів $\hat\sigma=\hat p+\hat s$, де

$$p_{ij}=\delta_{ij}p\,,\quad p=(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})/3=I_1/3, \tag{1.7.1}$$

$$\hat p=\begin{pmatrix} p & 0 & 0\\ 0 & p & 0\\ 0 & 0 & p\end{pmatrix} \tag{1.7.2}$$

тензор $\hat p$ називається кульовим тензором, тензор $\hat s=\hat\sigma-\hat p$

$$\hat s=\begin{pmatrix} \sigma_{11}-p & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-p & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-p\end{pmatrix} \tag{1.7.3}$$

називається девіатором напружень. Властивість кульвого тензора полягає в тому, що при всіх поворотах системи координат він зберігає діагональний вигляд і його компоненти не змінюються, оскільки вони дорівнюють $I_1/3$, а інваріанти не змінюються. З фізичної точки зору це означає, що якщо в якійсь системі координат на гранях елементарного куба діють однакові нормальні напруження, а дотичні відсутні, то як би не вирізався куб у вибраній точці, на його гранях діють однакові напруження. Це можна показати, скориставшись формулами перетворення компонент тензора напружень при повороті системи координат

$$\sigma'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jm}\sigma_{km}.$$

Оскільки для кульвого тензора $p_{km} = p\delta_{km}$, тому

$$p'_{ij} = \alpha_{in}\alpha_{jm}p\delta_{km} = \alpha_{ik}\alpha_{jk}p = \delta_{ij}p,$$

$$p'_{ij} = \delta_{ij}p.$$

Це доводить, що компоненти кульового тензора не змінюються. Основною властивістю девіатора напружень є те, що його перший інваріант $I_1(s) = 0$;

$$I_1(s) = s_{11} + s_{22} + s_{33} = \sigma_{11} - p + \sigma_{22} - p + \sigma_{33} - p = 0.$$

Розглянемо напруження, які діють на октаедричних площинках. Нагадаємо, що октаедричними площинками називаються площинки, які утворюють грані правильного октаедра і вони однаково нахилені до координатних осей. Тому проекції одиничної нормалі до октаедричної площинки, або напрямні косинуси є однаковими, $n_1 = n_2 = n_3$. Оскільки

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1,$$

то $n_1 = n_2 = n_3 = 1/\sqrt{3}$. Для спрощення перетворень осі координат напрямляються по нормалям до головних площадок, тоді тензор напружень діагоналізується

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо компоненти вектора напружень $p_i = \sigma_{ij} n_j$:

$$p_1 = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}, \quad p_2 = \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}, \quad p_3 = \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}.$$

Нормальні напруження визначаємо, проектуючи вектор напружень на нормаль $\sigma = \vec{p} \cdot \vec{n} = p_i n_i$:

$$\sigma = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{1}{3} I_1 = p.$$

Одержаний результат показує, що нормальні напруження на октаедричних площинках дорівнюють компонентам кульового тензора. Дотичні напруження знаходять за теоремою Піфагора:

$$\tau = \sqrt{p^2 - \sigma^2},$$

$$\tau = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - \sigma^2} = \sqrt{\tfrac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3} - \tfrac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{9}} =$$
$$= \tfrac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \ .$$

Знайдемо другий інваріант девіатора напружень

$$\hat{s} = \begin{pmatrix} \sigma_1 - p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - p \end{pmatrix},$$

$$I_2(s) = (\sigma_1 - p)(\sigma_2 - p) + (\sigma_2 - p)(\sigma_3 - p) + (\sigma_1 - p)(\sigma_3 - p) =$$

$$= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 - 2p(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + 3p^2 =$$

$$= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 - 6p^2 + 3p^2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 - 3p^2 =$$
$$= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 - \tfrac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{3} =$$
$$= -\tfrac{1}{3}\big(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\big).$$

Порівняння квадрата величини дотичних напружень на октаедричних площинках з другим інваріантом девіатора напружень показує, що вони відрізняються тільки коефіцієнтом.

Задача 1.7.1 Розкласти тензор напружень

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

на кульовий тензор і девіатор напружень. Показати, що перший інваріант девіатора дорівнює нулю.

Розв'язок

Знаходимо компоненти кульового тензора

$$p = (12+9+3)/3 = 8,$$

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

знаходимо девіатор напружень $\hat{\sigma} = \hat{p} + \hat{s}$, $\hat{s} = \hat{\sigma} - \hat{p}$

$$\hat{s} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix},$$

визначаємо перший інваріант девіатора

$$I_1(s) = s_{11} + s_{22} + s_{33} = 4 + 1 - 5 = 0.$$

Задача 1.7.2 Показати, що розкласти тензор напружень $\hat{\sigma} = ||\sigma_{ij}||$ на кульовий тензор і девіатор напружень можна тільки єдиним способом.

Розв'язок

Нехай існує два кульових тензора $\hat{p}$ і $\hat{p}^*$. За визначенням компонент кульового тензора

$$p = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3,$$

$$p* = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3,$$

тому $\hat{p}$=$\hat{p}^*$ і кульові тензори $\hat{p}$ і $\hat{p}^*$ збігаються.

Оскільки $\hat{s} = \hat{\sigma} - \hat{p}$, $\hat{s}* = \hat{\sigma} - \hat{p}*$ то $\hat{s} = \hat{s}*$ і девіатори також збігаються, тому розкласти тензор напружень $\hat{\sigma} = ||\sigma_{ij}||$ на кульовий і девіатор можна тільки єдиним способом.

1.8 Круги напружень

Зручне двовимірне зображення тривимірного напруженого стану дають круги Мора. Щоб їх побудувати, за осі координат вибирають головні осі тензора напружень (рис.1.8.1). Вважається, що всі головні напруження різні і упорядковані: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. За таких умов вектор напружень на площинці dA має нормальну σ_n і дотичну τ_n компоненти, величини їх визначають за співвідношеннями

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2,$$
$$p^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$$

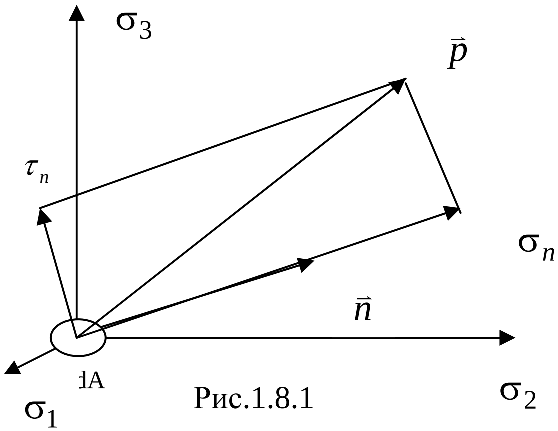

Рис.1.8.1

за умови

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$$

Використовуючи ці співвідношення, можна виразити квадрати проекцій одиничної нормалі через напруження

$$n_1^2 = \frac{(\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) + \tau_n^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}, \qquad (1.8.1a)$$

$$n_2^2 = \frac{(\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) + \tau_n^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}, \qquad (1.8.1b)$$

$$n_3^2 = \frac{(\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) + \tau_n^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}. \qquad (1.8.1c)$$

На використанні цих рівностей будуються круги Мора на площині напружень, на якій віссю σ_n є вісь абсцис, а віссю τ_n—вісь ординат (рис.1.8.2).

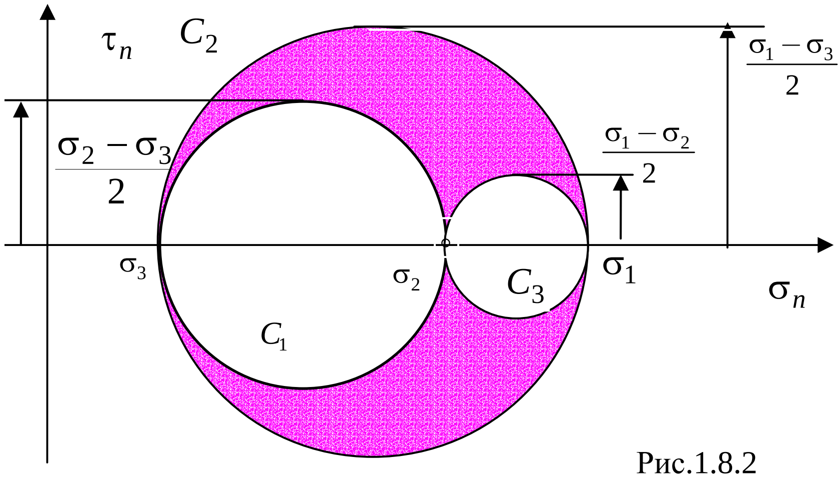

Рис.1.8.2

Оскільки величини $(\sigma_1 - \sigma_2) > 0$ і $(\sigma_1 - \sigma_3) > 0$, а також $n_1^2 > 0$, то чисельник (1.8.1.a) задовольняє умову

$$(\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) + \tau_n^2 \geq 0.$$

Цій умові в площині напружень (σ_n, τ_n) відповідають точки, які лежать поза колом

$$[\sigma_n - (\sigma_2 + \sigma_3)/2]^2 + \tau_n^2 = [(\sigma_2 - \sigma_3)/2]^2$$

і на його границі, яку на рисунку позначено C_1. Так само, з того, що $n_2^2 > 0$, $(\sigma_2 - \sigma_3) > 0$ і $(\sigma_2 - \sigma_1) < 0$, випливає, що чисельник (1.8.1b) задовольняє умову

$$(\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) + \tau_n^2 \leq 0,$$

яка вказує на те, що точки з координатами (σ_n, τ_n) лежать всередині кола

$$[\sigma_n - (\sigma_3 + \sigma_1)/2]^2 + \tau_n^2 = [(\sigma_3 - \sigma_1)/2]^2$$

і на його границі, яку позначено літерою C_2.

Аналогічно, з того, що $n_3^2 > 0$, $(\sigma_3 - \sigma_1) < 0$ і $(\sigma_3 - \sigma_2) < 0$, випливає, що чисельник (1.8.1c) задовольняє умову

$$(\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) + \tau_n^2 \geq 0,$$

яка вказує на те, що точки (σ_n,τ_n) лежать зовні кола

$$[\sigma_n - (\sigma_1 + \sigma_2)/2]^2 + \tau_n^2 = [(\sigma_1 - \sigma_2)/2]^2$$

і на його границі, яку позначено літерою C_3.

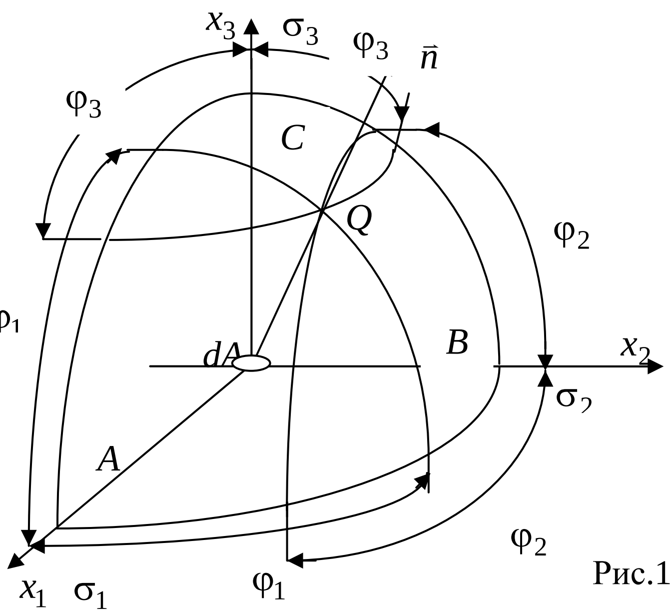

Рис.1.8.3

Кожній парі величин (σ_n,τ_n) відповідає вектор напружень $\vec{p}$, а напружений стан визначається головними напруженнями $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$. Вектору напружень відповідає затемнена область, обмежена колами C_1,C_2,C_3. Оскільки знак дотичних напружень не має принципового значення, то можна обмежитися тільки верхньою частиною симетричної діаграми. Зв'язок між діаграмою напружень Мора і фізичним напруженим станом може бути встановлено за допомогою рис.1.8.3, на якому зображено перший октант сфери з центром у тій точці середовища на елементі dA з нормаллю $\vec{n}$, в якій аналізується напружений стан. Нормаль $\vec{n}$ до сферичної поверхні ABC в довільній точці Q одночасно є нормаллю до елемента поверхні dA. Внаслідок симетрії тензора напружень і використання головних напрямків тензора напружень як осей координат, напружений стан у точці повністю визначається сукупністю тих положень, які може займати точка Q на поверхні ABC.

На рис.1.8.3 кругові дуги визначають таке положення точки Q, на якому одна проекція одиничної нормалі $\vec{n}$ до елемента поверхні dA або, еквівалентно, один з напрямних косинусів сталий

$$n_1 = \cos\varphi_1, \quad n_2 = \cos\varphi_2, \quad n_3 = \cos\varphi_3.$$

На граничних дугах $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} = 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} = 0$, $\varphi_3 = \frac{\pi}{2} = 0$,

$$n_1 = \cos\varphi_1 = \cos\tfrac{\pi}{2} = 0, \quad n_2 = \cos\varphi_2 = \cos\tfrac{\pi}{2} = 0,$$
$$n_3 = \cos\varphi_3 = \cos\tfrac{\pi}{2} = 0.$$

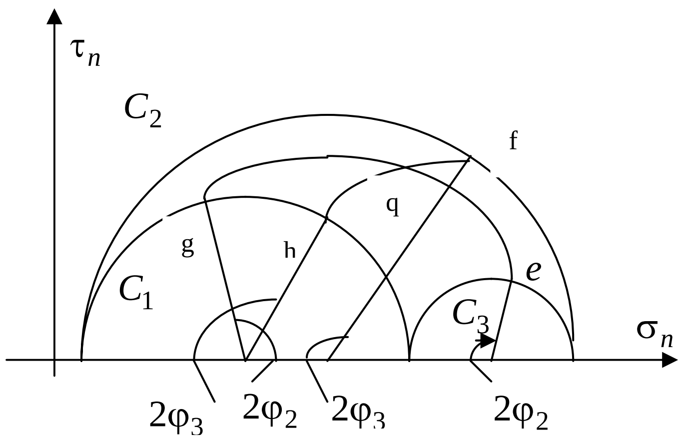

Рис.1.8.4

Відповідно до першої з цих рівностей і рівняння (1.8.1а) вектори напружень для точок Q, які лежать на дузі BC і відповідають умові $n_1 = \cos\varphi_1$, $n_1 = \cos(\pi/2) = 0$, мають компоненти напружень, яким відповідають точки на дузі C_1 (див. рис.1.8.2). Аналогічно, дуга CA на рис.1.8.3 відповідає дузі C_2, а AB—C_3. Компоненти вектора напружень σ_n, τ_n для довільного положення точки Q можна визначити побудовою, виконаною на рис.1.8.4. Точку e на C_3 можна одержати, провівши радіус із центра C_3 під кутом $2\varphi_2$. Кути повинні подвоюватися, тому що на чверті сфери дуга AB містить $\pi/2$, а на площині відповідна дуга C_3 містить π. Аналогічно будуються точки g, h, f і відповідні пари з'єднуються круговими дугами з центрами на осі абсцис. Точка перетину кругових дуг ge і hf дає величини нормальних σ_n і дотичних τ_n напружень на площинці dS з відповідною одиничною нормаллю, кінець якої знаходиться в точці Q (див. рис.1.8.3).

Задача 1.8.1. Напружений стан в точці визначається тензором напружень. Знайти аналітично компоненти вектора напружень на площинці з одиничною нормаллю $\vec{n}(2/3, 1/3, 2/3)$. Перевірити результати за допомогою кругів Мора.

$$||\sigma_{ij}|| = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок

За формулою визначення вектора напружень на довільно нахилених площинках $p_i = \sigma_{ij} n_j$, маємо

$$p_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 = -5 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{10}{3},$$

$$p_2 = \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 = 0 \cdot \frac{2}{3} - 6 \cdot \frac{1}{3} - 12 \cdot \frac{2}{3} = -10,$$

$$p_3 = \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 = 0 \cdot \frac{2}{3} - 12 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{10}{3}.$$

Визначаємо величину нормального напруження

$$\sigma_n = \vec{p} \cdot \vec{n} = p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3,$$

$$\sigma_n = -\frac{10}{3} \cdot \frac{2}{3} - 10 \cdot \frac{1}{3} - \frac{10}{3} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{70}{9}.$$

Величину дотичного напруження визначаємо за формулою $\tau_n = \sqrt{p^2 - \sigma_n^2} = \frac{10}{9}\sqrt{50} \approx \frac{70{,}7}{9}$.

Знаходимо інваріанти $I_1 = -5-6+1 = -10$,

$$I_2 = \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -6 & -12 \\ -12 & 1 \end{vmatrix} = -125,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{vmatrix} = 750.$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0,$$

$$\sigma^3 + 10\sigma^2 - 125\sigma - 750 = 0,$$

розв'язуємо його і знаходимо величини головних напружень $\sigma_1 = 10$, $\sigma_2 = -5$, $\sigma_3 = -15$. На знайдених головних напруженнях будуються круги Мора. Для того щоб визначити кути ϕ_1—кут між нормаллю $\vec{n}$ та напрямком σ_1, ϕ_2—кут між нормаллю $\vec{n}$ та напрямком σ_3 необхідно спочатку визначити орієнтацію головних осей тензора напружень з системи рівнянь

$$(\sigma_{11}-\sigma)n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 = 0,$$

$$\sigma_{21}n_1 + (\sigma_{22}-\sigma)n_2 + \sigma_{23}n_3 = 0,$$

$$\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + (\sigma_{33}-\sigma)n_3 = 0$$

і умови нормування $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. Крім того матриця перетворення повинна бути додатною. Для $\sigma = \sigma_1 = 10$

$$\begin{array}{llll} -15n_1 & +0\cdot n_2 & +0\cdot n_3 & = 0, \\ 0\cdot n_1 & -16n_2 & -12n_3 & = 0, \\ 0\cdot n_1 & -12n_2 & -9n_3 & = 0, \end{array}$$

звідки $n_1 = 0$, $4n_2 + 3n_3 = 0$. З умови нормування $n_2^2 + n_3^2 = 1$, знаходимо

$$n_1 = 0,\ n_2 = 3/5,\ n_3 = -4/5.$$

Аналогічно для $\sigma = \sigma_2 = -5$

$$n_1 = 1, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 0,$$

для $\sigma = \sigma_3 = -15$

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 4/5, \quad n_3 = 3/5.$$

Звичайно, при добуванні корінь може бути як додатний, так і від'ємний, але в кінці детермінант матриці перетворення повинен бути додатним і $|\alpha_{ij}| = 1$, матриця повороту має вигляд

$$||\alpha_{ij}|| = \begin{pmatrix} 0 & 3/5 & -4/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Тепер можна знайти орієнтацію заданої площинки в системі координат, коли її осі є головними напрямками тензора напружень $n'_i = \alpha_{ij} n_j$:

$$n'_1 = \alpha_{11}n_1 + \alpha_{12}n_2 + \alpha_{13}n_3 = 0 \cdot \frac{2}{3} - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$n'_2 = \alpha_{21}n_1 + \alpha_{22}n_2 + \alpha_{23}n_3 = 1 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3},$$

$$n'_3 = \alpha_{31}n_1 + \alpha_{32}n_2 + \alpha_{33}n_3 = 0 \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

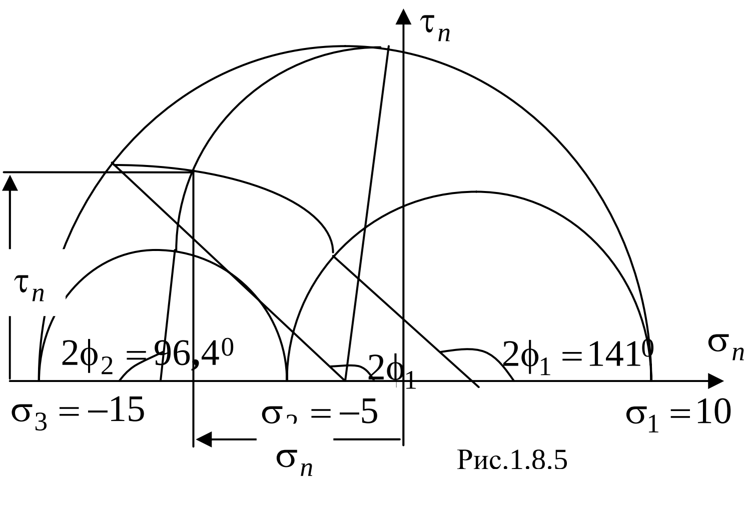

Рис.1.8.5

Визначивши напрямні косинуси, можна знайти кути

$$\phi_1 = \arccos(2/3) = 70{,}5\text{град.}, \quad \phi_2 = \arccos(1/3) = 48{,}2\text{град.}.$$

Побудову точки (σ_n,τ_n) показано на рис.1.8.5.

1.9 Плоский напружений стан

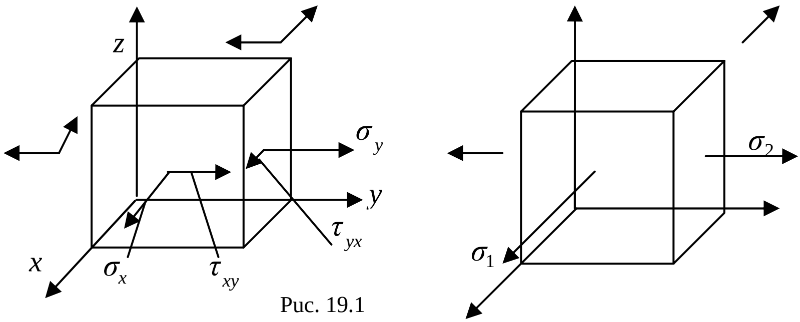

Рис. 19.1

Напружений стан називається плоским, якщо одне з головних напружень відсутнє, або можна також сказати, що всі напруження в напрямку однієї з осей дорівнюють нулю (рис.1.9.1), будемо вважати в напрямку осі z. Тензор напружень в цьому випадку має тільки чотири відмінні від нуля компоненти

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}. \tag{1.9.1}$$

Знайдемо формули для визначення напружень при повороті осей координат для плоского напруженого стану. Матриця повороту осей в площині має вигляд

$$\|\alpha_{ij}\| = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{1.9.2}$$

Скориставшись загальними формулами $\sigma'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jm}\sigma_{km}$, одержимо

$$\sigma'_{11} = \alpha_{11}^2\sigma_{11} + \alpha_{12}\alpha_{12}\sigma_{22} +$$

$$+\alpha_{11}\alpha_{12}\sigma_{12} + \alpha_{12}\alpha_{11}\sigma_{21} =$$

$$= \alpha_{11}^2\sigma_{11} + \alpha_{12}^2\sigma_{22} + 2\alpha_{11}\alpha_{12}\sigma_{12}.$$

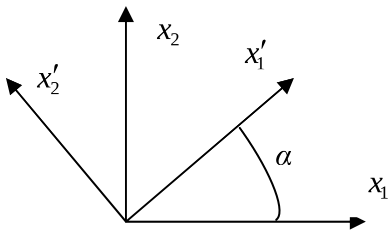

Рис.1.9.2

Аналогічно знаходять компоненти тензора напружень σ_{12}', σ_{22}'. Після заміни компонент матриці перетворення на відповідні тригонометричні функції одержимо

$$\sigma_x' = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha,$$

$$\sigma_y' = \sigma_x \sin^2\alpha + \sigma_y \cos^2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha,$$

$$\tau_{xy}' = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha. \qquad (1.9.3)$$

Якщо старі осі є головними, то формули спрощуються внаслідок того що $\tau_{xy} = 0$, $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_2 = \sigma_y$,

$$\begin{aligned} \sigma_x' &= \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha, \\ \sigma_y' &= \sigma_1 \sin^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\alpha, \\ \tau_{xy}' &= -\tfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha. \end{aligned} \qquad (1.9.4)$$

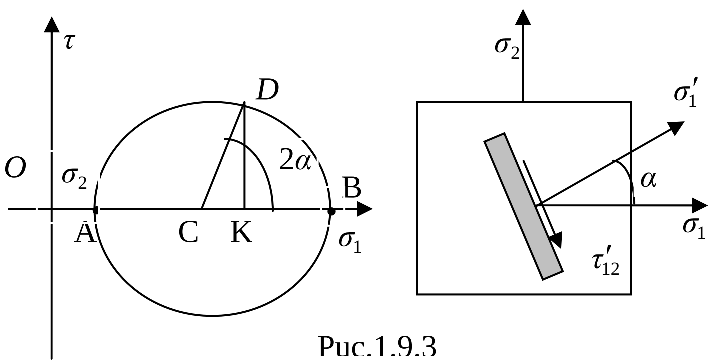

Рис.1.9.3

Формули (1.9.4) можна інтерпретувати графічно за допомогою кругів напружень (кругів Мора). Для цього в декартовій системі координат на осі абсцис відкладаються нормальні напруження, а на осі ординат—дотичні. На осі x відкладають σ_1 і σ_2, одержують відрізок осі AB і на ньому як на діаметрі будують коло (рис.1.9.3). З центра кола проводять радіус під кутом 2α до перетину з колом у точці D. Координати точки D дають величини нормальних і дотичних напружень на площинці, нахиленій під кутом α до головних осей. З геометричної побудови випливає

$$CD = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2},$$

$$KD = CD\sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha,$$

$$OK = OC + CD\cos 2\alpha =$$

$$= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha = \sigma_1\cos^2\alpha + \sigma_2\sin^2\alpha.$$

Таким чином, $OK = \sigma_x$, а $KD = \tau_{xy}$. Для плоского напруженого стану спрощується також визначення головних напружень і положення головних площадок. Знаходимо інваріанти

$$I_1 = (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = (\sigma_x + \sigma_y),$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21} = \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2,$$

характеристичне рівняння набирає вигляду

$$\sigma^2 - I_1\sigma + I_2 = 0,$$

корені якого дають величини головних напружень

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left[(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}\right],$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\left[(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}\right].$$

Однорідна система рівнянь для визначення орієнтації головних площинок має вигляд

$$(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})n_j = 0.$$

З урахуванням того, що обертання відбувається в площині xy і при $n_3 = n_z = 0$, вона набирає вигляду

$$(\sigma_x - \sigma)n_x + \tau_{xy}n_y = 0,$$

$$\tau_{xy}n_x + (\sigma_y - \sigma)n_y = 0,$$

з яких тільки одне рівняння незалежне. Для визначення кута найпростіше скористатися тим, що

$$\frac{n_y}{n_x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha,$$

і тоді з другого рівняння випливає

$$tg\alpha = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y}.$$

Задача 1.9.1. Аналітично і графічно за допомогою кругів Мора знайти головні напруження і орієнтацію головних площадок для таких випадків:

а) $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 100 M\Pi a,\ \sigma_{12} = 100 M\Pi a$, (рис.1.9.4)

б) $\sigma_{11} = 100 M\Pi a,\ \ \sigma_{22} = -100 M\Pi a,\ \ \sigma_{12} = 100 M\Pi a$,

в) $\sigma_{11} = \sigma_{22} = -100 M\Pi a,\ \sigma_{12} = -100 M\Pi a$.

Задача 1.9.2. Побудувати круги Мора для трьох випадків плоского напруженого стану відповідно до напружень що діють на елементарний куб, ребра якого паралельні осям координат, як показано на рис.1.9.5, 1.9.6, 1.9.7, визначити максимальні дотичні напруження в кожному випадку.

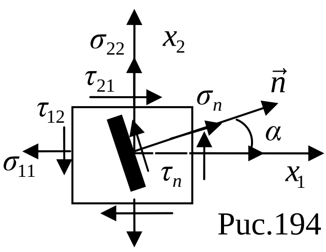

Рис.194

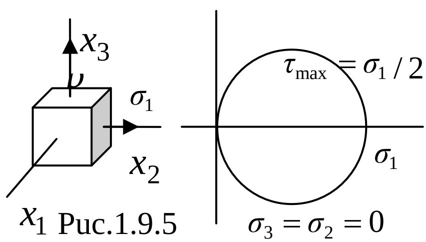

Рис.1.9.5

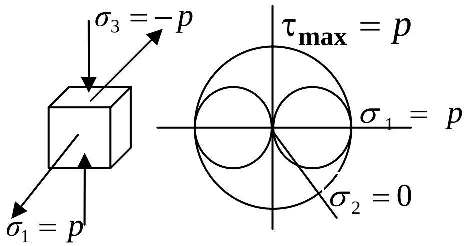

Рис.1.9.6

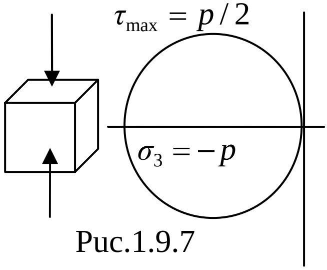

Рис.1.9.7

Розділ 2

Аналіз деформованого стану

2.1 Переміщення і деформація тіла

Під дією різноманітних факторів тіло, деформується тобто змінює форму і розміри.

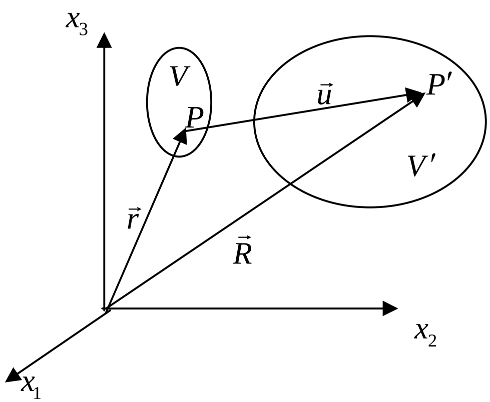

Рис.2.1.1

При деформуванні змінюються відстань між точками тіла і кути між малими відрізками, які перетинаються в одній точці. Задача аналізу деформованого стану полягає у вивченні локальних змін і визначенні зміни форми тіла в цілому. Розглянемо пружне тіло, яке в момент часу $t = t_0$ перебуває в початковому стані і займає в просторі область V. Положення кожної точки цієї області визначається радіусом-вектором $r = r(x_1,x_2,x_3)$ в декартовій системі координат. Внаслідок зовнішніх навантажень воно в деякий момент часу займе в евклідовому просторі область V'. Тоді точка P переміститься у точку P' (рис.2.1.1). Положення точки P' в тій самій системі координат визначається радіусом-вектором $\vec{R}$ з координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3, які залежать від початкових координат:

$$\xi_i = \xi_i(x_1,x_2,x_3). \tag{2.1.1}$$

Функції (2.1.1) повинні бути взаємно однозначні і неперервні. За цих умовах якобіан

$$I = |\partial \xi_i / \partial x_j| > 0 \tag{2.1.2}$$

повинен бути відмінним від нуля і додатним, щоб система координат залишилась правою. Ця умова забезпечує існування співвідношень, обернених до (2.1.1):

$$x_i = x_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3). \tag{2.1.3}$$

Геометрично, згідно з рис.2.1.1, визначається вектор переміщень

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{R} - \vec{r} = \vec{u}, \tag{2.1.4}$$

де $\vec{u}$—вектор переміщення. Співвідношення (2.1.4) можна записати у координатному вигляді

$$u_i = \xi_i - x_i, \tag{2.1.5}$$

$$\xi_i = u_i + x_i. \tag{2.1.6}$$

Формулу (2.1.6) можна розглядати як перетворення системи координат x_i, яка у початковому стані зв'язана з координатами точок тіла. В данному випадку вибираємо декартову систему координат. Координати точок в деформованому стані $\xi_i(x_1,x_2,x_3)$ можна розглядати як криволінійні координати, що визначають положення точок деформованого тіла. Таке визначення деформованого стану запропонував Лагранж. З другого боку, нарівні із способом Лагранжа, як незалежні параметри, які визначають деформований стан, можна використовувати координати точок в деформованому стані ξ_i, а координати точок в початковому стані розглядати як функції $x_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$

$$x_i = \xi_i - u_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3). \tag{2.1.7}$$

Цей спосіб визначення деформованого стану тіла належить Ейлеру. Частинні похідні $\partial\xi_i/\partial x_j$ створюють тензор другого рангу $\hat{F}$, який називається *матеріальним градієнтом деформацій*:

$$\hat{F} = \left\| \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right\| = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \tag{2.1.8}$$

Якщо, скориставшись (2.1.5), переміщення виразити через координати $u_i = \xi_i - x_i$ і взяти частинні похідні

$$\partial u_i/\partial x_j = \partial\xi_i/\partial x_j - \delta_{ij}, \tag{2.1.9}$$

то одержуємо тензор другого рангу, який має матричну форму

$$\left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\| = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} - 1 & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} - 1 & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} - 1 \end{pmatrix} \tag{2.1.9a}$$

і називається *матеріальним градієнтом переміщень*. Якщо скористатися Ейлеровим способом, то відповідно одержимо тензор, який називається *просторовим градієнтом деформацій* $\hat{J}$

$$\hat{J} = \left\| \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right\| = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{pmatrix},$$

і відповідно тензор, який називається *просторовим градієнтом переміщень*

$$\partial u_i/\partial\xi_j = \delta_{ij} - \partial x_i/\partial\xi_j. \tag{2.1.10}$$

2.2 Тензори деформацій і тензори скінченних деформацій

Розглянемо дві точки нескінченно близькі в натуральному стані тіла. Точку P з координатами x_i і точку Q з координатами $x_i + dx_i$. Після навантаження вони займуть положення P' з координатами ξ_i і Q' з координатами $\xi_i + d\xi_i$ (рис.2.2.1).

Квадрат відстані між точками P і Q:

$ds^2 = d\overrightarrow{r} \cdot d\overrightarrow{r} = \vec{e}_i dx_i \cdot \vec{e}_j dx_j = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j dx_i dx_j = \delta_{ij} dx_i dx_j = dx_i dx_i.$

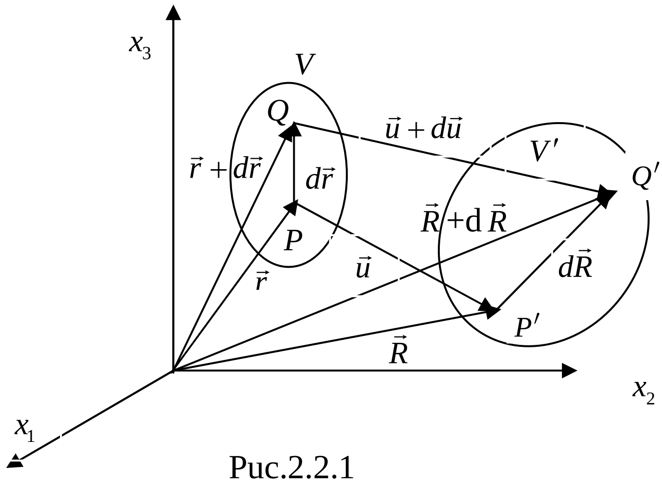

Рис.2.2.1

Якщо виразити диференціали координат в початковому стані dx_i через диференціали координат в деформованому стані $d\xi_k$, то проекції вектора $d\vec{r} = \vec{e}_k dx_k$ будуть

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} d\xi_j.$$

Квадрат довжини відрізка $PQ = ds = |d\vec{r}|$ можна виразити через скалярний добуток

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = dx_i dx_i,$$

$$ds^2 = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} d\xi_j \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} d\xi_k = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} d\xi_j d\xi_k = C_{jk} d\xi_j d\xi_k.$$

Величини

$$C_{jk} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \tag{2.2.1}$$

створюють тензор другого рангу—*тензор деформацій Коші*. Аналогічно знаходять квадрат відстані між точками P' і Q' в деформованому стані $dS^2 = d\vec{R} \cdot d\vec{R} = d\xi_i d\xi_i$.

Використаємо спосіб Лагранжа, тобто як незалежні змінні візьмемо x_i—координати точок в початковому стані, тоді $\xi_i = \xi_i(x_1,x_2,x_3)$ і $d\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} dx_j$, у векторному вигляді $d\vec{R} = \hat{F} d\vec{r}$ і одержимо

$$dS^2 = d\xi_i d\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} dx_j dx_k = G_{jk} dx_j dx_k.$$

Величини

$$G_{jk} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \tag{2.2.2}$$

створюють тензор другого рангу, який називається тензором деформацій Гріна. Зміну квадрата довжини можна виразити у вигляді

$$dS^2 - ds^2 = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \delta_{jk} \right) dx_j dx_k = 2 e_{jk} dx_j dx_k,$$

яка використовується як міра деформації в околі точки. Величини

$$e_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \delta_{jk} \right) \tag{2.2.3}$$

визначають деформацію тіла в початкових координатах x_i. Використовуючи залежність $\xi_i = x_i + u_i$, з якої випливає,

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

одержимо $dS^2 - ds^2 = 2 e_{jk} dx_j dx_k$,

$$e_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \tag{2.2.4}$$

Величини e_{jk} створюють симетричний тензор другого рангу, який називається тензором скінченних деформацій Гріна або лагранжевим тензором скінченних деформацій. Зміну довжини аналогічно можна виразити через координати в деформованому стані

$$dS^2 - ds^2 = 2 A_{jk} dx_j dx_k,$$

$$A_{jk} = \frac{1}{2} \left(\delta_{jk} - \frac{\partial x_m}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_m}{\partial \xi_k} \right), \tag{2.2.5}$$

де A_{jk}—тензор другого рангу, який називається тензором скінченних деформацій Альмансі або Ейлеровим тензором скінченних деформацій.

Виражаючи координати x_m через координати ξ_m і переміщення u_m, одержимо

$$A_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_k} - \frac{\partial u_m}{\partial \xi_k}\frac{\partial u_m}{\partial \xi_j}\right). \tag{2.2.6}$$

Для того щоб довести, що величини e_{ij} створюють тензор другого рангу, треба розглянути, як цей тензор перетворюється при повороті системи координат.

Задача 2.2.1. Деякий об'єм суцільного середовища одержує переміщення $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2 + Ax_3$, $\xi_3 = x_3 + Ax_2$, де A—стала. Знайти тензор деформацій Гріна G. Визначити тензор скінченних деформацій Гріна або лагранжів тензор скінченних деформацій $\hat{e}$.

Розв'язок

Перший шлях—за допомогою формул

$$e_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right).$$

Другий шлях.

Знаходимо градієнт деформацій

$$F = \left\|\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A \\ 0 & A & 1 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо тензор деформацій Гріна $G = FF'$

$$G = FF' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A \\ 0 & A & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A \\ 0 & A & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+A^2 & 2A \\ 0 & 2A & 1+A^2 \end{pmatrix},$$

де F'—матриця, транспонована відносно матриці F.

Знаходимо тензор скінченних деформацій Гріна або лагранжів тензор скінченних деформацій $\hat{e}$.

Виражаємо тензор скінченних деформацій через тензор деформацій Гріна G

$$\hat{e} = \frac{1}{2}(G - E),$$

де E—одиничний тензор,

$$\hat{e} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 2A \\ 0 & 2A & A^2 \end{pmatrix}.$$

2.3 Перетворення компонент тензора деформацій при повороті системи координат

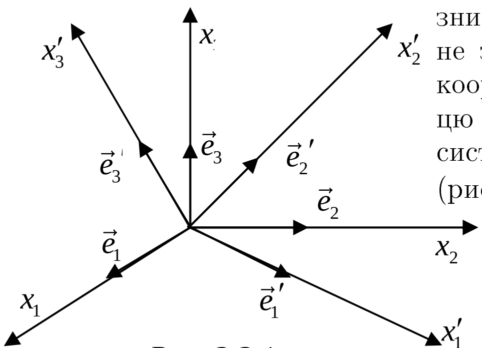

Рис. 2.3.1

Скористаємося тим, що різниця квадратів довжин $dS^2 - ds^2$ не залежить від вибору системи координат. Нехай задано матрицю перетворення $A = \|\alpha_{ij}\|$ старої системі координат x_i на нову x_j' (рис.2.3.1).

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

Різниця довжин від системи координат не залежить, тому

$$e_{ij}dx_i dx_j = e'_{km}dx'_k dx'_m.$$

Тоді, використовуючи формули перетворення для довільного вектора, маємо

$$dx'_k = \alpha_{ki}dx_i, \qquad dx_i = \alpha_{ki}dx'_k,$$

$$dx'_m = \alpha_{mj}dx_j, \qquad dx_j = \alpha_{mj}dx'_m.$$

Підстановка наведених виразів у різницю $dS^2 - ds^2$ дає

$$e_{ij}\alpha_{ki}\alpha_{mj}dx'_k dx'_m = e'_{km}dx'_k dx'_m,$$

$$e_{ij}dx_i dx_j = e'_{km}\alpha_{ki}\alpha_{mj}dx_i dx_j,$$

звідки одержуємо

$$e'_{km} = \alpha_{ki}\alpha_{mi}e_{ij}, \qquad e_{ij} = \alpha_{ki}\alpha_{mj}e'_{km}. \tag{2.3.1}$$

Одержані формули доводять, що e_{ij} є тензором другого рангу.

2.4 Визначення відносного видовження та зміни кутів

Визначимо фізичний і геометричний зміст компонент тензора напружень Гріна. Для цього знайдемо відносне видовження малих відрізків, орієнтованих у напрямку координатних осей, які позначимо λ_{11}, λ_{22}, λ_{33}. Відносне видовження відрізка—це відношення зміни його довжини до його початкової величини

$$\lambda = (dS - ds)/ds.$$

Скористаємося співвідношенням

$$\frac{dS^2 - ds^2}{ds^2} = \frac{dS - ds}{ds} \cdot \frac{dS - ds + 2ds}{ds} = \lambda(\lambda + 2). \tag{2.4.1}$$

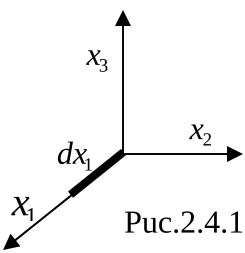

Рис.2.4.1

Якщо розглянути відрізок dx_1 орієнтований у напрямку осі x_1 (рис.2.4.1), то $ds = dx_1$ і квадрат його довжини $ds^2 = dx_1 dx_1$, різниця квадратів довжин відрізка в початковому і деформованому станах

$$dS^2 - ds^2 = 2e_{11}dx_1 dx_1.$$

Згідно з (2.4.1) $\lambda_{11}(\lambda_{11} + 2) = 2e_{11}$, звідки

$$\lambda_{11}^2 + 2\lambda_{11} - 2e_{11} = 0, \qquad \lambda_{11} = \sqrt{1 + 2e_{11}} - 1.$$

Аналогічно

$$\lambda_{22} = \sqrt{1+2e_{22}} - 1, \quad \lambda_{33} = \sqrt{1+2e_{33}} - 1. \tag{2.4.2}$$

Тобто діагональні компоненти тензора деформацій дають можливість знайти відносне видовження елементарних відрізків, орієнтованих вздовж відповідних осей. Розглянемо, як змінюються кути між двома відрізками, які у натуральному стані напрямлені вздовж осей координат.

Для цього розглянемо спочатку будь-який малий відрізок $d\vec{r}$, який у початковому стані виходить з початку координат і має проекції dx_i (рис.2.4.2). Одиничний вектор, спрямований вздовж цього відрізка, має проекції на осі координат

$$n_i' = \frac{dx_i}{ds}.$$

Внаслідок деформування цей малий відрізок $d\vec{r}$ переходить у кінцевий $d\vec{R}'$ з координатами $d\xi_i$, відповідним одиничним вектором $\vec{n}'$ і проекціями

$$n_i' = \frac{d\xi_i}{dS}.$$

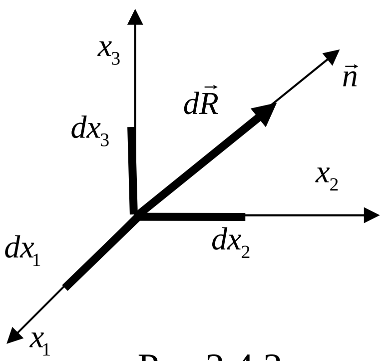

Рис.2.4.2

Скориставшись зв'язком між новими і старими координатами і переміщеннями $\xi_i = x_i + u_i$, одержимо

$$d\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} dx_k = \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) dx_k.$$

Оскільки відносне видовження за визначенням

$$\lambda = \frac{dS - ds}{ds},$$

то одержуємо

$$\vec{n}' = \frac{\vec{e}_i}{(1+\lambda)ds}\left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) dx_k.$$

Знайдемо косинус кута між двома малими відрізками у деформованому стані, які виходять з початку координат. Він дорівнює скалярному добутку одиничних векторів $\vec{n}'$ і $\vec{n}''$, напрямлених вздовж відрізків

$$\cos\hat{\varphi} = n_i' \cdot n_i'' =$$

$$= \frac{1}{(1+\lambda')(1+\lambda'')ds'ds''}\left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\left(\delta_{im} + \frac{\partial u_i}{\partial x_m}\right)dx_k' dx_m'' =$$

$$= \frac{1}{(1+\lambda')(1+\lambda'')}\left(\delta_{km} + \frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i \partial u_i}{\partial x_k \partial x_m}\right)\frac{dx_k'}{ds'}\frac{dx_m''}{ds''},$$

$$\cos\varphi = \frac{2e_{km}}{(1+\lambda')(1+\lambda'')}n_k' n_m'' + \frac{n_k' n_k''}{(1+\lambda')(1+\lambda'')}.$$

Якщо тепер взяти перший малий відрізок, спрямований вздовж осі x_1, то $\vec{n}'$ (1,0,0), і другий вздовж осі x_2, то $\vec{n}''(0,1,0)$, тоді

$$\cos\varphi_{1,2} = \frac{2e_{12}}{(1+\lambda')(1+\lambda'')} = \frac{2e_{12}}{\sqrt{1+\lambda_{11}}\sqrt{1+\lambda_{22}}}.$$

Спочатку кут між ними був $\pi/2$. Знайдемо, на скільки він змінився. Позначимо величину його зміни $\gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi$, тоді синус кута між ними буде дорівнювати

$$\sin\gamma_{1,2} = \cos\varphi_{1,2} = \frac{2e_{12}}{\sqrt{1+\lambda_{11}}\sqrt{1+\lambda_{22}}}.$$

Аналогічно можна знайти

$$\sin\gamma_{2,3} = \frac{2e_{23}}{\sqrt{1+\lambda_{22}}\sqrt{1+\lambda_{33}}},$$

$$\sin\gamma_{1,3} = \frac{2e_{13}}{\sqrt{1+\lambda_{11}}\sqrt{1+\lambda_{33}}}. \qquad (2.4.3)$$

Таким чином, тензор деформацій дає змогу повністю описати деформований стан, тобто визначити, як змінюються відстані і кути при деформуванні тіла. Звернемо увагу на таке явище: якщо усі компоненти тензора деформацій дорівнюють нулю, то відстані між його точками і кути між будь-якими відрізками не змінюються, тоді тіло може переміщуватись тільки як абсолютно тверде. Крім розглянутого способу визначення деформацій, пов'язаного з вектором переміщень, використовується міра деформації нескінченно малого елемента, яка визначається відношенням довжин dS/ds і відома як коефіцієнт довжини Λ. Оскільки

$$(dS)^2 = G_{ij} dx_i dx_j,$$

то

$$\Lambda^2 = (dS/ds)^2 = G_{ij}(dx_i/ds)(dx_j/ds).$$

Якщо розглянути малий відрізок, який в початковому стані паралельний осі x_1, у якого $dx_1 = ds$, $dx_2 = dx_3 = 0$, то одержимо

$$\Lambda^2_{(1)} = G_{11}.$$

З урахуванням співвідношення (2.2.4)

$$dS^2 - ds^2 = 2e_{ij} dx_i dx_j,$$

з якого випливає, що

$$dS^2 = 2e_{ij} dx_i dx_j + ds^2,$$

знаходять зв'язок між коефіцієнтами довжини та тензором скінченних деформацій

$$\Lambda^2_{(1)} = G_{11} = 1 + 2e_{11}.$$

Аналогічно

$$\Lambda^2_{(2)} = G_{22} = 1 + 2e_{22}, \quad \Lambda^2_{(3)} = G_{33} = 1 + 2e_{33}. \tag{2.4.4}$$

2.5 Головні напрямки і головні деформації

З попереднього видно, що довільно орієнтований прямокутний паралелепіпед в загальному випадку в результаті деформування переходить у косокутний і змінює розміри. Головними напрямками називаються такі напрямки орієнтації прямокутного паралелепіпеда, за яких він залишається прямокутним, тільки змінює розміри. Це означає, що симетричний тензор дефомацій другого рангу в головних осях матиме діагональну структуру через відсутність зсувів, тобто зміни кутів. Напрямок головних осей визначається векторами, які внаслідок дії на них тензора змінюють тільки свою довжину, а напрямок не змінюють. Виходячи з цього, маємо

$$e_{ij} n_j = e n_i,$$

$$(e_{ij} - e\delta_{ij})n_j = 0.$$

Умовою існування нетривіального розв'язку однорідної системи, як відомо, є умова, що детермінант системи дорівнює нулю:

$$|e_{ij} - e\delta_{ij}| = 0.$$

З цієї умови одержуємо характеристичне рівняння

$$e^3 - I_1 e^2 + I_2 e - I_3 = 0.$$

Коефіцієнтами характеристичного рівняння є інваріанти тензора деформацій

$$I_1 = e_{ii} = e_{11} + e_{22} + e_{33},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{11} & e_{13} \\ e_{31} & e_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{22} & e_{23} \\ e_{32} & e_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = |e_{ij}|.$$

Корені цього рівняння дають величини головних деформацій $e_1 > e_2 > e_3$. Напрям головних векторів знаходять, розв'язуючи систему рівнянь

$$\big(e_{ij} - e_{(k)}\delta_{ij}\big)n_j = 0,$$

з урахуванням умови, що головні вектори мають одиничну довжину

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1,$$

або $n_i n_i = 1$. Знайдемо напрямок, у якому деформації видовження мають найбільшу величину. Оскільки

$$dS^2 - ds^2 = 2e_{ij}dx_i dx_j,$$

де dS—довжина малого відрізка у деформованому стані, а ds—у початковому, то найбільше відносне видовження буде у тому напрямку, в якому величина

$$(dS^2 - ds^2)/ds^2$$

буде найбільшою, але оскільки

$$\frac{dx_i}{ds} = n_i$$

дає напрямок одиничного вектора, спрямованого вздовж відрізка dx_i, то треба знайти максимальні значення квадратичної форми $e_{ij}n_in_j$. Оскільки розглядається варіаційна задача з обмеженнями, які маємо внаслідок умови $n_in_i = 1$, тому для того щоб перейти до задачі без обмежень, використаємо метод невизначених множників Лагранжа. До функціоналу додаємо обмеження $n_in_i = 1$, помножене на довільний множник λ. Знайдемо екстремуми функціонала:

$$F = e_{ij}n_in_j - \lambda n_in_i.$$

З умови, що похідна по n_i повинна дорівнювати нулю, маємо

$$(e_{ij} - \lambda\delta_{ij})n_j = 0.$$

Ця система повністю збігається з системою, якою визначається положення головних векторів тензора деформацій та його головних значень, звідки можна зробити висновок, що найбільші деформації дорівнюють за величиною головним, а їх напрямок такий самий як напрямок головних векторів тензора деформацій.

2.6 Об'ємна відносна деформація

Для того щоб спростити розв'язок поставленої задачі, осі координат направимо вздовж головних осей тензора деформацій, які взаємно ортогональні. Розглядається малий прямокутний паралелепіпед, ребра якого напрямлені вздовж осей координат, тому він залишається прямокутним і в деформованому стані. Тензор деформацій в головних осях має вигляд

$$\hat{e} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}.$$

Якщо в натуральному стані довжини ребер малого куба, які суміщені з головними осями, дорівнюють dx_1,dx_2,dx_3, то початковий об'єм куба дорівнюватиме

$$dV = dx_1dx_2dx_3.$$

У деформованому стані довжини ребер

$$d\xi_1 = (1+\lambda_1)dx_1,$$
$$d\xi_2 = (1+\lambda_2)dx_2,$$
$$d\xi_3 = (1+\lambda_3)dx_3$$

і відповідно

$$d\xi_1 = \sqrt{1+2e_1}dx_1,\ d\xi_2 = \sqrt{1+2e_2}dx_2,\ d\xi_3 = \sqrt{1+2e_3}dx_3,$$

а об'єм

$$dV' = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,$$
$$dV' = \sqrt{(1+2e_1)(1+2e_2)(1+2e_3)}dx_1dx_2dx_3.$$

З цього випливає, що відносна зміна об'єму дорівнює

$$e_v = \frac{dV'-dV}{dV} = \sqrt{(1+2e_1)(1+2e_2)(1+2e_3)}-1. \tag{2.6.1}$$

Перегрупувавши вираз під коренем, відносну зміну об'єму можна виразити через інваріанти тензора деформацій

$$e_v = \sqrt{1+2(e_1+e_2+e_3)+4(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)+8e_1e_2e_3}-1,$$
$$e_v = \sqrt{1+2I_1+4I_2+8I_3}-1. \tag{2.6.2}$$

2.7 Малі деформації

На практиці у деталях машин деформації є дуже малими, тому з математичної точки зору їх можна розглядати як нескінченно малі. Тоді у тензорі деформацій

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)$$

можна знехтувати нелінійними членами, оскільки самі похідні є малими величинами. Таким чином, одержимо співвідношення між переміщеннями та тензором малих деформацій:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{2.7.1}$$

які називаються співвідношеннями Коші.

Компоненти тензора деформації в цьому випадку також є дуже малими порівняно з одиницею. За цієї умови вирази для відносних поздовжніх деформацій вздовж осей координат спрощуються:

$$\lambda_{11} = \sqrt{1+2\varepsilon_{11}} - 1 = 1 + \varepsilon_{11} - 1 = \varepsilon_{11}, \tag{2.7.2}$$

а відповідна відносна об'ємна деформація

$$\varepsilon_v = \theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \tag{2.7.3}$$

збігається з першим інваріантом тензора деформацій. Спрощуються також формули для визначення зміни кутів. Оскільки при малих кутах $\sin\gamma = \gamma$ і можна знехтувати поздовжніми деформаціями порівняно з одиницею, то

$$\gamma_{12} = \frac{2e_{12}}{\sqrt{1+2e_{11}}\sqrt{1+2e_{22}}} = 2\varepsilon_{12},$$

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12},\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23},\ \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13}. \tag{2.7.4}$$

Таким чином, в тензорі малих деформацій діагональні компоненти дорівнюють відносним деформаціям вздовж осей, а недіагональні елементи визначають зміну кутів між малими відрізками, які виходять з однієї точки і спрямовані вздовж осей координат.

2.8 Градієнт вектора переміщень, тензор деформацій і тензор обертання

Нагадаємо, що градієнт скалярної функції $f(x_1,x_2,x_3)$ визначається так:

$$grad f = \nabla f = \vec{e}_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = \vec{e}_k f,_k =$$

$$= \vec{e}_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

де $\vec{e}_k$—базисні вектори системи координат.

З наведеного співвідношення випливає, що градієнт скалярної функції є вектором, проекції якого дорівнюють частинним похідним.

Аналогічно визначається градієнт вектора переміщень $\vec{u}$

$$grad\vec{u} = \nabla\vec{u} = \nabla\vec{e}_m u_m = \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k}\vec{e}_m u_m = \vec{e}_k\vec{e}_m \frac{\partial u_m}{\partial x_k}.$$

З наведеного співвідношення випливає, що градієнт вектора є тензором другого рангу, компоненти якого створюють матрицю і дорівнюють частинним похідним від проекцій вектора по координатах

$$\left\|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right\| = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

Його можна, як будь-який лінійний оператор, розділити на симетричний і кососиметричний. Симетричний збігається з тензором малих деформацій

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{2.8.1}$$

а кососиметричний називається лагранжевим тензором лінійного обертання і має вигляд

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{2.8.2}$$

Розглянемо фізичну суть кососиметричного тензора ω_{ij}. Як відомо з теоретичної механіки, довільний малий рух твердого тіла можна описати у вигляді

$$\vec{u} = \vec{u}^{(0)} + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

де $\vec{u}^{(0)}$—визначає поступальний рух, а $\vec{\omega}$—обертальний рух тіла як абсолютно твердого відносно системи координат. У координатному вигляді вектор переміщень

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^{(0)} + \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2, \\ u_2 &= u_2^{(0)} + \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3, \\ u_3 &= u_3^{(0)} + \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1. \end{aligned}$$

Легко перевірити, якщо знайти тензор деформацій ε_{ij} при таких переміщеннях, то виявиться, що всі його компоненти $\varepsilon_{ij} = 0$, а кососиметричний тензор ω_{ij} має вигляд

$$\|\omega_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.8.2a)$$

Тобто компоненти кососиметричного тензора виражаються за допомогою компонент вектора обертання

$$\omega_{12} = -\omega_3, \quad \omega_{13} = \omega_2, \quad \omega_{23} = -\omega_1, \qquad (2.8.3)$$

тому він називається *тензором обертання.*

2.9 Визначення переміщень

Переміщення будь-якої точки тіла при деформуванні можна знайти як суму поступального переміщення деякої початкової точки та відносного переміщення вибраної точки відносно початкової

$$u_i = u_i^{(0)} + \int\limits_{M^0}^{M'} du_i.$$

Оскільки $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = u_{i,j} dx_j$, то, виражаючи градієнт переміщень через тензор деформацій і тензор обертання
$du_i = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) dx_j$, одержимо

$$u_i = u_i^{(0)} + \int\limits_{M^0}^{M'} \varepsilon_{ij} dx_j + \int\limits_{M^0}^{M'} \omega_{ij} dx_j.$$

Оскільки тензор деформацій відомий, другий інтеграл треба виразити через нього. Використовуючи інтегрування по частинах, маємо

$$u_i = u_i^{(0)} + \left(x'_j - x_j^{(0)}\right)\omega_{ij}^{(0)} + \int\limits_{M^0}^{M'} \varepsilon_{ij} dx_j + \int\limits_{M^0}^{M'} (x'_j - x_j)\omega_{ij,k} dx_k.$$

Виразивши похідні тензора обертання через похідні тензора деформацій

$$\omega_{ij},_k = \frac{1}{2}(u_i,_j - u_j,_i),_k = \frac{1}{2}(u_i,_{jk} - u_j,_{ik}) =$$

$$= \frac{1}{2}(u_i,_{jk} - u_j,_{ik} + u_k,_{ij} - u_k,_{ij}) = e_{ik},j - e_{jk},_i,$$

одержимо

$$u_i = u_i^{(0)} + \left(x'_j - x_j^{(0)}\right)\omega_{ij}^0 + \int_{M^0}^{M'} \left[\varepsilon_{ik} + (x'_j - x_j)\left(\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i}\right)\right] dx_k. \tag{2.9.1}$$

Цю формулу вперше одержав Чезаро, тому її називають формулою Чезаро.

2.10 Рівняння сумісності деформацій

Оскільки рівняння сумісності деформацій мають досить суттєве значення, тому, щоб краще з'ясувати їх суть, одержимо їх двома різними підходами.

Перший підхід. Скористаємося співвідношеннями Коші, для цього запишемо їх у розгорнутому вигляді

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right), \; \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right), \; \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right).$$

Ці співвідношення можна розглядати як систему рівнянь, що виражають шість компонент тензора деформацій через три компоненти вектора переміщень. Для того щоб цю систему обернути, тобто визначити три компоненти вектора переміщень через шість компонент тензора деформацій, ці шість рівнянь повинні задовольняти додаткові умови, щоб ця перевизначена система мала однозначний розв'язок. Такі додаткові умови, накладені на деформації, можна знайти виключенням переміщень із співвідношення Коші. Наприклад, візьмемо другу похідну від першого співвідношення по x_2 і складемо з похідною від другого співвідношення по x_1, а від четвертого—змішану по x_1 і x_2. Зіставивши результати, одержимо

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Аналогічно

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}. \tag{2.10.1}$$

Щоб одержати ще одну групу умов, візьмемо змішану похідну від ε_{11} по x_2 і x_3, потім від суми похідних $\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3}$ і $\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2}$ віднімемо $\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1}$, а від результату візьмемо похідну по x_1. Це дає

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2}\right).$$

Аналогічно одержимо

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right), \tag{2.10.2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2}\right).$$

Ці шість рівнянь і називаються умовами сумісності деформацій, або рівняннями Сен-Венана.

Другий підхід. З фізичної суті задачі теорії пружності випливає, що переміщення є однозначною функцією, тобто тіло залишається суцільним. Величина переміщення визначається за формулою Чезаро

$$u_i = u_i^{(0)} + \left(x_j' - x_j^{(0)}\right)\omega_{ij}^0 + \\ + \int_{M^0}^{M'} \left[\varepsilon_{ik} + \left(x_j' - x_j\right)\left(\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i}\right)\right] dx_k.$$

Перші два доданки є однозначними, оскільки визначають переміщення точки M^0—початку відліку і обертання тіла навколо неї як абсолютно твердого. Тому залишається знайти умови однозначності переміщень відносно центра відліку точки M^0, які визначаються інтегралом

$$\int\limits_{M^0}^{M'} \left[\varepsilon_{ik} + \left(x'_j - x_j\right)\left(\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i}\right)\right] dx_k,$$

який можна записати у вигляді $\int_{M^0}^{M'} P_{ik} dx_k$, де

$$P_{ik} = \varepsilon_{ik} + \left(x'_j - x_j\right)\left(\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i}\right).$$

Відомо, що умова однозначності інтеграла, тобто незалежності його від шляху інтегрування, полягає в тому, що підінтегральна функція P_{ik} є повним диференціалом. Необхідною і достатньою умовою є залежність $P_{ik,m} = P_{im,k}$, скористаємося якою

$$\left[\varepsilon_{ik} + \left(x'_j - x_j\right)\left(\tfrac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \tfrac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i}\right)\right]_{,m} = \\ = \left[\varepsilon_{im} + \left(x'_j - x_j\right)\left(\tfrac{\partial \varepsilon_{im}}{\partial x_j} - \tfrac{\partial \varepsilon_{jm}}{\partial x_i}\right)\right]_{,k}$$

$$\left[\varepsilon_{ik,m} + \left(x'_{j,m} - x_{j,m}\right)\left(\tfrac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \tfrac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i}\right) + \left(x'_j - x_j\right)\left(\tfrac{\partial \varepsilon_{ik,m}}{\partial x_j} - \tfrac{\partial \varepsilon_{jk,m}}{\partial x_i}\right)\right] = \\ = \left[\varepsilon_{im,k} + \left(x'_{j,k} - x_{j,k}\right)\left(\tfrac{\partial \varepsilon_{im}}{\partial x_j} - \tfrac{\partial \varepsilon_{jm}}{\partial x_i}\right) + \left(x'_j - x_j\right)\left(\tfrac{\partial \varepsilon_{im,k}}{\partial x_j} - \tfrac{\partial \varepsilon_{jm,k}}{\partial x_i}\right)\right].$$

Оскільки $x'_{j,m} = 0$ внаслідок того, що величини x'_j, x'_m є незалежними, то

$$x_{j,m} = \delta_{jm} = \begin{cases} 1 & (j = m), \\ 0 & (j \neq m) \end{cases}$$

$$\left[\varepsilon_{ik,m} - (\delta_{jm})\left(\tfrac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \tfrac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i}\right) + \left(x'_j - x_j\right)\left(\tfrac{\partial \varepsilon_{ik,m}}{\partial x_j} - \tfrac{\partial \varepsilon_{jk,m}}{\partial x_i}\right)\right] = \\ = \left[\varepsilon_{im,k} - (\delta_{jk})\left(\tfrac{\partial \varepsilon_{im}}{\partial x_j} - \tfrac{\partial \varepsilon_{jm}}{\partial x_i}\right) + \left(x'_j - x_j\right)\left(\tfrac{\partial \varepsilon_{im,k}}{\partial x_j} - \tfrac{\partial \varepsilon_{jm,k}}{\partial x_i}\right)\right],$$

$$\left[\varepsilon_{ik,m} - \left(\tfrac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_m} - \tfrac{\partial \varepsilon_{mk}}{\partial x_i}\right) + \left(x'_j - x_j\right)\left(\tfrac{\partial \varepsilon_{ik,m}}{\partial x_j} - \tfrac{\partial \varepsilon_{jk,m}}{\partial x_i}\right)\right] = \\ = \left[\varepsilon_{im,k} - \left(\tfrac{\partial \varepsilon_{im}}{\partial x_k} - \tfrac{\partial \varepsilon_{km}}{\partial x_i}\right) + \left(x'_j - x_j\right)\left(\tfrac{\partial \varepsilon_{im,k}}{\partial x_j} - \tfrac{\partial \varepsilon_{jm,k}}{\partial x_i}\right)\right],$$

$$\left[\left(\tfrac{\partial \varepsilon_{mk}}{\partial x_i}\right) + \left(x'_j - x_j\right)\left(\tfrac{\partial \varepsilon_{ik,m}}{\partial x_j} - \tfrac{\partial \varepsilon_{jk,m}}{\partial x_i}\right)\right] = \\ = \left[\left(\tfrac{\partial \varepsilon_{km}}{\partial x_i}\right) + \left(x'_j - x_j\right)\left(\tfrac{\partial \varepsilon_{im,k}}{\partial x_j} - \tfrac{\partial \varepsilon_{jm,k}}{\partial x_i}\right)\right],$$

$$\left[(x'_j - x_j)\left(\frac{\partial\varepsilon_{ik,m}}{\partial x_j} - \frac{\partial\varepsilon_{jk,m}}{\partial x_i}\right)\right] = \left[(x'_j - x_j)\left(\frac{\partial\varepsilon_{im,k}}{\partial x_j} - \frac{\partial\varepsilon_{jm,k}}{\partial x_i}\right)\right],$$

$$\varepsilon_{ki,mj}+\varepsilon_{jm,ki}-\varepsilon_{jk,mi}-\varepsilon_{im,kj}=0. \tag{2.10.3}$$

Одержане співвідношення еквівалентне (2.10.1) і (2.10.2). Внаслідок незалежності похідних від порядку диференціювання і симетрії тензора деформацій воно містить тільки шість незалежних рівнянь.

2.11 Задачі

Задача 2.11.1. Задано тензор деформацій

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0{,}001 & -0{,}0003 & 0{,}0004 \\ -0{,}0003 & 0{,}0015 & 0{,}0005 \\ 0{,}0004 & 0{,}0005 & 0{,}002 \end{pmatrix}.$$

Знайти відносну деформацію видовження відрізка в заданому напрямку $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z$.

Задача 2.11.2. Задано компоненти тензора деформацій в системі координат x_1, x_2, x_3

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0{,}001 & -0{,}0003 & 0{,}0004 \\ -0{,}0003 & 0 & 0{,}0005 \\ 0{,}0004 & 0{,}0005 & 0{,}002 \end{pmatrix}.$$

Знайти компоненти тензора деформацій в системі координат x'_1, x'_2, x'_3, якщо задана матриця перетворення $\hat{\alpha}$

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.11.3. Знайти головні деформації та їхні напрямки, якщо задано тензор деформацій.

а) $\hat{\varepsilon}=\begin{pmatrix} 0{,}001 & -0{,}0003 & 0{,}0004 \\ -0{,}0003 & 0 & 0{,}0005 \\ 0{,}0004 & 0{,}0005 & 0{,}002 \end{pmatrix}$,б) $\hat{\varepsilon}=\begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & 0 \\ e_{yx} & e_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 2.11.4. Для заданого деформованого стану знайти кульовий тензор, девіатор деформацій та його інваріанти.

$$\text{а)}\ \hat{\varepsilon}=\begin{pmatrix} 0{,}001 & -0{,}0003 & 0{,}0004 \\ -0{,}0003 & 0 & 0{,}0005 \\ 0{,}0004 & 0{,}0005 & 0{,}002 \end{pmatrix},$$

$$\text{б)}\qquad \hat{\varepsilon}=\begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & 0 \\ e_{yx} & e_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.11.5. За заданими переміщеннями знайти тензор малих деформацій.

$$\text{а)}\ \ u=\frac{1}{2R}\left[z^2+\nu\left(x^2-y^2\right)\right],\ \ v=\frac{\nu xy}{R},\quad w=-\frac{xz}{R},$$

$$\text{б)}\ \ u=-\frac{\nu\gamma}{E}xz,\quad v=-\frac{\nu\gamma}{E}yz,\ \ w=\frac{\gamma}{2E}\left[z^2+\nu\left(x^2+y^2\right)-l^2\right],$$

$$\text{в)}\ \ u=-\alpha yz,\quad v=\alpha xz,\ \ w=-\alpha\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}xy.$$

Задача 2.11.6. Знайти тензор скінченних деформацій Гріна за переміщеннями, заданими у попередній задачі, і порівняти з тензором малих деформацій.

Задача 2.11.7. За відомим тензором напружень знайти переміщення.

а) $\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}=\sigma_{23}=\sigma_{31}=0,\ \ \sigma_{33}=-\frac{E}{\rho}x,$

б) $\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}=\sigma_{12}=0,$

$$\sigma_{13}=-\alpha G\left(y+\frac{3xy}{a}\right),\ \ \sigma_{23}=\alpha G\left(x-\frac{3}{2a}\left(x^2+y^2\right)\right),$$

в) $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0,$

$$\sigma_{13} = \alpha 2G\frac{a^2}{a^2+b^2}y,\ \ \sigma_{23} = \alpha 2G\frac{b^2}{a^2+b^2}x.$$

Задача 2.11.8. Задано лагранжеве описання руху тіла

$$\xi_1 = x_1,\ \ \xi_2 = x_2 + ax_3,\ \xi_3 = x_3 + ax_2,$$

де a—стала величина. Визначити поле переміщень, нове положення матеріальних частинок, які в початковому стані утворювали:
а) круг з границею $x_2^2 + x_3^2 = 1/\left(1-a^2\right)$ в площині $x_1 = 0$,
б) нескінченномалий куб, ребра якого лежать на осях координат і мають довжини $dx_1 = dx_2 = dx_3 = dx$.
Розв'язок
Визначаєм вектор переміщень в лагранжевих координатах за формулою $u_i(x_1,x_2,x_3) = \xi_i(x_1,x_2,x_3) - x_i = 0$, одержимо

$$u_1(x_1,x_2,x_3) = \xi_1(x_1,x_2,x_3) - x_1 = 0,$$

$$u_2(x_2,x_3) = \xi_2(x_1,x_2,x_3) - x_2 = ax_3,$$

$$u_3(x_2,x_3) = \xi_3(x_1,x_2,x_3) - x_3 = ax_2.$$

Переходимо до ейлерового описання руху тіла. Для цього виражаємо координати точок в початковому стані через координати в деформованому стані

$$x_1 = \xi_1,\ x_2 = \frac{\xi_2 - a\xi_3}{1-a^2},\ x_3 = \frac{\xi_3 - a\xi_2}{1-a^2}.$$

Визначаємо поле переміщень в ейлерових координатах

$$u_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \xi_1 - x_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = 0,$$

$$u_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \xi_2 - x_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = a\frac{(\xi_3 - a\xi_2)}{1-a^2},$$

$$u_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \xi_3 - x_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = a\frac{(\xi_2 - a\xi_3)}{1-a^2}.$$

Треба звернути увагу на те, що для заданого деформованого стану пряма

$$\xi_1 = 0,\ \ \xi_2 + \xi_3 = 1$$

відображається на пряму

$$x_1=0,\ \ (x_2+x_3)=1/(1+a).$$

Це видно з перетворень

$$\xi_2+\xi_3=x_2+ax_3+x_3+ax_2=(1+a)(x_2+x_3)=1.$$

Пряма $x_1=0,\ \ x_2=x_3$
відображається на пряму $\xi_1=0,\ \ \xi_2=\xi_3$, це видно з

$$\frac{\xi_2-a\xi_3}{1-a^2}=\frac{\xi_3-a\xi_2}{1-a^2},\ \ \xi_2-a\xi_3=\xi_3-a\xi_2,\ \ \xi_3=\xi_2,$$

як показано на рис.2.11.1.

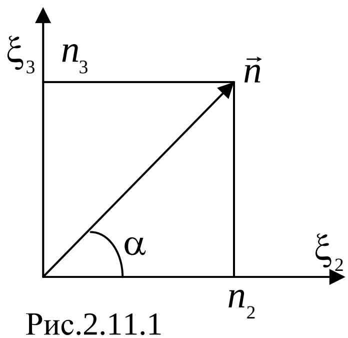

Рис.2.11.1

Визначаємо поле переміщень в деформованому стані матеріальних частинок, які в початковому стані утворювали круг з границею

$$x_2^2+x_3^2=1/\left(1-a^2\right)$$

в площині $x_1=0$. Для цього знаходимо криву, в яку перейшла границя. Виражаємо старі координати через нові і підставляємо у рівняння границі

$$x_1=\xi_1,\ \ x_2=\tfrac{\xi_2-a\xi_3}{1-a^2},\ \ x_3=\tfrac{\xi_3-a\xi_2}{1-a^2},$$

$$\left(\frac{\xi_2-a\xi_3}{1-a^2}\right)^2+\left(\frac{\xi_3-a\xi_2}{1-a^2}\right)^2=\frac{1}{(1-a^2)}.$$

Виконавши перетворення, одержимо

$$\frac{1+a^2}{1-a^2}\xi_2^2-\frac{4a}{1-a^2}\xi_2\xi_3+\frac{1+a^2}{1-a^2}\xi_3^2=1.$$

Це рівняння кривої другого степеня типу

$$a_{11}\xi_2^2+2a_{12}\xi_2\xi_3+a_{22}\xi_3^2=1,$$

для того щоб визначити її форму, треба знайти її власні числа з умови

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} \frac{1+a^2}{1-a^2}-\lambda & -\frac{2a}{1-a^2} \\ -\frac{2a}{1-a^2} & \frac{1+a^2}{1-a^2}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

з якої одержуємо квадратне рівняння

$$\lambda^2 - 2\frac{1+a^2}{1-a^2}\lambda + 1 = 0,$$

корені якого $\lambda_1 = (1+a)/(1-a), \quad \lambda_2 = (1-a)/(1+a)$.

Знаходимо орієнтацію власних векторів, яка визначається розв'язком системи

$$(a_{11}-\lambda)n_2 + a_{12}n_3 = 0,$$
$$a_{12}n_2 + (a_{22}-\lambda)n_3 = 0,$$

де n_2 і n_3—проекції одиничного вектора в напрямку головних осей за умови $n_2^2+n_3^2 = 1$. У випадку двовимірної задачі розв'язок можна спростити, оскільки $n_1 = \cos\alpha, \quad n_2 = \sin\alpha$, то $tg\alpha = -\frac{a_{11}-\lambda}{a_{12}}$. При $\lambda = \lambda_1$ маємо $tg\alpha_1 = -1$, при $\lambda = \lambda_2$ маємо $tg\alpha_2 = 1$. З умови $a < 1$, $\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0$ досліджувана крива є еліпс з півосями

$$\sqrt{\lambda_1} = \sqrt{(1+a)/(1-a)}, \ \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{(1-a)/(1+a)}.$$

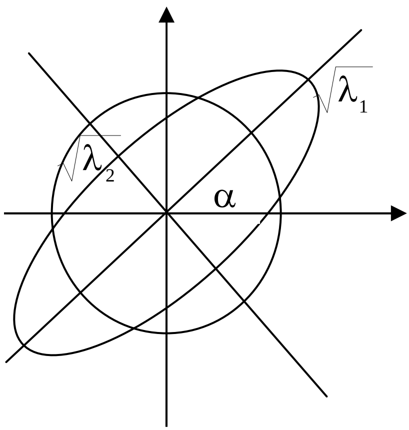

Рис.2.11.2

Еліпс, на який перетворюється коло внаслідок деформації, показано на рис.2.11.2. Визначаємо нове положення матеріальних частинок, які в початковому стані утворювали нескінченномалий куб, ребра якого лежать на осях координат і мають довжини $dx_1 = dx_2 = dx_3 = dx$. Розглядаємо ребро dx_1, координати його точок визначаються умовами $x_2 = x_3 = 0$. Скористаємося виразами для переміщень в лагранжевих координатах

$$u_1 = \xi_1 - x_1 = 0, \;\; u_2 = \xi_2 - x_2 = ax_3, \;\; u_3 = \xi_3 - x_3 = ax_2,$$

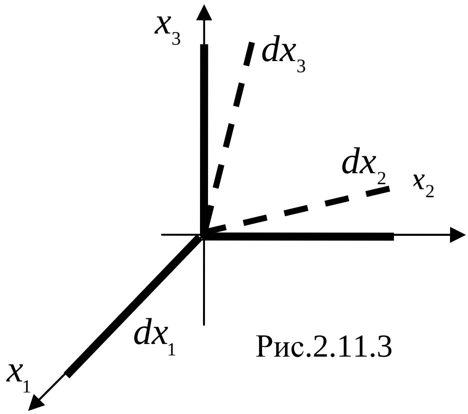

Рис.2.11.3

з яких для ребра dx_1 маємо $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, тобто його положення в деформованому стані співпадає з початковим. Розглядаємо ребро dx_2, координати його точок визначаються умовами $x_1 = x_3 = 0$, у нього $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = ax_2$. Розглядаємо ребро dx_3, координати його точок визначаються умовами $x_1 = x_2 = 0$, у нього $u_1 = 0, u_2 = ax_3, u_3 = 0$. Положення ребер $dx_1 = dx_2 = dx_3 = dx$ в початковому і деформованому станах показано на рис.2.11.3. Аналогічно знаходять положення і всіх інших ребер куба. Положення куба в початковому і деформованому станах показано на рис.2.11.4.

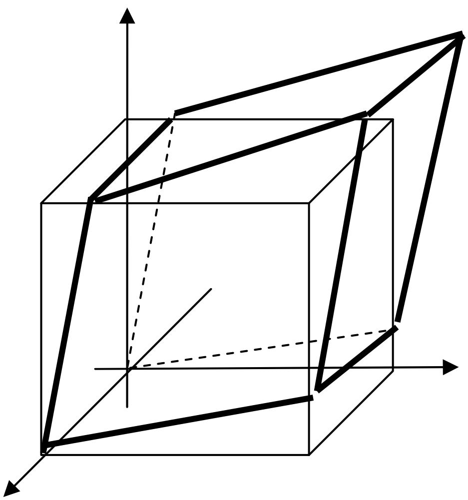
Рис.2.11.4

Задача 2.11.9. Задано вектор переміщень в лагранжевих (початкових, матеріальних) координатах $\vec{u} = 4\vec{e}_1 x_1^2 + \vec{e}_2 x_2 x_3^2 + \vec{e}_3 x_1 x_3^2$. Визначити положення точки в деформованому стані, координати якої в початковому стані $(1, 0, 2)$.

Розв'язок

Радіус-вектор точки в початковому стані $\vec{r} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$, вектор її переміщення

$$\vec{u} = 4\vec{e}_1 + 4\vec{e}_3.$$

Радіус-вектор точки в деформованому стані $\vec{R} = \vec{r} + \vec{u}$,
тому $\vec{R} = 5\vec{e}_1 + 6\vec{e}_3$.

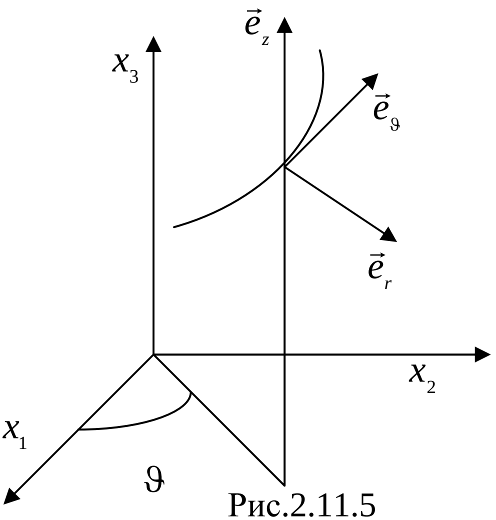

Рис.2.11.5

Задача 2.11.10. Задано вектор переміщень в лагранжевих (початкових, матеріальних) декартових координатах

$$\vec{u} = -a\vec{e}_1 x_2 x_3 + a\vec{e}_2 x_1 x_3,$$

де a—стала величина. Знайти компоненти вектора переміщень в циліндричних координатах.

Розв'язок

Базисні вектори в циліндричних координатах повернуті на кут ϑ навколо осі x_3, (z). Для того щоб знайти компоненти вектора переміщень в циліндричних координатах, треба скористатися загальними формулами перетворення компонент вектора при повороті системи координат

$$u'_i = \alpha_{ij} u_j.$$

Тут величини зі штрихом належать до нової системи, а без штриха—до старої. Величини α_{ij} є компонентами матриці перетворення, які дорівнюють проекціям базисних векторів нової системи на старі. З рис.2.11.5 суто геометрично випливає, що

$$||\alpha_{ij}|| = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$u'_1 = u_1 \cos\vartheta + u_2 \sin\vartheta,$$
$$u'_1 = -u_1 \sin\vartheta + u_2 \cos\vartheta,$$
$$u'_3 = u_3.$$

Ураховуючи, що

$$x_1 = r\cos\theta, \;\; x_2 = r\sin\theta, \;\; x_3 = x'_3 = z$$

одержимо

$$u_r = u'_1 = (-ax_3 r\sin\theta)\cos\theta + (ax_3 r\cos\theta)\sin\theta = 0,$$
$$u_\theta = u'_2 = -(-ax_3 r\sin\theta)\sin\theta + (ax_3 r\cos\theta)\cos\theta = azr,$$
$$u'_3 = u_z.$$

Задача 2.11.11. Задано залежність між початковими (лагранжевими—матеріальними) декартовими координатами і координатами в деформованому стані

$$\xi_1 = x_1, \;\; \xi_2 = x_2 + ax_3, \;\; \xi_3 = x_3 + ax_2,$$

де a—стала величина. Знайти тензор скінченних деформацій Гріна.

Розв'язок

Визначаємо переміщення $u_i = \xi_i - x_i$,

$$u_1 = 0, \;\; u_2 = ax_3, \;\; u_3 = ax_2.$$

Знаходимо компоненти тензора скінченних деформацій за формулами

$$e_{jk} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}),$$

$$e_{11} = \frac{1}{2}(u_1{,_1}{+}u_1{,_1}{+}u_1{,_1}u_1{,_1}{+}u_2{,_1}u_2{,_1}{+}u_3{,_1}u_3{,_1}) = 0,$$

$$e_{22} = \tfrac{1}{2}(u_2{,_2}{+}u_2{,_2}{+}u_1{,_2}u_1{,_2}{+}u_2{,_2}u_2{,_2}{+}u_3{,_2}u_3{,_2}) = \\ = \tfrac{1}{2}\big(0+0+0+0+a^2\big) = \tfrac{a^2}{2},$$

$$e_{12} = \tfrac{1}{2}(u_1{,_2}{+}u_2{,_1}{+}u_1{,_1}u_1{,_2}{+}u_2{,_1}u_2{,_2}{+}u_3{,_1}u_{3,2}) = 0,$$
$$e_{23} = \tfrac{1}{2}(u_2{,_3}{+}u_3{,_2}{+}u_1{,_2}u_1{,_3}{+}u_2{,_2}u_{2,3} + u_{3,2}u_{3,3}) = \\ = \tfrac{1}{2}(a+a+0+0+0) = a,$$
$$e_{33} = \tfrac{1}{2}(u_{3,3} + u_{3,3} + u_{1,3}u_{1,3} + u_{2,3}u_{2,3} + u_{3,3}u_{3,3}) = \\ = \tfrac{1}{2}\big(0+0+0+a^2+0\big) = \tfrac{a^2}{2}.$$

$$||e_{ij}|| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2/2 & a \\ 0 & a & a^2/2 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.11.12. Довести, що при деформації зсуву

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2 + \sqrt{2}x_3, \qquad \xi_3 = x_3 + \sqrt{2}x_2,$$

головні напрямки тензорів e_{ij} та A_{ij} одні і тіж самі.

Згідно з (2.2.3) $e_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_k}{\partial x_j} - \delta_{ij}\Big)$, тому

$$e_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial\xi_3}{\partial x_1}\frac{\partial\xi_3}{\partial x_1} - 1\right) = \\ = \frac{1}{2}(1+0+0-1) = 0,$$

$$e_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\xi_3}{\partial x_1}\frac{\partial\xi_3}{\partial x_2}\right) = \\ = \frac{1}{2}(0+0+0) = 0,$$

$$e_{22} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\xi_3}{\partial x_2}\frac{\partial\xi_3}{\partial x_2} - 1\right) = \\ = \frac{1}{2}\Big(0+1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-1\Big) = 1,$$

$$e_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2}\frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(0 + \sqrt{2} + \sqrt{2}\right) = \sqrt{2}.$$

Аналогічно визначають інші компоненти

$$\|e_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Щоб знайти головні деформації, знаходимо власні числа з характеристичного рівняння $e^3 - I_1 e^2 + I_2 e - I_3 = 0$. Коефіцієнти цього рівняння є інваріантами тензора e_{ij}. Корені характеристичного рівняння $e_1 = 0$, $e_2 = 1 - \sqrt{2}$, $e_3 = 1 + \sqrt{2}$. Цей тензор в головних осях зводиться до вигляду

$$\|\hat{e}_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Власні вектори визначають головні напрямки $\vec{n}(1,0,0)$, $\vec{n}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{n}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Матриця перетворення

$$\|\alpha_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, згідно з (2.2.5), $A_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_j}\right)$, тому

$$\|A_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

При перетворенні з тією самою матрицею $\|\alpha_{ij}\|$ цей тензор зводиться до діагонального вигляду

$$\left\|\hat{A}_{ij}\right\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Перевірку цих обчислень пропонується виконати читачу.

Задача 2.11.13. Використовуючи визначення (2.2.3), довести, що при перетворенні координат $\xi_i = \alpha_{ij}\xi'_j$ та $x'_i = \alpha_{ij}x_j$ тензор скінченних деформацій Лагранжа e_{ij} перетворюється як тензор другого рангу. За формулою (2.2.3)

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} - \delta_{ij}\right),$$

при вказаному перетворенні координат одержуємо

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(\alpha_{pk}\xi'_p)}{\partial x'_m}\frac{\partial x'_m}{\partial x_i}\frac{\partial(\alpha_{qk}\xi'_{qq})}{\partial x'_n}\frac{\partial x'_n}{\partial x_j} - \frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_j}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\alpha_{mi}\alpha_{nj}\delta_{pq}\frac{\partial \xi'_p}{\partial x'_m}\frac{\partial \xi'_q}{\partial x'_n} - \frac{\partial(\alpha_{mi}\xi'_m)}{\partial \xi'_n}\frac{\partial \xi'_n}{\partial \xi_j}\right) =$$

$$= \alpha_{mi}\alpha_{nj}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi'_p}{\partial x'_m}\frac{\partial \xi'_q}{\partial x'_n} - \delta'_{mn}\right)\right] = \alpha_{mi}\alpha_{nj}e'_{mn}.$$

При перетвореннях враховано $\alpha_{pk}\alpha_{qk} = \delta_{pq}$.

Задача 2.11.14. Задане поле однорідної деформації, яке визначається тензором скінченних деформацій

$$\|e_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Визначити головні деформації та напрямки головних осей.

Головні деформації є коренями характеристичного рівняння $e^3 - I_1e^2 + I_2e - I_3 = 0$, коефіцієнтами якого є інваріанти симетричного тензора другого рангу:

$$I_1 = e_{ii} = e_{11} + e_{22} + e_{33} = 8,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{22} & e_{23} \\ e_{23} & e_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{11} & e_{13} \\ e_{31} & e_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = -4,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -32.$$

$$e^3 - 8e^2 - 4e + 32 = 0.$$

Звідси

$$e_{(1)} = 8, \;\; e_{(2)} = 2, \;\; e_{(3)} = -2.$$

Напрямки головних деформацій співпадають з головними векторами і визначаються з системи лінійних однорідних рівнянь $\big(e_{ij} - \delta_{ij} e_{(k)}\big) n_j = 0$,

$$\begin{aligned} &\big(e_{11} - e_{(k)}\big) n_1 + e_{12} n_2 + e_{13} n_3 = 0, \\ &e_{21} n_1 + \big(e_{22} - e_{(k)}\big) n_2 + e_{23} n_3 = 0, \\ &e_{31} n_1 + e_{32} n_2 + \big(e_{33} - e_{(k)}\big) n_3 = 0, \end{aligned}$$

де n_j—проекції одиничної нормалі до k-ї головної площинки. Оскільки визначник системи дорівнює нулю, з цієї умови визначають головні деформації, тому система вироджена і має не більше як два лінійно незалежних рівняння до яких треба додати умову нормування $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. Наприклад, при визначенні напрямку головної деформації маємо систему

$$\begin{aligned} &-n_1 + 3n_2 - 2n_3 = 0, \\ &3n_1 - n_2 - 2n_3 = 0, \\ &2n_1 + 2n_2 - 4n_3 = 0, \end{aligned}$$

з якої легко побачити, що сума перших двох рівнянь співпадає з третім. З перших двох рівнянь виражаємо n_1 і n_2 через n_3, одержуємо $n_1 = n_3$, $n_2 = n_3$. Скориставшись умовою нормування, одержуємо: $n_1 = 1/\sqrt{3}$, $n_2 = 1/\sqrt{3}$, $n_3 = 1/\sqrt{3}$. Матриця перетворення до головних напрямків будується на головних векторах і в даному випадку має вигляд

$$\|\alpha_{ij}\| = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.11.15. Тіло перебуває в однорідному деформованому стані $\xi_1 = \sqrt{3}x_1$, $\xi_2 = 2x_2$, $\xi_3 = \sqrt{3}x_3 - x_2$. Визначити матеріальний еліпсоїд деформацій, на який перетворюється сферична поверхня $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Показати, що рівняння цього еліпсоїда деформацій має вигляд $\xi_1^2/\Lambda_1^2 + \xi_2^2/\Lambda_2^2 + \xi_3^2/\Lambda_3^2 = 1$, де Λ_i^2—квадрати коефіцієнтів довжини в напрямку відповідних координатних осей.

Розв'язок

Виражаємо старі координати через нові

$$x_1 = \xi_1 \Big/ \sqrt{3}, \;\; x_2 = \xi_2/2, \;\; x_3 = \xi_3 \Big/ \sqrt{3} + \xi_2 \Big/ 2\sqrt{3}.$$

Оскільки деформація однорідна, то можна не переходити до диференціалів, а просто підставити старі координати, виражені через нові, у рівняння еліпса

$$\xi_1^2/3 + \xi_2^2/4 + \xi_3^2/3 + \xi_2\xi_3/3 + \xi_2^2/12 = 1,$$
$$\xi_1^2/3 + \xi_2^2/3 + \xi_3^2/3 + \xi_2\xi_3/3 = 1.$$

Одержаній квадратичній формі можна зіставити симетричну матрицю

$$\|b_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Для того щоб одержану квадратичну форму привести до канонічного вигляду, треба перейти до головних осей. Щоб знайти матрицю перетворення системи координат, треба знайти її власні числа і власні вектори. Записуємо характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0,$$
$$\lambda^3 - \lambda^2 + \tfrac{11}{36}\lambda - \tfrac{1}{36} = 0,$$

корені якого $\lambda_1 = 1/3$, $\lambda_2 = 1/2$, $\lambda_3 = 1/6$. В головних осях матриця набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix},$$

а відповідна квадратична форма—

$$\hat{\xi}_1^2 \Big/ 3 + \hat{\xi}_2^2 \Big/ 2 + \hat{\xi}_3^2 \Big/ 6 = 1.$$

Одержане рівняння є рівнянням еліпса з півосями $1\big/\sqrt{3}$, $1\big/\sqrt{2}$, $1\big/\sqrt{6}$. Щоб знайти матрицю перетворення системи координат, знаходимо головні вектори з однорідної системи рівнянь $(b_{ij} - \delta_{ij}\lambda)n_j = 0$ за умови, що головні вектори нормовані, тобто їх довжина дорівнює одиниці. Одержуємо $\vec{n}(1{,}0{,}0)$, $\vec{n}\big(0{,}1/\sqrt{2}{,}1/\sqrt{2}\big)$, $\vec{n}\big(0{,}-1/\sqrt{2}{,}1/\sqrt{2}\big)$. Матриця перетворення системи координат має вигляд

$$\|\alpha_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1\big/\sqrt{2} & 1\big/\sqrt{2} \\ 0 & -1\big/\sqrt{2} & 1\big/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Для того щоб показати, що рівняння еліпсоїда деформацій має вигляд

$$\xi_1^2/\Lambda_1^2 + \xi_2^2/\Lambda_2^2 + \xi_3^2/\Lambda_3^2 = 1,$$

де Λ_i^2—квадрати коефіцієнтів довжини, знаходимо градієнт тензора деформацій

$$F = \left\| \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right\| = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Знаходимо тензор деформацій Гріна

$$G = F'F = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо його власні числа. Характеристичне рівняння має вигляд

$$x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0,$$

його корені визначають квадрати коефіцієнтів довжини

$$\Lambda_1^2 = 3, \;\; \Lambda_2^2 = 6, \;\; \Lambda_3^2 = 2.$$

Тензор деформацій Гріна в головних осях набуває вигляду

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Він показує, що квадрати півосей еліпса дорівнюють квадратам коефіцієнтів довжини. Щоб знайти матрицю перетворення, знаходимо власні вектори з системи рівнянь $\big(G_{ij} - \delta_{ij}\Lambda^2\big)n_j = 0$, $n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$. Одержуємо $\vec{n}(1{,}0{,}0)$, $\vec{n}\big(1{,}\sqrt{3}/2{,}-1/2\big)$, $\vec{n}\big(0{,}1/2{,}\sqrt{3}/2\big)$ і матрицю перетворення

$$\|\alpha_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Крім того, щоб показати, що деформування є результат повороту і перетворення сфери на еліпсоїд, скористаємося полярним розкладом градієнта деформацій $F = NS$, де N—ортогональна матриця, яка визначає поворот системи координат і поворот тіла як твердого, а S—симетрична матриця, якою визначається перетворення сфери на еліпсоїд. Оскільки $S^2 = F'F = G$, то в канонічній (діагоналізованій) формі

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Компоненти тензора S в старій системі координат знаходять за стандартними формулами $S_{ij} = \alpha_{ki}\alpha_{mj}S'_{km}$

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}-3}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}-3}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}+3}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Задача 2.11.16. Для однорідної деформації

$$\xi_1 = \sqrt{3}x_1, \;\; \xi_2 = 2x_2, \;\; \xi_3 = \sqrt{3}x_3 - x_2$$

визначити просторовий еліпсоїд деформації та показати, що його рівнянням є

$$\lambda_{(1)}^2 x_1^2 + \lambda_{(2)}^2 x_2^2 + \lambda_{(3)}^2 x_3^2 = 1.$$

Розв'язок

Для того щоб визначити просторовий еліпсоїд деформації, треба знайти, яку форму мала сфера

$$\xi_\mathrm{i}\xi_\mathrm{i} = 1, \qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1,$$

отримана в результаті деформації.

Оскільки деформований стан однорідний, то можна не переходити до диференціальної форми, а просто виразити в рівнянні сфери нові координати через старі:

$$3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 - 2\sqrt{3}x_2x_3 + x_2^2 = 1,$$
$$3x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 2\sqrt{3}x_2x_3 = 1.$$

Квадратичній формі можна зіставити симетричну матрицю

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix},$$

яка відповідає тензору деформацій Гріна $G = F'F$, де $F = \|\partial\xi_i/\partial x_j\|$—градієнт деформацій. Рівняння еліпсоїда зводиться до канонічного вигляду (в головних осях)

$$3x_1^2 + 6x_2^2 + 2x_3^2 = 1,$$

перетворенням з матрицею

$$\|\alpha_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Еліпсоїду відповідає матриця, яка є тензором Гріна в головних осях

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

діагональні члени якої є коефіцієнтами довжини.

Задача 2.11.17. Безпосереднім розкладом перевірити, що другий інваріант тензора деформацій $\|e_{ij}\|$ можна записати у вигляді

$$I_2 = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{11} & e_{13} \\ e_{31} & e_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{22} & e_{23} \\ e_{32} & e_{33} \end{vmatrix}.$$

Розв'язок

Задача визначення головних деформацій і головних напрямків тензора деформацій приводить до однорідної системи рівнянь

$$(e_{ij} - \delta_{ij} e) n_j = 0,$$

яка має нетривіальні розв'язки за умови, що визначник системи дорівнює нулю

$$|e_{ij} - \delta_{ij} e| = 0, \quad \begin{vmatrix} e_{11} - e & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} - e & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} - e \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, одержуємо характеристичне рівняння $e^3 - I_1 e^2 + I_2 e - I_3 = 0$, коефіцієнти якого не залежать від вибору системи координат. Це означає, що вони є інваріантами. Безпосереднє розкриття визначника дає $I_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33}$,

$$I_2 = e_{11}e_{22} + e_{22}e_{33} + e_{33}e_{11} - (e_{12}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2).$$

З іншого боку, безпосереднє розкриття виразу

$$I_2 = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{11} & e_{13} \\ e_{31} & e_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{22} & e_{23} \\ e_{32} & e_{33} \end{vmatrix}$$

приводить до того самого результату.

Задача 2.11.18. Однорідна скінченна деформація характеризується переміщеннями $u_i = A_{ij}x_j$, де A_{ij}—сталі. Знайти вираз для відносної зміни об'єму (зміни, що припадає на одиницю початкового об'єму). Довести, що при дуже малих A_{ij} він зводиться до кубічного розширення.

Розглянемо малий прямокутний паралелепіпед з початковими розмірами dx_1, dx_2, dx_3 вздовж осей координат. За даної деформації проекції ребер цього паралелепіпеда на осі координат в деформованому стані будуть

$$d\xi_i = (A_{ij} + \delta_{ij})dx_j.$$

Початковий прямокутний паралелепіпед об'єму

$$dV_0 = dx_1 dx_2 dx_3$$

перетворюється на косий паралелепіпед, ребра якого є векторами

$$\vec{e}_i d\xi_i = \vec{e}_i (A_{ij} + \delta_{ij})dx_j.$$

Об'єм косокутного паралелепіпеда можна знайти як змішаний добуток векторів, на яких він побудований. Цей деформований елемент має об'єм

$$dV = \varepsilon_{ijk}(A_{i1} + \delta_{i1})(A_{j2} + \delta_{j2})(A_{k3} + \delta_{k3})dx_1 dx_2 dx_3.$$

Тоді

$$\frac{dV}{dV_0} = \frac{dV_0 + \Delta V}{dV_0} =$$

$$= 1 + \frac{\Delta V}{dV_0} = \varepsilon_{ijk}(A_{i1} + \delta_{i1})(A_{j2} + \delta_{j2})(A_{k3} + \delta_{k3}).$$

Якщо A_{ij} дуже малі, то їх степенями вище першої можна знехтувати. Тоді

$$\Delta V/dV_0 = \varepsilon_{ijk}(A_{i1}\delta_{j2}\delta_{k3} + \delta_{i1}A_{j2}\delta_{k3} + \delta_{i1}\delta_{j2}A_{k3} + \delta_{i1}\delta_{j2}\delta_{k3}) - 1 =$$

$$= A_{11} + A_{22} + A_{33}.$$

У лінійній теорії коефіцієнт кубічного розширення дорівнює

$$e_{ii} = e_{11} + e_{22} + e_{33} = \partial u_i / \partial x_i,$$

що у випадку $u_i = A_{ij} x_j$ дає

$$e_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}.$$

Задача 2.11.19. Лінійна (мала) деформація задана співвідношеннями

$$u_1 = 4x_1 - x_2 + 3x_3, \quad u_2 = x_1 + 7x_2, \quad u_3 = -3x_1 + 4x_2 + 4x_3.$$

Знайти головні деформації (видовження) $\varepsilon_{(n)}$ та головні значення девіатора деформацій $s_{(n)}$.

Розв'язок

Тензор ε_{ij} можна знайти як симетричну частину градієнта переміщення

$$\|\partial u_i / \partial x_j\| = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \\ -3 & 4 & 4 \end{pmatrix},$$

або використовуючи співвідношення Коші

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

$$\|\varepsilon_{ij}\| = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Щоб знайти головні деформації, знаходимо корені характеристичного рівняння $\varepsilon^3 - I_1\varepsilon^2 + I_2\varepsilon - I_3 = 0$, $\varepsilon^3 - 15\varepsilon^2 + 68\varepsilon - 96 = 0$, $\varepsilon_1 = 8,\ \varepsilon_2 = 4,\ \varepsilon_3 = 3$, якими визначаються деформації відносного видовження. Тензор деформацій в головних осях

$$\|\hat{\varepsilon}_{ij}\| = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Щоб знайти девіатор деформацій, спочатку знаходимо кульовий тензор. Його компоненти

$$t = \varepsilon_{kk}/3 = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})/3 = 5,$$

$$T = \|t\delta_{ij}\| = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо девіатор деформацій $s_{ij} = \varepsilon_{ij} - t\delta_{ij}$

$$\|s_{ij}\| = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

який в головних осях має вигляд

$$\|\hat{s}_{ij}\| = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.11.20. Сорокап'ятиградусною розеткою деформацій виміряні поздовжні деформації вздовж осей, зображених на рис.2.11.6. В точці P знайдені

$$\varepsilon_{11} = 5 \cdot 10^{-4}, \quad \varepsilon'_{11} = 4 \cdot 10^{-4}, \quad \varepsilon_{22} = 7 \cdot 10^{-4}.$$

Визначити деформацію зсуву ε_{12} в цій точці.

Розв'язок

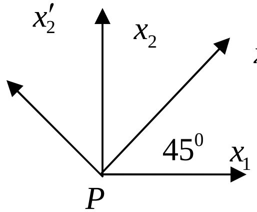

Рис.2.11.6

Скористаємося формулами перетворення компонент тензора при повороті системи координат $\varepsilon'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jm}\varepsilon_{km}$. Компоненти матриці перетворення системи координат дорівнюють проекціям ортів нової системи на старі

$$\|\alpha_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

За формулами перетворення

$$\varepsilon'_{11} = \alpha_{11}^2\varepsilon_{11} + 2\alpha_{11}\alpha_{12}\varepsilon_{12} + \alpha_{12}^2\varepsilon_{22},$$

$$4\cdot 10^{-4} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 10^{-4} + 2\cdot\frac{1}{2}\varepsilon_{12} + \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 10^{-4}, \quad \varepsilon_{12} = -2\cdot 10^{-4}.$$

Задача 2.11.21. Побудувати круги Мора для випадку плоскої деформації та визначити максимальну деформацію зсуву для деформованого стану, заданого тензором деформацій

$$\|\varepsilon_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

Перевірити результат аналітично.

Розв'язок

Для стану деформації, який відноситься до осей x_i, точка $B(\varepsilon_{22} = 5, \quad \varepsilon_{23} = \sqrt{3})$ та точка D розташовані на кінцях діаметра найбільшого з внутрішніх кругів (рис.2.11.7).

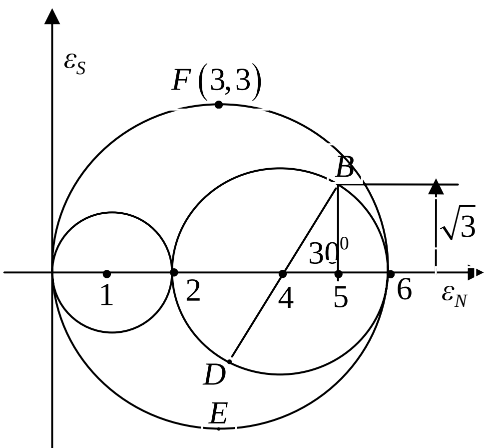

Рис.2.11.7

Для плоскої деформації величина однієї головної деформації $\varepsilon = 0$, тому круги Мора виглядають так, як показано на рисунку. Геометрично видно, що поворотом на кут 30^0 (рис.2.11.7) навколо осі x_1, з матрицею перетворення

$$\|\alpha_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix},$$

(еквівалентно куту 60^0 на діаграмі Мора) тензор деформацій приводиться до головних осей і головні деформації дорівнюють 0, 6, 2. Деформації зсуву досягають найбільшої величини на площинках нахилених під кутом 45^0 до осей x_1x_2 і паралельних осі x_3. Величина найбільших деформацій зсуву дорівнює половині максимальної різниці головних деформацій $\max\epsilon_S = 6-0/2 = 3$. Їм відповідає деформований стан, який на рис. 2.11.7 зображується точкою $F(3{,}3)$.

Аналітична перевірка. Визначаємо головні деформації та положення головних осей для заданого тензора деформацій. Записуємо характеристичне рівняння $\varepsilon^3 - 8\varepsilon^2 + 12\varepsilon = 0$. Його корені дорівнюють 0,6,2 тоді у власних осях тензор має вигляд

$$\|\hat{\varepsilon}_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо власні вектори

$$\vec{n}(1{,}0{,}0),\ \vec{n}\left(0{,}\sqrt{3}\middle/2{,}1/2\right),\ \vec{n}\left(0{,}-1/2{,}\sqrt{3}\middle/2\right),$$

яким відповідає матриця перетворення

$$\|\alpha_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Максимальні деформації зсуву виникають на площинках, нахилених під кутом 45^0 до головних напрямків. Тому поворотом на 45^0 навколо осі $\hat{x}_3$, якому відповідає матриця повороту

$$\|\alpha'_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

одержуємо систему координат, у якої осі збігаються з головними. За допомогою формул перетворення $\varepsilon'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jm}\varepsilon_{km}$ зведемо тензор деформацій до системи координат x'_j, в якій тензор деформацій має компоненти ε'_{ij}, що дорівнюють компонентам матриці

$$\|\varepsilon'_{ij}\| = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.11.22. Деформований стан суцільного середовища задано тензором

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_1x_3 \\ x_2^2 & x_3 & x_3^2 \\ x_1x_3 & x_3^2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Чи задовольняються рівняння сумісності?
Розв'язок
Використовуючи співвідношення Коші

$$\|\varepsilon_{11}\| = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \;\; \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \;\; \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right), \;\; \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right),$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right),$$

безпосередньою підстановкою знаходимо рівняння сумісності деформацій

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2}\right),$$
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right),$$
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2}\right)$$

і безпосередньою підстановкою деформацій визначаємо, чи всі рівняння задовольняються. Читачу пропонується зробити цю перевірку детально.

Задача 2.11.23. Вивести тензор скінченних деформацій Коші—Гріна e_{ij}, скориставшись його визначенням

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} - \delta_{ij}\right).$$

Розв'язок

З формули $\xi_i = x_i + u_i$ маємо

$$\partial \xi_i / \partial x_j = \delta_{ij} + \partial u_i / \partial x_j.$$

Тоді, користуючись визначенням e_{ij}, можна отримати

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left[\left(\delta_{ki} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\left(\delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) - \delta_{ij}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\delta_{ki}\delta_{kj} + \delta_{ki}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \delta_{kj}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \delta_{ij}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right].$$

Задача 2.11.24. Задано поле переміщень

$$\xi_1 = x_1 - Cx_2 + Bx_3, \quad \xi_2 = Cx_1 + x_2 - Ax_3, \quad \xi_3 = -Bx_1 + Ax_2 + x_3.$$

Показати, що ці переміщення відповідають повороту абсолютно твердого тіла, якщо сталі A,B,C дуже малі. Визначити вектор повороту $\vec{\omega}$ для нескінченно малого повороту твердого тіла.

Розв'язок

Знаходимо градієнт даного поля переміщень

$$F = \left\| \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & -C & B \\ C & 1 & -A \\ -B & A & 1 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо тензор деформацій Гріна $G = FF'$

$$G = FF' = \begin{pmatrix} 1+B^2+C^2 & -AB & -AC \\ -AB & 1+A^2+C^2 & -BC \\ -AC & -BC & 1+A^2+B^2 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо тензор скінченних деформацій Коші—Гріна e_{ij}, скориставшись його визначенням

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} - \delta_{ij}\right),$$

$$\|e_{ij}\| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} B^2+C^2 & -AB & -AC \\ -AB & A^2+C^2 & -BC \\ -AC & -BC & A^2+B^2 \end{pmatrix}.$$

Якщо знехтувати добутком малих констант, то цей тензор деформацій дорівнює нулю. Це означає, що деформації відсутні, а переміщення зводиться до повороту абсолютно твердого тіла. За формулою

$$\|\omega_{ij}\| = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

тензор повороту дорівнює

$$\|\omega_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & -C & B \\ C & 0 & -A \\ -B & A & 0 \end{pmatrix},$$

а вектор малого повороту

$$\vec{\omega} = A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2 + C\vec{e}_3.$$

Задача 2.11.25. Поворот абсолютно твердого тіла описується полем переміщень

$$u_1 = 0{,}02x_3, \quad u_2 = -0{,}03x_3, \quad u_3 = -0{,}02x_1 + 0{,}03x_2.$$

Визначити переміщення точки Q (3, 0.1, 4) відносно точки P(3,0,4).

Розв'язок

Поле переміщень для точок Q та P дає

$$\vec{u}_Q = 0{,}08\vec{e}_1 - 0{,}12\vec{e}_2 - 0{,}057\vec{e}_3,$$
$$\vec{u}_P = 0{,}08\vec{e}_1 - 0{,}12\vec{e}_2 - 0{,}06\vec{e}_3,$$

звідки

$$d\vec{u} = \vec{u}_Q - \vec{u}_P = 0{,}003\vec{e}_3.$$

Такий самий результат отримаємо, використовуючи тензор повороту

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

$$\|\omega_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}02 \\ 0 & 0 & -0{,}03 \\ -0{,}02 & 0{,}03 & 0 \end{pmatrix},$$

$d\vec{r} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P,\ \ dr_1 = 0,\ \ dr_2 = 0{,}1,\ \ dr_3 = 0,$

$$du_i = \omega_{ij} dr_j,\ \ du_1 = 0,\ \ du_2 = 0,\ \ du_3 = 0{,}03.$$

Задача 2.11.26. Для плоскої деформації, яка відбувається в площинах, паралельних x_2x_3, визначити вираз для відносного видовження ε'_{22} та деформації зсуву ε'_{23}, якщо осі зі штрихами та без штрихів розташовані так, як зображено на рис. 2.11.8. Матриця перетворення системи координат відповідно до рис. 2.11.8

$$\|\alpha_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

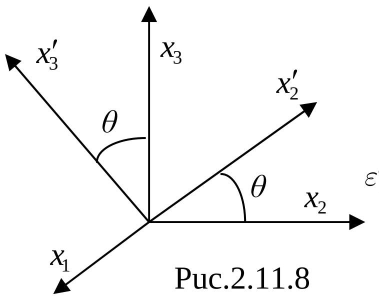

Рис.2.11.8

Використовуючи формули перетворення компонент тензора $\varepsilon'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jm}\varepsilon_{km}$, одержуємо

$$\varepsilon'_{22} = \varepsilon_{22}\cos^2\theta + 2\varepsilon_{23}\sin\theta\cos\theta + \varepsilon_{33}\sin^2\theta =$$

$$= \frac{\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}}{2} + \frac{\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33}}{2}\cos 2\theta + \varepsilon_{23}\sin 2\theta,$$

$$\varepsilon'_{23} = -\varepsilon_{22}\sin\theta\cos\theta + \varepsilon_{23}\cos^2\theta -$$

$$-\varepsilon_{23}\sin^2\theta + \varepsilon_{33}\sin\theta\cos\theta = \varepsilon_{23}\cos 2\theta - \frac{\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33}}{2}\sin 2\theta.$$

Задача 2.11.27. Для однорідної деформації дано тензор малих деформацій

$$\|\varepsilon_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0{,}01 & -0{,}005 & 0 \\ -0{,}005 & 0{,}02 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}01 & -0{,}03 \end{pmatrix}.$$

Як змінюється прямий кут за рахунок зсуву ADC на грані елементарного тетраедра $OABC$ (рис.2.11.9), якщо $OA = OB = OC$, а точка D—середина ребра AB.

Розв'язок

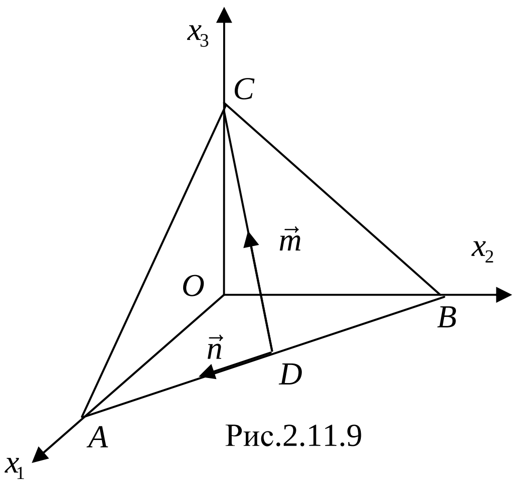

Рис.2.11.9

Зміна прямого кута між векторами $\vec{n}$ і $\vec{m}$ є деформацією зсуву, тому, щоб її визначити, треба знайти компоненту тензора деформацій ε'_{12} в новій системі координат x'_i, у якої вісь x'_1 напрямлена вздовж вектора $\vec{m}$, x'_2 напрямлена вздовж вектора $\vec{n}$ і x'_3 по нормалі до площини ABC. Оскільки площина ABC рівнонахилена до осей

$x_1,\ x_2,\ x_3$ (тобто вона є октаедричною площинкою), то нормаль до неї також рівнонахилена до осей $x_1,\ x_2,\ x_3$. Враховуючи, що нормаль одинична, її проекції на осі координат $\vec{k}\left(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right)$. З геометричних даних видно, що проекція $n_3 = 0$ і $n_1 = n_2$, але $n_1 > 0,\ n_2 < 0$ тому маємо $\vec{n}\left(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0\right)$. Проекції вектора $\vec{m}$ можна знайти суто геометрично або як векторний добуток $\vec{n}\times\vec{k}$, що дає: $\vec{m}\left(-1/\sqrt{6},\ -1/\sqrt{6},\ 2/\sqrt{6}\right)$. Тому матриця перетворення системи координат має вигляд

$$\|\alpha_{ij}\| = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Тоді, використовуючи формулу перетворення компонент тензора, отримуємо

$$\gamma'_{12} = 2\varepsilon'_{12} = -0{,}01/\sqrt{3}.$$

Задача 2.11.28. У деякій точці тензор деформацій має вигляд

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайти його компоненти у головних осях. Визначити інваріанти для кожного з таких тензорів та показати, що вони однакові.

Розв'язок

Знаходимо інваріанти $I_1 = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 5 + 4 + 4 = 13$,

$$I_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 54,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 72.$$

Складаємо характеристичне рівняння $\varepsilon^3 - 13\varepsilon^2 + 54\varepsilon - 72 = 0$.

Знаходимо його корені. Вони дорівнюють 6, 4, 3. В головних осях тензор має вигляд

$$\|\hat{\varepsilon}_{ij}\| = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Його інваріанти

$$I_1 = 6+4+3 = 13, \quad I_2 = 24+18+12 = 54, \quad I_3 = 6\cdot 4\cdot 3 = 72.$$

Задача 2.11.29. Для поля переміщень

$$\xi_1 = x_1 + Ax_3, \quad \xi_2 = x_2 - Ax_3, \quad \xi_3 = x_3 - Ax_1 + Ax_2$$

визначити тензор скінченних деформацій e_{ij}. Показати, що якщо стала A дуже мала, то переміщення представляє поворот абсолютно твердого тіла.

Розв'язок

Знаходимо переміщення $u_i = \xi_i - x_i$. З умови задачі

$$u_1 = Ax_3, \quad u_2 = -Ax_3, \quad u_3 = -Ax_1 + Ax_2,$$

тоді за формулою

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right),$$

знаходимо

$$\|e_{ij}\| = \begin{pmatrix} A^2/2 & -A^2/2 & 0 \\ -A^2/2 & A^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & A^2 \end{pmatrix}.$$

Якщо A мале, то величиною A^2 можна знехтувати, тоді $e_{ij} \equiv 0$. Це означає, що деформації відсутні. Щоб знайти вектор повороту, знаходимо градієнт деформацій

$$F = \left\|\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & A \\ 0 & 1 & -A \\ -A & A & 1 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо тензор повороту $\omega = \frac{1}{2}(F - F')$

$$\|\omega_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & -A \\ -A & A & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор повороту відповідно дорівнює

$$\vec{\omega} = A\hat{e}_1 + A\hat{e}_2.$$

Задача 2.11.30. Показати, що поле переміщень

$$u_1 = A\xi_1 + 3\xi_2, \quad u_2 = 3\xi_1 - B\xi_2, \quad u_3 = 5$$

при малих переміщеннях дає стан плоскої деформації. Знайти зв'язок між A та B, за якого деформація буде ізохоричною (відсутнє об'ємне розширення).

Розв'язок

Знаходимо тензор деформацій. Оскільки розглядаються малі деформації, то

$$\|\varepsilon_{ij}\| = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i}\right),$$

$$\|\varepsilon_{ij}\| = \begin{bmatrix} A & 3 & 0 \\ 3 & -B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Знайдений тензор деформацій показує, що деформації $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{31} = 0$, пов'язані з напрямком осі x_3, відсутні. За визначенням такий деформований стан називається плоским напруженим станом. Відносна об'ємна деформація дорівнює

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = A - B.$$

Вона перетворюється на нуль, якщо $A = B$.

Задача 2.11.31. Так звана дельта-розетка для вимірювання поздовжніх деформацій має форму рівностороннього трикутника та вимірює відносні видовження ε_{11}, ε'_{11}, ε''_{11} в напрямках, вказаних на рис.2.11.10. Знайти ε_{12}, ε_{22}.

Розв'язок

Нехай $\varepsilon_{11} = a$, $\varepsilon'_{11} = b$, $\varepsilon''_{11} = c$. Визначити ε_{12} та ε_{22} в тій самій точці. Скористаємося формулами перетворення компонент тензора при повороті осей $\varepsilon'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jm}\varepsilon_{km}$. Матриця перетворення при повороті осей на кут 60^0 навколо осі x_3 має вигляд

$$\|\alpha_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а при повороті осей на кут 120^0—

$$\|\alpha_{ij}\| = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

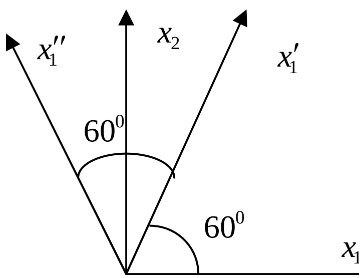

Рис.2.11.10

Тому у першому випадку для напрямку x'_1 маємо

$$\varepsilon'_{11} = \alpha_{11}^2\varepsilon_{11} + 2\alpha_{11}\alpha_{12}\varepsilon_{12} + \alpha_{12}^2\varepsilon_{22},$$

$$b = \frac{1}{4}a + \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_{12} + \frac{3}{4}\varepsilon_{22}.$$

Аналогічно

$$c = \frac{1}{4}a - \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_{12} + \frac{3}{4}\varepsilon_{22}.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь відносно ε_{12} та ε_{22}, знаходимо

$$\varepsilon_{12} = (b-c)/\sqrt{3},$$

$$\varepsilon_{22} = (-a+2b+2c)/3.$$

Задача 2.11.32. Для переміщення простого зсуву

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2, \quad \xi_3 = x_3 + 2x_2\Big/\sqrt{3}.$$

Визначити напрямок лінійного елемента в площині x_2x_3, для якого відносне видовження дорівнює нулю.

Розв'язок

Переміщення відбувається в площині x_2x_3. Знаходимо тензор деформацій Гріна

$$G_{ij} = \frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_k}{\partial x_j} = \frac{\partial\xi_1}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_1}{\partial x_j} + \frac{\partial\xi_2}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_2}{\partial x_j} + \frac{\partial\xi_3}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_3}{\partial x_j},$$

$$\|G_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & 2\big/\sqrt{3} \\ 0 & 2\big/\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Поворот виконується в площині x_2x_3, тому матриця перетворення має вигляд

$$\|\alpha_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

за умови, що $\alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 = 1$.

Використовуємо формули перетворення компонент тензора при повороті осей $G'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jm}G_{km}$ і умову, що видовження дорівнює нулю, з якої випливає, що коефіцієнт довжини $G_{22} = 1$. Оскільки довжина не змінилася, маємо

$$G'_{22} = \alpha_{22}^2 G_{22} + 2\alpha_{22}\alpha_{23}G_{23} + \alpha_{23}^2 G_{33},$$

$$1 = \frac{7}{3}\alpha_{22}^2 + 2\alpha_{22}\alpha_{23}\frac{2}{\sqrt{3}} + \alpha_{23}^2,$$

$$\alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 = 1.$$

Розв'язуючи сумісно ці два рівняння, знаходимо

$$\alpha_{22} = \pm\sqrt{3}/2, \quad \alpha_{23} = \mp 1/2,$$

або

$$\alpha_{22} = 0, \quad \alpha_{33} = \pm 1.$$

Таким чином, нульове видовження має елемент, розташований вздовж осі x_3, та елемент, що йде під кутом 60^0 до осі x_3.

Задача 2.11.33. Для переміщення зсуву

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2, \quad \xi_3 = x_3 + 2x_2\Big/\sqrt{3}$$

знайти рівняння еліпса, в який при деформації переходить коло

$$x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Розв'язок

Перший спосіб. Виражаємо старі координати через нові

$$x_1 = \xi_1, \ \ x_2 = \xi_2, \ \ x_3 = \xi_3 - \frac{2}{\sqrt{3}}\xi_2.$$

Підставляємо їх у рівняння кола і одержуємо

$$\frac{7}{3}\xi_2^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}\xi_3\xi_2 + \xi_3^2 = 1.$$

Одержаній квадратичній формі відповідає матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & -2\big/\sqrt{3} \\ 0 & -2\big/\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Щоб привести квадратичну форму до канонічного вигляду знаходимо власні числа матриці, розв'язуючи її характеристичне рівняння $\lambda^2 - \frac{10}{3}\lambda + 1 = 0$, його корені дорівнюють $\lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = 1/3$. Одержуємо канонічний вигляд

$$3\hat{\xi}_2^2 + \hat{\xi}_3^2\Big/3 = 1$$

або

$$\hat{\xi}_2^2\Big/(1/3) + \hat{\xi}_3^2\Big/3 = 1.$$

Одержаному рівнянню відповідає еліпс з півосями $1\big/\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$.

Другий спосіб. Знаходимо градієнт переміщень

$$F = \left\| \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2\big/\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо тензор деформацій Гріна

$$G = F'F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & 2/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Заходимо головні деформації (власні числа) тензора деформацій, вони дорівнюють $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1/3$, які є квадратами коефіцієнтів довжини і одночасно квадратами півосей еліпса.

Задача 2.11.34. Визначити кут зсуву (рис.2.11.11) γ_{23} для деформації

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2, \quad \xi_3 = x_3 + 2x_2\sqrt{3}.$$

Розв'язок.

Знаходимо переміщення $u_i = \xi_i - x_i$,

$$u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 2x_2 \Big/ \sqrt{3.}$$

Знаходимо тензор скінченних деформацій

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right),$$

$$\|e_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо

$$\sin\gamma_{23} = \frac{2e_{23}}{\sqrt{1+2e_{22}}\sqrt{1+2e_{33}}} = \frac{2\left(1/\sqrt{3}\right)}{\sqrt{1+2(2/3)}\sqrt{1+0}} = \frac{2}{\sqrt{7}},$$
$$\gamma_{23} = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right).$$

Задача 2.11.35. Дано поле переміщень

$$\xi_1 = x_1 + 2x_3, \quad \xi_2 = x_2 - 2x_3, \quad \xi_3 = x_3 - 2x_1 + 2x_2.$$

Знайти тензори скінченних деформацій Лагранжа і Ейлера та знайти їх у головних осях.

Розв'язок

Знаходимо переміщення, виражені через координати в початковому стані $u_i = \xi_i - x_i$,

$$u_1 = 2x_3,\ u_2 = -2x_3,\ u_3 = -2x_1 + 2x_2.$$

Знаходимо тензор скінченних деформацій Лагранжа

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right),$$

$$\|e_{ij}\| = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Виражаємо координати в початковому стані через координати в деформованому стані

$$x_1 = (5\xi_1 + 4\xi_2 - 2\xi_3)/9,$$

$$x_2 = (4\xi_1 + 5\xi_2 + 2\xi_3)/9,$$

$$x_3 = (2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3)/9.$$

Виражаємо переміщення через координати в деформованому стані

$$u_1 = (4\xi_1 - 4\xi_2 + 2\xi_3)/9,$$

$$u_2 = (-4\xi_1 + 4\xi_2 - 2\xi_3)/9,$$

$$u_3 = (-2\xi_1 + 2\xi_2 + 8\xi_3)/9.$$

Знаходимо тензор скінченних деформацій Ейлера—Альмансі

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} - \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i}\frac{\partial u_k}{\partial \xi_j}\right),$$

$$\|A_{ij}\| = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Складаючи характеристичні рівняння і знаходячи їх корені, переходимо до головних осей (до діагональної форми) тензорів

$$\|\hat{e}_{ij}\| = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \ \left\|\hat{A}_{ij}\right\| = \begin{pmatrix} 4/9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.11.36. Для поля переміщень

$$\xi_1 = x_1 + 2x_3, \quad \xi_2 = x_2 - 2x_3, \quad \xi_3 = x_3 - 2x_1 + 2x_2$$

знайти градієнт деформації F та, скориставшись полярним розкладом F, визначити тензор повороту N та правий тензор коефіцієнтів довжини S.

Розв'язок
Знаходимо градієнт деформації F

$$F = \left\|\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідно до полярного розкладу $F = NS, \quad S^2 = F'F$

$$S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Складаючи характеристичне рівняння і знаходячи його корені переходимо до головних осей і діагоналізуємо тензор. Корені дорівнюють 9,1,9

$$\hat{S}^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \ \hat{S} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матриця перетворення

$$\|\alpha_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Скориставшись формулами перетворення $S_{ij} = \alpha_{ki}\alpha_{mj}\hat{S}_{km}$, знаходимо тензор коефіцієнтів довжини S в старій системі координат

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Скориставшись співвідношенням $F = NS,\ N = FS^{-1}$ знаходимо тензор повороту

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$N = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.11.37. Довести, що перший інваріант тензора скінченних деформацій $\|e_{ij}\|$ можна представити через головні значення коефіцієнтів довжини таким чином:

$$I_{1e} = \left[\left(\Lambda_1^2 - 1\right) + \left(\Lambda_2^2 - 1\right) + \left(\Lambda_3^2 - 1\right)\right]/2.$$

Розв'язок

Тензор скінченних деформацій пов'язаний з тензором деформацій Гріна співвідношенням $e_{ij} = (G_{ij} - \delta_{ij})/2$, тому

$$I_{1e} = e_{11} + e_{22} + e_{33} = (G_{11} + G_{22} + G_{33} - 3)/2.$$

У свою чергу, діагональні компоненти тензора деформацій Гріна дорівнюють квадратам коефіцієнтів довжини в напрямку осей координат $G_{11} = \Lambda_1^2,\ G_{22} = \Lambda_2^2,\ G_{33} = \Lambda_3^2$, тому

$$I_{1e} = \left(\Lambda_1^2 - 1 + \Lambda_2^2 - 1 + \Lambda_3^2 - 1\right)/2.$$

Задача 2.11.38. У деякій точці заданий тензор деформацій

$$\|\varepsilon_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Визначити відносне видовження в напрямку

$$\vec{n} = \vec{e}_1/2 - \vec{e}_2/2 + \vec{e}_3/\sqrt{2}$$

і зміну кута між напрямками $\vec{n}$ та

$$\vec{m} = -\vec{e}_1/2 + \vec{e}_2/2 + \vec{e}_3/\sqrt{2}.$$

Знайти головні деформації і головні осі. Побудувати круги Мора для деформованого стану та знайти величину максимальної деформації зсуву. Перевірити результат аналітично. Для заданого тензора ε_{ij} визначити девіатор s_{ij} та обчислити його головні значення.

Розв'язок

Два заданих вектори $\vec{n}$, $\vec{m}$ взаємно ортогональні, оскільки їх скалярний добуток дорівнює нулю. До того ж вони мають одиничну довжину, тому можуть бути вибрані базисними векторами нової системи координат

$$\vec{e}\,'_1 = \vec{n}, \;\; \vec{e}\,'_2 = \vec{m}.$$

За третій базисний вектор можна вибрати векторний добуток

$$\vec{e}\,'_3 = \vec{n} \times \vec{m}.$$

Матриця перетворення системи координат $\|\alpha_{ij}\|$

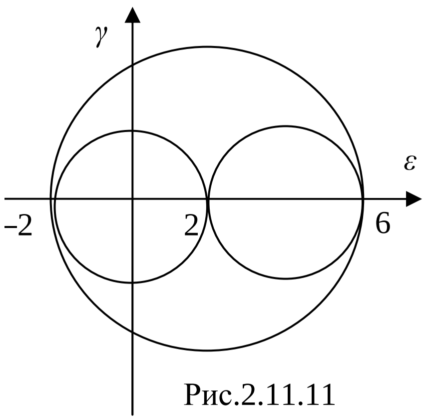

Рис.2.11.11

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для визначення відносного видовження в напрямку $\vec{n}$ і кута між $\vec{n}$ і $\vec{m}$ достатньо знайти компоненти тензора деформацій ε'_{11}, ε'_{12} в новій системі за формулами

$$\varepsilon'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jm}\varepsilon_{km},$$

$$\varepsilon'_{11} = \alpha_{1k}\alpha_{1m}\varepsilon_{km} = \alpha_{11}^2\varepsilon_{11} + \alpha_{12}^2\varepsilon_{22} + \alpha_{13}^2\varepsilon_{33} +$$
$$+ 2\alpha_{11}\alpha_{12}\varepsilon_{12} + 2\alpha_{11}\alpha_{13}\varepsilon_{13} + 2\alpha_{12}\alpha_{13}\varepsilon_{23} = 6,$$

$$\varepsilon'_{12} = \alpha_{1k}\alpha_{2m}\varepsilon_{km} = 0.$$

Щоб звести тензор до головних осей, знаходимо інваріанти $I_1 = 6,\ \ I_2 = -4,\ \ I_3 = -24$. Складаємо характеристичне рівняння

$$\varepsilon^3 - 6\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 24 = 0,$$

знаходимо його корені $\hat{\varepsilon}_1 = 6,\ \hat{\varepsilon}_2 = 2,\ \hat{\varepsilon}_3 = -2$. Тензор деформацій в головних осях має вигляд

$$\|\hat{\varepsilon}_{ij}\| = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Проекції базисних векторів головних осей знаходимо з однорідної системи рівнянь $(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\hat{\varepsilon}_k)n_j = 0$ за умови $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. Результат показує, що головні осі збігаються з $\vec{e}'_1 = \vec{n},\ \vec{e}'_2 = \vec{m}$, $\vec{e}'_3 = \vec{n} \times \vec{m}$. Обчислення пропонується виконати читачеві. На знайдених головних деформаціях будуємо круги Мора. З рис.2.11.11 видно, що радіус найбільшого круга дорівнює 4, тому максимальна деформація відносного зсуву $\gamma_{\max} = 4$. Знаходимо кульовий тензор

$$p_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_{kk}/3 = 2,\ \ p = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо девіатор $s = \varepsilon - p$

$$\|s_{ij}\| = \begin{pmatrix} -1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & -1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix},$$

його інваріанти $I_1 = 0,\ \ I_2 = -16,\ I_3 = 0$.

Характерістичне рівняння $s^3 - 16s = 0$, його корені дорівнюють $s_1 = 4,\ \ s_2 = 0,\ \ s_3 = -4$, тому в головних осях девіатор має вигляд

$$\|\hat{s}_{ij}\| = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.11.39. Дано поле переміщень

$$u_1 = 3x_1x_2^2, \quad u_2 = 2x_3x_1, \quad u_3 = x_3^2 - x_1x_2.$$

Визначити тензор ε_{ij}.

Перевірити, чи виконуються умови сумісності, якщо

$$\|\varepsilon_{ij}\| = \begin{pmatrix} 3\xi_2^2 & 3\xi_1\xi_2+\xi_3 & -\xi_2/2 \\ 3\xi_1\xi_2+\xi_3 & 0 & \xi_1/2 \\ -\xi_2/2 & \xi_1/2 & 2\xi_3 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.11.40. Для дельта-розетки деформацій, яка є рівностороннім трикутником, знайдені відносні видовження, величини яких $\varepsilon_{11} = 2\cdot10^{-4}$, $\varepsilon'_{11} = 1\cdot10^{-4}$, $\varepsilon''_{11} = 1{,}5\cdot10^{-4}$. Визначити ε_{12} та ε_{22} в цій точці.

Розв'язок

Відносно початкової системи координат осі нових систем повернуті відповідно на 60^0 і 120^0. Їм відповідають матриці перетворення

$$\|\alpha_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \|\alpha_{ij}\| = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

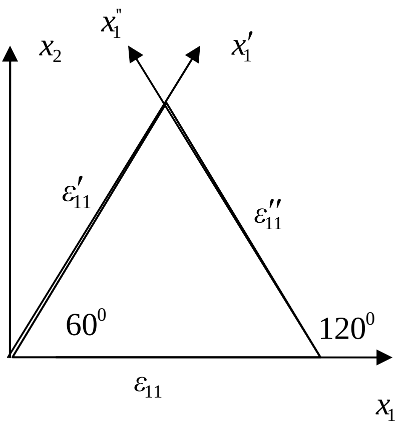

Рис.2.11.12

Використовуючи формули перетворення компонент тензора $\varepsilon'_{11} = \alpha_{11}^2\varepsilon_{11} + 2\alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{12}^2\varepsilon_{22}$, одержуємо два рівняння відносно ε_{12}, ε_{22}, з яких визначаємо

$$\varepsilon_{22} = 1\cdot10^{-4},$$

$$\varepsilon_{12} = -\left(1\big/2\sqrt{3}\right)\cdot10^{-4}.$$

Задача 2.11.41. Для поля переміщень

$$\xi_1 = x_1 + Ax_3, \quad \xi_2 = x_2, \quad \xi_3 = x_3 - Ax_1$$

обчислити зміну об'єму та показати, що вона дорівнює нулю, якщо стала A дуже мала.

Розв'язок

Знаходимо градієнт деформацій

$$F = \left\| \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & A \\ 0 & 1 & 0 \\ -A & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо тензор деформацій Гріна $G = F'F$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -A \\ 0 & 1 & 0 \\ A & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & A \\ 0 & 1 & 0 \\ -A & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+A^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+A^2 \end{pmatrix}.$$

В цьому випадку тензор є діагональним і його копоненти дорівнюють квадратам коефіцієнтів довжини. Тензор коефіцієнтів довжини

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{1+A^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1+A^2} \end{pmatrix},$$

а об'єм в деформованому стані $V = 1 + A^2$. Якщо величина A є малою, то величину A^2 в порівнянні з одиницею можна відкинути. Тоді $V = 1$, а це означає, що об'єм тіла не змінюється.

Задача 2.11.42. Визначити деформований стан прямокутної плити при циліндричному згині, який відбувається при перетворенні

$$\xi_1 = C(x_1)\cos\frac{ax_2}{b}, \quad \xi_1 = C(x_1)\sin\frac{ax_2}{b}, \; \xi_3 = ex_3,$$

за допомогою якого область паралелепіпеда

$$x_1^0 \le x_1 \le x_1^0 + h, \; -b \le x_2 \le b, \; -l \le x_3 \le l,$$

яка є прямокутною плитою товщина якої h, ширина $2b$ і довжина $2l$ (рис.2.11.13), деформується в циліндричну панель, тобто в область, обмежену поверхнями коаксіальних циліндрів з радіусами

$$r_0 = C\big(x_1^0\big), \; r_1 = C\big(x_1^0 + h\big), \tag{2.11.1}$$

площинами $\xi_2 = \pm\xi_1 tga$ і площинами $\xi_3 = \pm el$. Вважається, що деформація відбувається зі збереженням об'єму матеріалу.

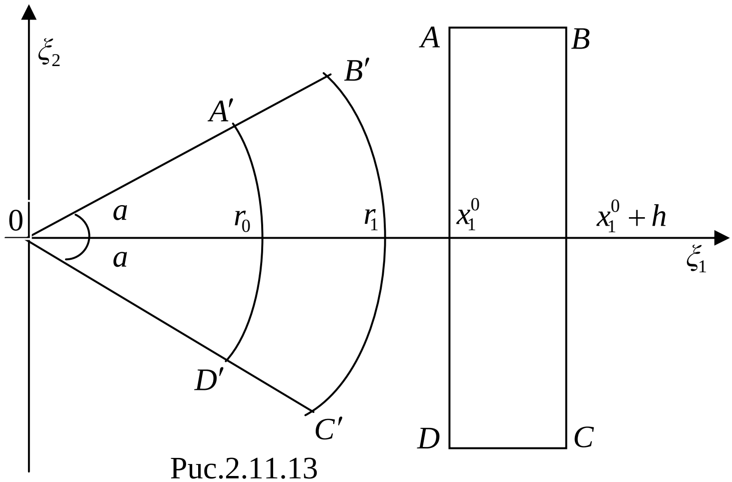

Рис.2.11.13

Знаходимо матеріальний градієнт деформації

$$F = \|\partial \xi_i / \partial x_j\|,$$

$$F = \begin{pmatrix} C'(x_1)\cos\frac{ax_2}{b} & -C(x_1)\frac{a}{b}\sin\frac{ax_2}{b} & 0 \\ C'(x_1)\sin\frac{ax_2}{b} & C(x_1)\frac{a}{b}\cos\frac{ax_2}{b} & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix},$$

і знаходимо тензор деформацій Гріна $G = F'F$,
де F'—транспонований матеріальний градієнт деформацій

$$G = \begin{pmatrix} C'(x_1)\cos\frac{ax_2}{b} & C'(x_1)\sin\frac{ax_2}{b} & 0 \\ -C(x_1)\frac{a}{b}\sin\frac{ax_2}{b} & C(x_1)\frac{a}{b}\cos\frac{ax_2}{b} & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} C'(x_1)\cos\frac{ax_2}{b} & -C(x_1)\frac{a}{b}\sin\frac{ax_2}{b} & 0 \\ C'(x_1)\sin\frac{ax_2}{b} & C(x_1)\frac{a}{b}\cos\frac{ax_2}{b} & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} C'^2(x_1) & 0 & 0 \\ 0 & C^2(x_1)\frac{a^2}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}. \qquad (2.11.2)$$

Оскільки визначник тензора деформацій Гріна дорівнює $|G| = V^2$, де V—об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах локального базису в деформованому стані, то

$$V = C'(x_1)C(x_1)\frac{a}{b}e.$$

У початковому стані об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах локального базису, $V_0 = 1$. За умовою задачі деформація відбувається зі збереженням об'єму матеріалу, тому $C'(x_1)C(x_1)\frac{a}{b}e = 1$, звідки $C'(x_1)C(x_1) = \frac{b}{ae}$. Інтегруючи, знаходимо $C(x_1) = \sqrt{\frac{2b}{ae} + d}$, де d—стала інтегрування, яка визначається з умов (2.11.1). Тоді

$$C(x_1) = \sqrt{\frac{2b}{ae}\left(x_1 - x_1^0\right) + r_0^2}, \quad \frac{2b}{ae}h = r_1^2 - r_0^2, \tag{2.11.3}$$

$$C(x_1) = \sqrt{\frac{r_1^2 - r_0^2}{h}\left(x_1 - x_1^0\right) + r_0^2}. \tag{2.11.4}$$

Вважається, що в плиті, яка згинається, існує площина $x_1 = x_1^*$ така, що відрізки прямих $-b \le x_2 \le b$ на ній, які були паралельними в початковому об'ємі V_0 осі x_2, зберігають довжину в деформованому об'ємі V. Оскільки довжина в напрямку x_2 у деформованому стані визначається компонентою тензора деформацій Гріна G_{22}, то

$$G_{22}(x_1^*) = \left[\frac{r_1^2 - r_0^2}{h}\left(x_1^* - x_1^0\right) + r_0^2\right]\frac{a^2}{b^2} = 1. \tag{2.11.5}$$

Тоді одержуємо вираз компонент тензора деформацій Гріна

$$G_{11} = \frac{1}{e^2}\left[\frac{r_1^2 - r_0^2}{r_0^2 h}\left(x_1^* - x_1^0\right) + 1\right] \Big/ \left[\frac{r_1^2 - r_0^2}{r_0^2 h}\left(x_1 - x_1^0\right) + 1\right],$$

$$G_{22} = \frac{1}{e^2 G_{11}}, \quad G_{33} = e^2. \tag{2.11.6}$$

Ураховуючи (2.11.3), співвідношення (2.11.5) можна записати у вигляді квадратного рівняння відносно $\left(r_1^2 - r_0^2\right)/r_0^2$, додатний розв'язок якого отримують за формулою

$$\frac{r_1^2 - r_0^2}{r_0^2} = \frac{2h}{r_0 e}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{x_1^* - x_1^0}{r_0 e}\right)^2} + \left(\frac{x_1^* - x_1^0}{r_0 e}\right)\right]. \tag{2.11.7}$$

З (2.11.7) і (2.11.3) одержуємо відношення висоти прямокутної смуги до довжини дуги поперечного перерізу внутрішнього циліндра

$$\frac{b}{r_0 a} = \sqrt{1 + \left(\frac{x_1^* - x_1^0}{r_0 e}\right)^2} + \left(\frac{x_1^* - x_1^0}{r_0 e}\right). \tag{2.11.8}$$

З одержаних формул випливає, що при $e \approx 1$ компоненти тензора деформацій Гріна відрізняються від одиниці доданками порядку h/b, досить малими для тонкої плити і тоді, коли переміщення досить великі.

Розділ 3

Термодинамічні основи та рівняння теорії пружності

3.1 Основні положення термодинаміки

Закони, що пов'язують напружений і деформований стани, можна одержати із законів термодинаміки оборотних і необоротних процесів. При дослідженні фізичних явищ як об'єкт дослідження виділяють тіло, що складається з великої кількості частинок, які утворюють фізичну систему. Решта, що не належить до вибраної системи, називається навколишнім середовищем.

Якщо система не взаємодіє з навколишнім середовищем, то вона називається *ізольованою.*

Якщо немає обміну масою системи з навколишнім середовищем, то вона називається *замкненою.*

Термодинамічний стан системи визначається макроскопічними величинами, які називаються *параметрами*, або *змінними стану.* Вони поділяють на зовнішні та внутрішні. Зовнішні параметри—це величини, що визначають стан зовнішнього середовища і впливають на стан системи; внутрішні—визначають стан системи, до них відносяться: густина, тиск, хімічний склад, температура.

Якщо якийсь параметр виражений як однозначна функція останніх параметрів, то така функціональна залежність називається рівнянням стану, а змінна, яка визначається цим рівнянням – функцією стану.

Характеристична функція—це функція стану системи, за допомогою якої та її похідних можна визначити термодинамічні властивості системи.

Термодинамічний потенціал—це характеристична функція, зменшення якої в оборотному процесі, що відбувається за незмінних значень будь-якої пари термодинамічних параметрів, дорівнює повній роботі, виконаній системою, за виключенням роботи проти зовнішніх сил.

Якщо як незалежні змінні вибрати наступні пари, то їм будуть відповідати потенціали:

1) незалежні — питома ентропія S і деформації ε_{ij} — відповідним термодинамічним потенціалом є внутрішня енергія U;

2) незалежні — питома ентропія S і напруження σ_{ij} — термодинамічним потенціалом є ентальпія H;

3) незалежні — температура T і деформації ε_{ij} — термодинамічним потенціалом є вільна енергія F

$$F = U - TS;$$

4) незалежні — температура T і напруження σ_{ij} — термодинамічним потенціалом є потенціал Гіббса G:

$$G = F - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}.$$

Існування термодинамічних потенціалів випливає з першого і другого законів термодинаміки.

Перший закон термодинаміки — зміна внутрішньої енергії відбувається за рахунок механічної роботи і підведення теплоти:

$$\delta U = dL + dQ, \tag{3.1.1}$$

де δU—зміна внутрішньої енергії; dL—робота, що виконується над системою; dQ-—кількість теплоти, підведеної до системи.

Другий закон термодинаміки — зміна ентропії може відбуватися за рахунок обміну з зовнішнім середовищем і за рахунок її утворення в системі:

$$dP = dP_e + dP_i, \tag{3.1.2}$$

де dP—зміна ентропії всього тіла; dP_e-–приріст ентропії за рахунок взаємодії з зовнішнім середовищем; dP_i—приріст ентропії за рахунок її утворення в системі. Емпіричні данні та експериментальні дослідження показують що

$$dP = \frac{dQ}{T}, \;\; dP \geq 0. \tag{3.1.3}$$

Знак "дорівнює" показує, що процес є оборотним, а знак "більше" — необоротним.

3.2 Закон збереження енергії деформованого тіла

Розглянемо спочатку закон збереження механічної енергії. Припустимо, що тіло не обмінюється теплом з навколишнім середовищем, тобто процес адіабатний. Запишемо рівняння руху у вигляді

$$\sigma_{ij},_j + X_i - \rho \dot{\mathrm{v}}_i = 0.$$

Цей вираз помножимо на швидкість переміщення $\mathrm{v}_i = \partial u_i / \partial t$ і проінтегруємо по об'єму тіла

$$\int_V (\sigma_{ij},_j + X_i - \rho \dot{\mathrm{v}}_i)\mathrm{v}_i dV = 0. \tag{3.2.1}$$

Рівняння (3.2.1) перепишемо у вигляді

$$\int_V [(\sigma_{ij}\mathrm{v}_i),_j - \sigma_{ij}\mathrm{v}_{i,j} + X_i\mathrm{v}_i - \rho\dot{\mathrm{v}}_i\mathrm{v}_i]dV = 0. \tag{3.2.2}$$

Перший член цього рівняння перетворимо за формулою Гаусса—Остроградського:

$$\int_V (\sigma_{ij}\mathrm{v}_i),_j dV = \int_A \sigma_{ij}\mathrm{v}_i n_j dA = \int_A p_i \mathrm{v}_i dA, \tag{3.2.3}$$

де p_i—вектор сил на поверхні тіла; n_j—проекція одиничної нормалі до поверхні тіла A.

Беручи до уваги (3.2.3), формулу (3.2.2) запишемо у вигляді

$$\int_V X_i \mathrm{v}_i dV + \int_A p_i \mathrm{v}_i dA = \int_V \sigma_{ij}\mathrm{v}_{i,j} dV + \rho \int_V \mathrm{v}_i \dot{\mathrm{v}}_i dV. \tag{3.2.4}$$

Використовуючи $\mathrm{v}_{i},_{j}= \dot{u}_{i},_{j}= \dot{\varepsilon}_{ij}+\dot{\omega}_{ij}$, перший інтеграл справа можна перетворити

$$\int_V \sigma_{ij}\mathrm{v}_{i,j}dV = \int_V \sigma_{ij}(\dot{\varepsilon}_{ij}+\dot{\omega}_{ij})dV = \int_V \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}dV. \qquad (3.2.5)$$

Другий доданок дорівнює нулю, бо σ_{ij}—симетричний тензор, а ω_{ij}—кососиметричний, тому їх згортка—підінтегральна функція $\sigma_{ij}\dot{\omega}_{ij}=0$, і рівняння (3.2.4) набирає вигляду

$$\int_V X_i\mathrm{v}_i dV + \int_A p_i\mathrm{v}_i dA = \int_V \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}dV + \rho\int_V \mathrm{v}_i\dot{\mathrm{v}}_i dV. \qquad (3.2.6)$$

Ліва сторона рівняння (3.2.6)

$$\dot{L} = \int_V X_i\mathrm{v}_i dV + \int_A p_i\mathrm{v}_i dA \qquad (3.2.7)$$

є механічною потужністю, яка дорівнює сумі потужностей об'ємних сил і сил, прикладених до поверхні тіла. Член $\rho\int_V \mathrm{v}_i\dot{\mathrm{v}}_i dV$ є швидкість зміни кінетичної енергії $K=\frac{1}{2}\rho\int_V \mathrm{v}_i^2 dV$

$$\frac{dK}{dt} = \rho\int_V \dot{\mathrm{v}}_i\mathrm{v}_i dV. \qquad (3.2.8)$$

Перший член у правій частині (3.2.6) відповідно до першого закону термодинаміки є швидкістю зміни внутрішньої енергії

$$\frac{dU}{dt} = \int_V \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}dV. \qquad (3.2.9)$$

Тоді закон збереження механічної енергії матиме вигляд

$$\dot{L} = \frac{d}{dt}(K+U). \qquad (3.2.10)$$

Рівняння (3.2.10) отримане за умови, що розглядається адіабатний процес. Права частина є швидкість зміни повної енергії, яка складається зі швидкості зміни кінетичної енергії K та швидкості зміни внутрішньої енергії U.

Для довільного термодинамічного процесу це рівняння треба розширити включенням відповідно до першого закону термодинаміки потужності немеханічних сил, яка є швидкість зміни кількості теплоти $\dot{Q}$, підведеної до системи. Тоді рівняння (3.2.10) набере вигляду

$$\frac{d}{dt}(K+U) = \dot{L} + \dot{Q}. \tag{3.2.11}$$

Немеханічна потужність $\dot{Q}$ зумовлена тепловим потоком $\vec{q}$

$$\dot{Q} = -\int_A q_i n_i dA = -\int_V q_{i,i} dV. \tag{3.2.12}$$

Використовуючи одержані вище залежності, рівняння (3.2.11) можна записати у вигляді

$$\int_V \rho \mathrm{v}_i \dot{\mathrm{v}}_i dV + \int_V \dot{U} dV =$$

$$= \int_V X_i \mathrm{v}_i dV + \int_A p_i \mathrm{v}_i dA - \int_V q_i,_i dV, \tag{3.2.13}$$

де U-–питома внутрішня енергія тіла.

З рівняння (3.2.13) можна знайти швидкість зміни внутрішньої енергії:

$$\int_V \dot{U} dV = \int_V (X_i - \rho \dot{\mathrm{v}}_i)\mathrm{v}_i dV + \int_A p_i \mathrm{v}_i dA - \int_V q_{i,i} dV. \tag{3.2.14}$$

Замінюючи інтеграл по поверхні інтегралом по об'єму та беручи до уваги рівняння руху, одержимо

$$\int_V \left(\dot{U} - \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + q_{i,i}\right) dV = 0.$$

Оскільки об'єм довільний, то необхідною і достатньою умовою рівності інтеграла нулю є рівність нулю підінтегральної функції, з чого випливає, що

$$\dot{U} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - q_{i,i}. \tag{3.2.15}$$

Одержаний вираз (3.2.15) і є законом збереження енергії у диференціальному вигляді.

3.3 Баланс ентропії

Згідно з другим законом термодинаміки ентропія, як і внутрішня енергія, є функцією внутрішнього стану системи і не залежить від шляху термодинамічного процесу. Зв'язок між ентропією і температурою має вигляд

$$dP = \frac{dQ}{T}, \tag{3.3.1}$$

звідки

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{T}\frac{dQ}{dt} = \frac{\dot{Q}}{T} = -\int_V \frac{q_{i,i}}{T} dV.$$

Якщо ентропію тіла виразити через ентропію одиниці об'єму S, то

$$\frac{dP}{dt} = \int_V \frac{dS}{dt} dV = \int_V \dot{S} dV = -\int_V \frac{q_{i,i}}{T} dV. \tag{3.3.2}$$

Праву частину (3.3.2) подамо у такому вигляді, щоб можна було відділити інтеграл по поверхні і по об'єму. Оскільки

$$\frac{q_{i,i}}{T} = \left(\frac{q_i}{T}\right)_{,i} + \frac{q_i T_{,i}}{T^2},$$

$$\int_V \dot{S} dV = -\int_V \left(\frac{q_i}{T}\right)_{,i} dV - \int_V \frac{q_i T_{,i}}{T^2} dV,$$

$$\int_V \dot{S} dV = -\int_A \frac{q_i n_i}{T} dA - \int_V \frac{q_i T_{,i}}{T^2} dV. \tag{3.3.3}$$

Перший член справа визначає швидкість зміни ентропії, зумовлену обміном з навколишнім середовищем, а другий—має характер джерела ентропії, він визначає швидкість вироблення ентропії у тілі. Оскільки

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dP_e}{dt} + \frac{dP_i}{dt}$$

$$\text{і} \quad \frac{dP_i}{dt} \geq 0, \quad \text{то} \quad \frac{dP_e}{dt} = -\int_S \frac{q_i n_i}{T} dS,$$

$$\frac{dP_i}{dt} = -\int_V \frac{q_i T_{,i}}{T^2} dV \quad \text{і} \quad -\int_V \frac{q_i T_{,i}}{T^2} dV \geq 0. \tag{3.3.4}$$

Умова (3.3.4) і є критерієм того, що термодинамічний процес необоротний. Скористаємося законом збереження енергії $\dot{U} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - q_{i,i}$ і співвідношенням

$$\dot{S} = -\frac{q_{i,i}}{T}.$$

Одержимо

$$\dot{U} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + T\dot{S}. \tag{3.3.5}$$

З чотирьох параметрів σ_{ij}, ε_{ij}, T, S тільки два незалежні. Якщо внутрішня енергія виражена як функція ε_{ij} і S, тобто $U = U(\varepsilon_{ij}, S)$, маємо

$$\dot{U} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial U}{\partial S}\dot{S}. \tag{3.3.6}$$

Порівнюючи (3.3.5) з (3.3.6), знаходимо

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad T = \frac{\partial U}{\partial S}. \tag{3.3.7}$$

3.4 Закон теплопровідності Фур'є

Закон теплопровідності Фур'є встановлює, що тепловий потік у анізотропному пружному тілі пропорційний градієнту температури:

$$q_i = -\lambda_{ij} T_{,j}.$$

Використовуючи те, що $T\dot{S} = -q_{i,i}$, маємо

$$T\dot{S} = \lambda_{ij} T_{i,j}.$$

3.5 Перша форма визначальних рівнянь

Якщо за незалежні параметри вибрані деформації ε_{ij} і температура T, то відповідним термодинамічним потенціалом є вільна енергія $F(\varepsilon_{ij}, T)$. Теорія термодинамічних процесів дає зв'язок між вільною енергією $F(\varepsilon_{ij}, T)$, питомою внутрішньою енергією U, температурою T та питомою ентропією S у вигляді

$$F = U - ST. \tag{3.5.1}$$

Вільна енергія, як і внутрішня енергія, є однозначною функцією стану, тому при нескінченно малих змінах стану пружного тіла dF є повним диференціалом. Якщо як незалежні параметри вибрати тензор деформацій та ентропію і використати одержану вище залежність

$$dU = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + TdS, \tag{3.5.2}$$

то з (3.5.1) випливає, що

$$dF = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - SdT, \tag{3.5.3}$$

звідки внаслідок того, що dF повний диференціал

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial F}{\partial T} dT,$$

маємо

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}, \quad \frac{\partial F}{\partial T} = -S. \tag{3.5.4}$$

Таким чином, знання вільної енергії дає можливість пов'язати тензор напружень з тензором деформацій та температурою.

Розкладемо вільну енергію в ряд Тейлора, взявши за початковий натуральний стан пружного тіла, за умови, що деформації ε_{ij} малі і зміна температури $T - T_0$ також мала порівняно з початковою T_0. Оскільки вільна енергія і ентропія величини адитивні й початок відліку може бути взяте довільно, то вважається, що в натуральному стані вільна енергія $F(0,T_0)$, ентропія $S(0,T_0)$, напруження і деформації дорівнюють нулю. В ряді Тейлора утримаємо члени не вище другого порядку, тоді

$$F(\varepsilon_{ij},T) = F(0,T_0) + \frac{\partial F(0,T_0)}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial F(0,T_0)}{\partial T}(T - T_0) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 F(0,T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + 2\frac{\partial^2 F(0,T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \varepsilon_{ij}(T - T_0) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 F(0,T_0)}{\partial T^2}(T - T_0)^2\right] + \ldots$$

Перший член є вільною енергією у початковому стані, коефіцієнт $\frac{\partial F}{\partial T}$ третього члена—є ентропією у початковому стані, внаслідок чого вони дорівнюють нулю. Коефіцієнт у другому члені $\frac{\partial F(0,T_0)}{\partial \varepsilon_{ij}}$ також дорівнює нулю, оскільки напруження в початковому стані

σ_{ij} дорівнюють нулю. Позначимо

$$\theta = T - T_0, \quad \frac{\partial^2 F(0,T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = c_{ijkl},$$

$$\frac{\partial^2 F(0,T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} = -\beta_{ij}, \quad \frac{\partial^2 F(0,T_0)}{\partial T^2}(T - T_0)^2 = F_0(\theta),$$

де θ—зміна температури.

Тоді одержане співвідношення запишеться у вигляді

$$F(\varepsilon_{ij},T) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \varepsilon_{ij} \theta + F_0(\theta). \tag{3.5.5}$$

Використовуючи одержані вище співвідношення

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}, \quad \frac{\partial F}{\partial T} = -S,$$

одержимо

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \theta, \tag{3.5.6}$$

$$S = \beta_{ij} \varepsilon_{ij} - \frac{\partial F_0(T)}{\partial T}. \tag{3.5.7}$$

Ці співвідношення є визначальними і перше з них (3.5.6) називається законом Дюамеля—Неймана. Розглянемо другий член у (3.5.7). Оскільки ентропія S є однозначною функцією стану $S = S(\varepsilon_{ij},T)$, то

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T d\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_\varepsilon dT, \tag{3.5.8}$$

з другого боку, з (3.5.6) маємо

$$dS = \beta_{ij} d\varepsilon_{ij} - \frac{\partial^2 F_0(0)}{\partial T^2} dT,$$

з (3.5.7) та (3.5.8) випливає, що

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_\varepsilon = -\frac{\partial^2 F_0(0)}{\partial T^2},$$

або

$$T \frac{\partial S}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 F_0(0)}{\partial T^2}.$$

Величина $T\frac{\partial S}{\partial T}$ є питомою теплоємністю при сталій деформації і позначається C_ε. Зміна температури θ вважається малою порівняно з T_0, тобто $\frac{\theta}{T_0} << 1$. Таким чином, з (3.5.6) формула для ентропії набере вигляду

$$S = \beta_{ij}\varepsilon_{ij} + C_\varepsilon \ln\frac{T}{T_0},$$

$$S = \beta_{ij}\varepsilon_{ij} + C_\varepsilon \ln\left(1 + \frac{\theta}{T_0}\right). \tag{3.5.9}$$

Якщо розкласти останній член в ряд і утримати тільки лінійні члени, то одержимо формули для вільної енергії і ентропії:

$$F = \frac{1}{2}c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\varepsilon_{ij}\theta + \frac{1}{2}\frac{C_\varepsilon}{T_0}\theta^2, \tag{3.5.10}$$

$$S = \beta_{ij}\varepsilon_{ij} + C_\varepsilon\frac{\theta}{T_0}, \tag{3.5.11}$$

які дійсні за умови малих змін температури. У формулі для вільної енергії перший член має суто деформаційний характер, останній—суто температурний, а другий—змішаний і визначає взаємодію деформації та температури. У законі Дюамеля—Неймана величини c_{ijkl} є компонентами тензора четвертого рангу, який характеризує механічні властивості матеріалу і має 81 компоненту, але внаслідок симетрії

$$c_{ijkl} = c_{klij},\ c_{ijkl} = c_{jikl},\ c_{ijkl} = c_{ijlk} \tag{3.5.12}$$

тензор механічних констант має тільки 21 незалежну компоненту, а тензор $\beta_{ij} = \beta_{ji}$, тільки шість незалежних компонент. У випадку ізотермічного процесу маємо

$$F = \frac{1}{2}c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl},\ \sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl},\ S = \beta_{ij}\varepsilon_{ij}. \tag{3.5.13}$$

3.6 Друга форма визначальних рівнянь

Другою формою визначальних рівнянь називаються рівняння, які визначають стан деформованого тіла, коли незалежними змінними є напруження та температура. Відповідним термодинамічним потенціалом є потенціал Гіббса, який є функцією стану і пов'язаний з внутрішньою енергією

$$G = F - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}, \tag{3.6.1}$$

звідки

$$dG = dF - \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}d\sigma_{ij}.$$

Використовуючи те, що

$$dF = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} - SdT,$$

одержимо

$$dG = -\varepsilon_{ij}d\sigma_{ij} - SdT.$$

З іншого боку, dG є повним диференціалом тому

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}\right)_T d\sigma_{ij} + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_\sigma dT.$$

Порівнюючи два останні співвідношення, маємо

$$\varepsilon_{ij} = -\left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}\right)_T, \quad S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_\sigma. \tag{3.6.2}$$

Розкладаємо термодинамічний потенціал Гіббса у ряд Тейлора

$$-G(\sigma_{ij},T) = G(0,T_0) + \frac{\partial G(0,T_0)}{\partial \sigma_{ij}}\sigma_{ij} + \frac{\partial G(0,T_0)}{\partial T}(T - T_0) +$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 G(0,T_0)}{\partial \sigma_{ij}\partial \sigma_{kl}}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + 2\frac{\partial^2 G(0,T_0)}{\partial \sigma_{ij}\partial T}\sigma_{ij}(T - T_0) +\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 G(0,T_0)}{\partial T^2}(T - T_0)^2\right] + \ldots$$

і використовуємо такі ж самі припущення, як і для вільної енергії. Перший член є термодинамічним потенціалом Гіббса, який у початковому стані може бути прирівняний до нуля $G(0,T_0) = 0$. Коефіцієнт $\frac{\partial G}{\partial T}$ третього члена є ентропією у початковому стані, внаслідок чого у початковому стані він може бути прирівняний до нуля. Коефіцієнт у другому члені $\frac{\partial G(0,T_0)}{\partial \sigma_{ij}}$ також дорівнює нулю, оскільки напруження в початковому стані σ_{ij} дорівнюють нулю. Позначимо

$$\theta = T - T_0,$$

де θ—зміна температури

$$\frac{\partial^2 G(0,T_0)}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}} = s_{ijkl}, \quad \frac{\partial^2 G(0,T_0)}{\partial\sigma_{ij}\partial T} = \alpha_{ij},$$

$$\frac{\partial^2 G(0,T_0)}{\partial T^2}(T-T_0)^2 = G_0(T).$$

Внаслідок попередніх припущень одержимо

$$-G = \frac{1}{2}s_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}+\alpha_{ij}\sigma_{ij}\theta+G_0(T), \tag{3.6.3}$$

звідки

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}\sigma_{kl}+\alpha_{ij}\theta \tag{3.6.4}$$

$$S = \alpha_{ij}\sigma_{ij} + \frac{\partial G_0(T)}{\partial T}, \tag{3.6.5}$$

де s_{ijkl}—тензор, який визначається механічними властивостями і має 21 незалежну компоненту; α_{ij}—компоненти тензора теплового розширення, які визначають величину температурної деформації $\alpha_{ij}\theta$ при відсутності напружень. Рівняння (3.6.4) є оберненими до рівнянь Дюамеля—Неймана

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\theta.$$

Визначимо ентропію, з (3.6.5) отримаємо

$$dS = \alpha_{ij}d\sigma_{ij} + \frac{\partial^2 G_0(T)}{\partial T^2}dT.$$

Оскільки ентропія є однозначною функцією стану, то

$$dS = \frac{\partial S}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij} + \frac{\partial S}{\partial T}dT.$$

Порівнюючи два останні співвідношення, маємо

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial S}{\partial\sigma_{ij}}, \quad \frac{\partial^2 G_0(T)}{\partial T^2} = \frac{\partial S}{\partial T}.$$

Оскільки

$$C_\sigma = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\sigma,$$

де C_σ—питома теплоємність при незмінних напруженнях, то

$$\frac{\partial G_0}{\partial T} = C_\sigma \ln\frac{T}{T_0}.$$

Вважаючи, що

$$\frac{\theta}{T_0} << 1,$$

одержимо

$$S \approx \alpha_{ij}\sigma_{ij} + C_\sigma \frac{\theta}{T_0}. \qquad (3.6.6)$$

Для ізотермічного процесу залежності спрощуються:

$$\begin{aligned} -G &= \frac{1}{2} s_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}, \\ \varepsilon_{ij} &= s_{ijkl}\sigma_{kl}, \qquad (3.6.7) \\ S &= \alpha_{ij}\sigma_{ij}. \end{aligned}$$

3.7 Рівняння теплопереносу

Скористаємося формулою, отриманою у попередньому параграфі, для визначення ентропії

$$S = \beta_{ij}\varepsilon_{ij} + C_\varepsilon \ln\frac{T}{T_0}.$$

Візьмемо похідну по часу і помножимо на температуру

$$T\dot{S} = T\beta_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + C_\varepsilon \dot{T}.$$

Раніше було одержано

$$T\dot{S} = \lambda_{ij} T_{,ij}.$$

З цих двох рівнянь одержимо нелінійне диференціальне рівняння, яке принципово дає можливість визначити розподіл температур

$$\lambda_{ij} T_{,ij} - T\beta_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - C_\varepsilon \dot{T} = 0. \qquad (3.7.1)$$

Одержане рівняння (3.7.1) нелінійне. Нелінійність заходить у другий член, який вказує на зв'язок поля деформацій і поля температур. Якщо вважати, що зміни температури малі, і замінити T на

T_0, то це рівняння лінеаризується

$$\lambda_{ij}T,_{ij}-T_0\beta_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}-C_\varepsilon\dot{T}=0. \tag{3.7.2}$$

До одержаного рівняння (3.7.2) треба додати крайові умови, які відображають різні форми взаємодії тіла з зовнішнім середовищем:

1) на поверхні тіла задано температуру;
2) на поверхні тіла задано тепловий потік;
3) на поверхні тіла існує вільний теплообмін;
4) змішана задача;
5) теплообмін за рахунок випромінювання.

3.8 Рівняння термопружності

Якщо в рівняння рівноваги (руху)

$$\sigma_{ij},_j+X_i=\rho\ddot{u}_i, \tag{3.8.1}$$

підставити напруження σ_{ij} виражені через деформації за законом Дюамеля—Неймана

$$\sigma_{ij}=c_{ijkl}\varepsilon_{kl}-\beta_{ij}\theta, \tag{3.8.2}$$

і виразити деформації через переміщення

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_i,_j+u_j,_i),$$

то одержимо систему трьох рівнянь відносно переміщень

$$\frac{1}{2}c_{ijkl}(u_{k,l}+u_{l,k}),_j+X_i=\beta_{ij}\theta,_j+\rho\ddot{u}_i. \tag{3.8.3}$$

У рівняння входить температура, тому треба приєднати рівняння притоку теплоти:

$$\lambda_{ij}T,_{ij}-C_\varepsilon\dot{T}-T\beta_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}=-W. \tag{3.8.4}$$

Рівняння (3.8.3) і (3.8.4) пов'язані, оскільки сили, які діють на тіло деформують його, а деформації викликають зміну температури, що призводить до зміни напружень і деформацій. Для того щоб однозначно сформулювати задачу, треба до рівнянь (3.8.3) і (3.8.4) додати початкові і граничні умови. Граничні умови для рівняння (3.8.3) можуть бути задані у вигляді інтенсивності навантажень на поверхні тіла $\vec{p}$, переміщень $\vec{u}$ або можуть бути змішані. Граничні умови для рівняння (3.8.4) можна задати у вигляді температури θ на поверхні тіла, теплового потоку

$$\theta_{,i} = \theta_{,i}(x_1, x_2, x_3, t)$$

або умовами конвективного теплообміну:

$$\theta_{,i} + \alpha\theta = f_i(x_1, x_2, x_3, t).$$

Якщо фактори, що спричиняють рух тіла, змінюються повільно, то можна відкинути динамічні ефекти і розв'язувати задачу як квазістатичну. Тоді рівняння термопружності набудуть вигляду

$$\frac{1}{2} c_{ijkl}(u_{k,l} + u_{l,k}) + X_i = \beta_{ij}\theta_{,j}, \qquad (3.8.5)$$

$$\lambda_{ij} T_{i,j} = -W. \qquad (3.8.6)$$

Розв'язуючи рівняння (3.8.6), визначаємо поле температур, а потім, підставляючи його в рівняння (3.8.5), знаходимо поле переміщень.

3.9 Рівняння класичної теорії пружності

Якщо навантаження тіла змінюється дуже повільно, його температура не змінюється за рахунок теплообміну з зовнішнім середовищем, то процес деформування називається ізотермічним. В цьому випадку диференціальні рівняння суттєво спрощуються і набувають вигляду:

а) рівняння рівноваги

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i. \qquad (3.9.1)$$

б) фізичні рівняння —
з виразу для вільної енергії випадають температурні члени, тоді

$$W = F = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}, \qquad (3.9.2)$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \qquad (3.9.3)$$

де W—потенціальна енергія деформації. Так само, для термодинамічного потенціалу Гіббса

$$W = -G = \frac{1}{2} s_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}, \tag{3.9.4}$$

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl} \sigma_{ij}. \tag{3.9.5}$$

величина $W = -G$ також називається доповняльною роботою;

в) деформаційні рівняння $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$.

3.10 Матеріальні константи пружного тіла

Для спрощення дослідження структури тензора пружних сталих розглянемо рівняння стану при ізотермічному процесі. Тоді в рівняннях Дюамеля—Неймана випадають доданки, пов'язані з впливом температури, рівняння Дюамеля—Неймана перетворюються на закон Гука і набувають вигляду

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \tag{3.10.1}$$

а енергія деформації, або вільна енергія, виражена через деформації, має вигляд

$$F = W = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}.$$

Покажемо, що величини c_{ijkl} є компонентами тензора четвертого рангу. Для цього знайдемо вільну енергію у довільній новій системі координат:

$$F = \frac{1}{2} c'_{mnpq} {\varepsilon'}_{mn} {\varepsilon'}_{pq}.$$

Виразимо компоненти тензора деформацій у старій системі через компоненти у новій:

$$\varepsilon_{ij} = \alpha_{mi} \alpha_{nj} {\varepsilon'}_{mn},$$

$$\varepsilon_{kl} = \alpha_{pk} \alpha_{ql} {\varepsilon'}_{pq}.$$

Підставимо у вираз для вільної енергії у старій системі координат компоненти тензора деформацій у старій системі, виражені через компоненти тензора деформацій у новій:

$$F = c_{ijkl} \alpha_{mi} \alpha_{nj} {\varepsilon'}_{mn} \alpha_{pk} \alpha_{ql} {\varepsilon'}_{pq}.$$

Порівнюючи вирази для F у старій і новій системах, бачимо, що

$$c'_{mnpq} = \alpha_{mi}\alpha_{nj}\alpha_{pk}\alpha_{ql}c_{ijkl}. \tag{3.10.2}$$

Таким чином, коефіцієнти c_{ijkl} перетворюються за правилами перетворення тензора. Запишемо залежності (3.10.1) у розгорнутому вигляді

$$\sigma_{ij} = c_{ij11}\varepsilon_{11} + c_{ij22}\varepsilon_{22} + c_{ij33}\varepsilon_{33} + 2c_{ij23}\varepsilon_{23} + 2c_{ij31}\varepsilon_{31} + 2c_{ij12}\varepsilon_{12}. \tag{3.10.3}$$

Тензору пружних сталих, відповідає матриця, яка з урахуванням симетрії має вигляд

$$\hat{c} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1123} & c_{1113} & c_{1112} \\ & c_{2222} & c_{2233} & c_{2223} & c_{2213} & c_{2212} \\ & & c_{3333} & c_{3323} & c_{3313} & c_{3312} \\ & & & c_{2323} & c_{2313} & c_{2312} \\ & & & & c_{1313} & c_{1312} \\ & & & & & c_{1212} \end{pmatrix}. \tag{3.10.4}$$

Розглянемо тензор пружних констант за різних типів симетрії пружних властивостей тіла.

1. Тіло має одну площину симетрії.

Нехай це буде площина x_1x_2, тоді зміна напрямку осі x_3 не повинна впливати на величину напружень. Матриця перетворення системи координат у цьому випадку має вигляд

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Використовуємо загальні формули перетворення компонент тензора

$$c'_{mnpq} = \alpha_{mi}\alpha_{nj}\alpha_{pk}\alpha_{ql}c_{ijkl}. \tag{3.10.5}$$

Бачимо, що знак змінюють ті компоненти тензора пружних констант, які містять індекс 3 у непарній кількості. Матриця c_{mnpq}

матиме вигляд

$$\hat{c} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & -c_{1123} & -c_{1113} & c_{1112} \\ & c_{2222} & c_{2233} & -c_{2223} & -c_{2213} & c_{2212} \\ & & c_{3333} & -c_{3323} & -c_{3313} & c_{3312} \\ & & & c_{2323} & c_{2313} & -c_{2312} \\ & & & & c_{1313} & -c_{1312} \\ & & & & & c_{1212} \end{pmatrix}.$$

Оскільки напруження не змінюють свою величину при зміні напряму осі x_3, то ті компоненти, що змінюють знак, повинні дорівнювати нулю. Тоді матриця тензора пружних констант матиме вигляд

$$\hat{c} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & c_{1112} \\ & c_{2222} & c_{2233} & 0 & 0 & c_{2212} \\ & & c_{3333} & 0 & 0 & c_{3312} \\ & & & c_{2323} & c_{2313} & 0 \\ & & & & c_{1313} & 0 \\ & & & & & c_{1212} \end{pmatrix}. \tag{3.10.6}$$

Отримуємо 13 незалежних компонент.

2. Тіло має дві площини симетрії.

Нехай одна площина збігається з x_1x_3, а друга–з x_1x_2. Тоді зміна напрямку осей x_3 та x_2 не повинна впливати на величину напружень. Матриця перетворення має вигляд

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тоді за зміни напрямку осі x_2 коефіцієнти, які містять індекс 2, у непарній кількості змінюють знак. З цього випливає, що вони повинні дорівнювати нулю, тобто

$$c_{1112} = c_{2212} = c_{3312} = c_{2313} = 0$$

і матриця пружних констант матиме вигляд

$$\hat{c} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{2222} & c_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{2323} & 0 & 0 \\ & & & & c_{1313} & 0 \\ & & & & & c_{1212} \end{pmatrix}. \tag{3.10.7}$$

Матриця має 9 незалежних компонент.

3. Тіло має три взаємно ортогональні площини симетрії.

З попереднього випливає, що повинні зникнути члени, які містять індекс 1 у непарній кількості, але уже за наявності двох площин симетрії такі члени відсутні, тому структура тензора c_{ijkl} не змінюється. Таке тіло називається *ортотропним*.

4. Ізотропне тіло.

Якщо всі осі координат рівноправні, то таке тіло називається *ізотропним*. Ці вимоги можна задовольнити, взявши тензор c_{ijkl} у вигляді ізотропного тензора:

$$c_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b\delta_{il}\delta_{jk} + c\delta_{ik}\delta_{jl}.$$

У цьому випадку для будь-якого повороту системи координат матимемо

$$c'_{ijkl} = c_{ijkl}.$$

Підставивши цей тензор у співвідношення Дюамеля—Неймана, одержимо

$$\sigma_{ij} = a\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + b\varepsilon_{ij} + c\varepsilon_{ij}.$$

Використавши симетрію

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$$

та позначивши $2\mu = a + b$, $a = \lambda$, одержимо

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}. \tag{3.10.8}$$

Тобто пружні властивості ізотропного тіла визначаються двома константами λ і μ, які називаються сталими Ляме. Матриця тензора пружних констант матиме вигляд

$$\hat{c} = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \lambda & 0 & 0 \\ & & & & \lambda & 0 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}. \tag{3.10.9}$$

Сталі Ляме пов'язані з модулями пружності. Щоб знайти цей зв'язок, розглянемо лінійний напружений стан $\sigma_{11} \neq 0$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0.$$

Узагальнений закон Гука, з одного боку, дає

$$\sigma_{11} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11},$$

$$0 = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22},$$

$$0 = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33}$$

з другого боку,

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}.$$

Ураховуючи, що

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11},$$

маємо

$$\sigma_{11} = \lambda\varepsilon_{11}(1-2\nu) + 2\mu\varepsilon_{11},$$

$$0 = \lambda\varepsilon_{11}(1-2\nu) - 2\mu\nu\varepsilon_{11},$$

звідки

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, \qquad E = 2\mu(1+\nu). \tag{3.10.10}$$

Якщо розглянути чистий зсув

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0,$$

$\sigma_{12} \neq 0$, то за законом Гука

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}.$$

Ураховуючи, що $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$ і $\tau = G\gamma$, одержуємо

$$\mu = G. \tag{3.10.11}$$

Із (3.10.10) і (3.10.11) маємо

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \tag{3.10.12}$$

3.11 Задача статичної теорії пружності ізотропного тіла

Якщо процес навантаження дуже повільний, тобто такий, що за рахунок теплообміну з зовнішнім середовищем температура є сталою, то, враховуючи всі раніше одержані результати, маємо:

1.Фізичні рівняння

$$F = W = \frac{1}{2}c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}, \tag{3.11.1}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}, \tag{3.11.2}$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \tag{3.11.3}$$

Ці рівняння для ізотропного тіла можуть записані і використані у різних видах:

$$F = W = \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\lambda\varepsilon_{kk}\varepsilon_{mm}, \tag{3.11.4}$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}, \tag{3.11.5}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)}\left(\varepsilon_{ij}+\frac{\nu}{(1-2\nu)}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}\right), \tag{3.11.6}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{(1+\nu)}\delta_{ij}\sigma_{kk}\right), \tag{3.11.7}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}]. \tag{3.11.8}$$

2. Рівняння рівноваги

$$\sigma_{ij},_j + X_i = 0. \tag{3.11.9}$$

3.Співвідношення Коші

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_i,_j + u_j,_i). \tag{3.11.10}$$

Крім рівнянь, як для будь-якої крайової задачі, необхідно задати крайові (або граничні) умови. Вони залежать від взаємодії тіла з зовнішнім середовищем і бувають різні:

1) перша крайова задача—задані сили прикладені на поверхні тіла;

2) друга крайова задача—задані переміщення на поверхні тіла;

3) третя крайова задача—змішана, у якій задані сили прикладені на частині поверхні тіла A_σ, задані переміщення—на частині поверхні тіла A_ε. Частини поверхні повинні задовольняти умови $A_\sigma \bigcup A_\varepsilon = A$ і $A_\sigma \bigcap A_\varepsilon = 0$.

3.12 Рівняння теорії пружності в переміщеннях (рівняння Нав'є)

Поставлена вище задача теорії пружності має 15 невідомих—три компоненти вектора переміщень u_i, шість компонент тензора деформацій ε_{ij}, шість компонент тензора напружень σ_{ij} і має 15 рівнянь: три рівняння рівноваги, шість співвідношень Коші і шість рівнянь узагальненого закону Гука. Для зменшення кількості невідомих і, відповідної кількісті рівнянь всі невідомі виражаються через переміщення. Щоб одержати рівняння, в які входять тільки переміщення, напруження виражаються через похідні переміщень і одержані вирази підставляють у рівняння рівноваги

$$\sigma_{ij},_j + X_i = 0, \tag{3.12.1}$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}, \tag{3.12.2}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_i,_j + u_j,_i), \tag{3.12.3}$$

$$\sigma_{ij} = \mu(u_i,_j + u_j,_i) + \lambda u_{k,k}\delta_{ij},$$

$$\mu u_{i,jj} + \mu u_{j,ij} + \lambda \delta_{ij} u_{k,kl} + X_i = 0,$$
$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ij} + X_i = 0. \qquad (3.12.4)$$

Система трьох рівнянь відносно трьох компонент вектора переміщення (3.12.4) і є рівняннями Нав'є, який перший їх одержав. Їх також широко використовував Ляме, тому в літературі вони часто фігурують під його призвіщем.

Оскільки
$$\vec{e}_i u_{i,jj} = \vec{e}_i \nabla^2 u_i = \nabla^2 \vec{e}_i u_i = \nabla^2 \vec{u},$$
$$\vec{e}_i u_{j,ij} = \vec{e}_i u_{j,ji} = \vec{e}_i u_{j,j,i} = \vec{e}_i (\nabla \cdot \vec{u})_{,i} = \nabla\nabla \cdot \vec{u},$$
то одержані рівняння можна подати у векторній формі
$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla\nabla \cdot \vec{u} + \vec{X} = 0. \qquad (3.12.5)$$
Використовуючи відоме співвідношення
$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$$
та властивості оператора набла
$$\nabla = \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$
маємо
$$\nabla \times \nabla \times \left(\vec{u}\right) = (\nabla\nabla \cdot \vec{u}) - (\nabla \cdot \nabla)\vec{u}.$$
Виражаючи звідси $\nabla^2 \vec{u}$ і підставляючи у (3.12.5), одержимо рівняння Нав'є у вигляді
$$(\lambda + 2\mu) graddiv \vec{u} - \mu rotrot \vec{u} + \vec{X} = 0,$$
$$(\lambda + 2\mu) \nabla\nabla \cdot \vec{u} - \mu \nabla \times \nabla \times \vec{u} + \vec{X} = 0. \qquad (3.12.6)$$

Розглянемо крайові умови.

1. Якщо задані зовнішні навантаження, то крайові умови на границі області мають вигляд
$$p_i = \sigma_{ij} n_j.$$
Напруження виражаємо через деформації
$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk},$$

а деформації—через переміщення

$$p_i = \mu(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} n_j + \lambda\delta_{ij} u_{k,k} n_j.$$

Одержуємо крайові умови, накладені на переміщення:

$$p_i = \mu u_{i,j} n_j + \mu u_{j,i} n_i + \lambda u_{k,k} n_i. \qquad (3.12.7)$$

2. Якщо на границі задані переміщення, то

$$u_i = f_i(x_1,x_2,x_3).$$

З одержаних рівнянь видно, що рівняння Нав'є зручніше використовувати в тих випадках, у яких на границі задані переміщення.

Розглянемо деякі властивості вектора переміщень та відносної об'ємної деформації. Оскільки найбільші складності завжди виникають при пошуку загального розв'язку, то розглядається навантаження за відсутності об'ємних сил. Для цього візьмемо похідну від рівняння (3.12.4) по x_i, і скористаємось тим, що $u_{i,i} = \varepsilon_{ii}$, де ε_{ii}—перший інваріант тензора деформацій, який з фізичної точки зору дорівнює відносній деформації об'єму, яку позначимо ε. Для зручності рівняння Нав'є запишемо у вигляді

$$\mu\nabla^2 u_i + (\lambda+\mu)\varepsilon_{,i} + X_i = 0.$$

Якщо взяти похідну від (3.12.4) по x_k і згорнути, тобто прирівняти $k = i$, і взяти суму, то за відсутності об'ємних сил $X_i = 0$ одержимо

$$\mu\nabla^2 u_{i,i} + (\lambda+\mu)\varepsilon_{,ii} = 0.$$

Оскільки $u_{i,i} = \varepsilon_{ii} = \varepsilon$ і $\varepsilon_{,ii} = \nabla^2\varepsilon$ маємо:

$$(\lambda+2\mu)\nabla^2\varepsilon = 0.$$

Звідси випливає, що за відсутності об'ємних сил

$$\nabla^2\varepsilon = 0,$$

тобто відносна об'ємна деформація при $X_i = 0$ є гармонічною функцією. Скористаємося ще раз рівняннями Нав'є у вигляді

$$\mu\nabla^2 u_i + (\lambda+\mu)\varepsilon_{,i} = 0.$$

Візьмемо другу похідну

$$\mu\nabla^2 u_{i,km} + (\lambda+\mu)\varepsilon_{,ikm} = 0$$

і згорнемо по k і m. Оскільки $u_{i,mm} = \nabla^2 u_i$ і

$$\varepsilon_{,ikk} = \nabla^2 \varepsilon_{,i} = \left(\nabla^2 \varepsilon\right)_{,i} = 0,$$

за відсутності об'ємних сил одержимо

$$\mu \nabla^2 \nabla^2 u_i = \mu \nabla^4 u_i = 0,$$

тобто вектор переміщень бігармонічний.

3.13 Рівняння теорії пружності в напруженнях (рівняння Бельтрамі—Мітчела)

Для того щоб одержати рівняння в напруженнях, необхідно виразити деформації через напруження і одержані співвідношення підставити у рівняння сумісності деформацій. Можна також використати рівняння Нав'є. Розглянемо цей спосіб. Рівняння Нав'є:

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \varepsilon_{,i} + X_i = 0. \tag{3.13.1}$$

Якщо продиференціювати по x_j, то одержимо

$$\mu \nabla^2 u_{i,j} + (\lambda + \mu) \varepsilon_{,ij} + X_{i,j} = 0.$$

Змінимо індекси

$$\mu \nabla^2 u_{j,i} + (\lambda + \mu) \varepsilon_{,ji} + X_{j,i} = 0.$$

Складемо два останні рівняння і скористаємося співвідношенням Коші:

$$2\mu \nabla^2 \varepsilon_{ij} + 2(\lambda + \mu) \varepsilon_{,ij} + (X_{i,j} + X_{j,i}) = 0.$$

Виражаємо деформації через напруження за законом Гука

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right)$$

і підставляємо у попереднє рівняння. Для скорочення приймемо $\sigma_{kk} = \sigma$.

$$\nabla^2 \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \nabla^2 \sigma + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{,ij} + (X_{i,j} + X_{j,i}) = 0.$$

Спрощуємо одержане рівняння, згорнувши його за індексами

i та j. Звідси маємо

$$\nabla^2\sigma = -\frac{1+\nu}{1-\nu}X_{k,k}.$$

Ураховуючи це, одержимо рівняння Бельтрамі—Мітчела:

$$\nabla^2\sigma_{ij}+\frac{1}{(1+\nu)}\sigma_{,ij}= -(X_{i,j}+X_{j,i}) - \frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}X_{k,k}, \qquad (3.13.2)$$

а за відсутності об'ємних сил—

$$\nabla^2\sigma_{ij}+\frac{1}{(1+\nu)}\sigma_{,ij} = 0. \qquad (3.13.3)$$

Оскільки $\sigma = (2\mu+3\lambda)\varepsilon$, а ε—гармонічна функція, одержуємо

$$\nabla^2\sigma = 0.$$

Якщо до рівняння (3.13.3) застосувати оператор Лапласа, то одержимо

$$\nabla^4\sigma_{ij} = 0,$$

тобто за відсутності об'ємних сил напруження σ_{ij} є бігармонічними функціями.

3.14 Теорема про мінімум потенціальної енергії (теорема Лагранжа)

Задачу механіки можна поставити у двох видах. Перший—як задачу визначення руху механічної системи під впливом прикладених сил. Другий—як задачу знаходження такої траєкторії руху механічної системи, при якій робота досягає мінімальної величини. В першому випадку з математичної точки зору приходимо до задачі розв'язування системи диференціальних рівнянь, у другому—до варіаційної задачі.

Розглянемо тіло з об'ємом V, обмежене поверхнею A, що перебуває в стані рівноваги під дією об'ємних сил X_i, сил p_i, що діють на поверхні A_σ, та переміщень u_i на частині поверхні A_u, за умови $A_\sigma + A_u = A$. В тілі виникають переміщення u_i, деформації ε_{ij}, напруження σ_{ij}. Надамо переміщенням u_i віртуальні або можливі варіації δu_i, які повинні бути малими і не порушувати кінематичних зв'язків, накладених на тіло, тобто $\delta u_i = 0$ на A_u. Робота зовнішніх сил на можливих переміщеннях δu_i:

$$\delta L = \int_V X_i \delta u_i dV + \int_A p_i \delta u_i dA. \tag{3.14.1}$$

Використовуючи вираз $p_i = \sigma_{ij} n_j$, замінюємо інтеграл по поверхні інтегралом по об'єму:

$$\delta L = \int_V [X_i \delta u_i + (\sigma_{ij} \delta u_i),_j] dV,$$

або

$$\delta L = \int_V [X \delta u_i + (\sigma_{ij},_j \delta u_i + \sigma_{ij} \delta u_i,_j)] dV.$$

Використовуючи рівняння рівноваги, одержуємо

$$\delta L = \int_V \sigma_{ij} \delta u_i,_j dV.$$

Оскільки

$$\sigma_{ij} \delta u_i,_j = \sigma_{ij} (\delta \varepsilon_{ij} + \delta \omega_{ij}) = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij},$$

то

$$\int_V X_i \delta u_i dV + \int_A p_i \delta u_i dA = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV. \tag{3.14.2}$$

Ліва частина цього рівняння є віртуальною або можливою роботою зовнішніх сил, а права—внутрішніх. Якщо перенести усі його члени в одну сторону, то одержимо принцип віртуальних або можливих робіт

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_V X_i \delta u_i dV - \int_A p_i \delta u_i dA = 0,$$

з якого випливає, що сума робіт внутрішніх і зовнішніх сил на можливих переміщеннях дорівнює нулю. Причому він діє як для лінійних, так і для нелінійних співвідношень, бо зв'язок між напруженнями і деформаціями не використовувався.

Пряма теорема

Знайдемо зв'язок правої частини з роботою деформації:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}, \tag{3.14.3}$$

де w–питома потенціальна енергія деформації,

$$\int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV = \int_V \frac{\partial w}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}dV = \delta\int_V wdV = \delta W, \qquad (3.14.4)$$

$$\delta W = \int_V X_i\delta u_i dV + \int_A p_i\delta u_i dA, \qquad (3.14.5)$$

де W–потенціальна енергія деформації тіла.

Оскільки об'ємні сили X_i та сили, що діють на поверхні p_i, не варіюються, то

$$X_i\delta u_i = \delta(X_i u_i). \qquad (3.14.6)$$

Одержуємо

$$\delta\left(W - \int_V X_i\delta u_i dV - \int_A p_i\delta u_i dA\right) = 0. \qquad (3.14.7)$$

Вираз, що стоїть у дужках, позначається

$$\Pi_\varepsilon = W - \int_V X_i\delta u_i dV - \int_A p_i\delta u_i dA$$

і називається потенціальною енергією системи. Тоді з (3.14.7) маємо

$$\delta\Pi_\varepsilon = 0. \qquad (3.14.8)$$

Зі співвідношення (3.14.8) випливає, що потенціальна енергія системи має точку стаціонарності. Доведемо, що ця точка є мінімумом. Для цього порівняємо потенціальну енергію Π_ε для поля переміщень u_i з енергією Π'_ε для поля $u_i + \delta_i$:

$$\Pi'_\varepsilon - \Pi_\varepsilon = \int_V w(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij})dV - \int_V X_i\delta u_i dV -$$

$$- \int_A p_i\delta u_i dA - \int_V w(\varepsilon_{ij})dV.$$

Підінтегральний вираз розкладемо у ряд Тейлора і утримаємо члени другого порядку, одержимо

$$W(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij}) - W(\varepsilon_{ij}) = \int_V \left(\frac{\partial w}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl}\right)dV -$$

$$- \int_A p_i\delta u_i dA - \int_V X_i\delta_i dV =$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \frac{\partial^2 w}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl}dV.$$

Позначаємо

$$R = \frac{1}{2}\int_V \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl}dV$$

і, враховуючи (3.14.2), одержимо

$$\Pi'_\epsilon - \Pi_\epsilon = R = \frac{1}{2}\int_V \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl}dV.$$

Доведемо, що R–додатна величина. Використовуючи закон Гука, маємо

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon_{kl}}(2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{mm})\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl} = (2\mu\delta_{ik}\delta_{jl} +$$

$$+\lambda\delta_{ij}\delta_{kl})\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl},$$

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{ij} = 2\mu\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + \lambda\delta\varepsilon_{ii}\delta\varepsilon_{kk}.$$

Оскільки λ і μ додатні, то і R додатне. Внаслідок доведеного, можна сформулювати твердження: з усіх можливих полів переміщень тільки для поля дійсних переміщень потенціальна енергія досягає мінімуму.

Обернена теорема (принцип мінімуму потенціальної енергії)

Принцип Лагранжа

Якщо потенціальна енергія досягає мінімуму для якогось поля переміщень u_i, що задовольняє граничні умови $u_i = f_i$ на A_u, то напружено-деформований стан є дійсним.

Треба довести, що з попередніх умов випливає існування поля напружень, яке задовольняє рівняння рівноваги, фізичні рівнянням і граничні умови

$$p_i = \sigma_{ij}n_j$$

на A_σ. Це і означає, що напружено-деформований стан є дійсним.

Скористаємося раніше одержаним виразом для потенціальної енергії, беремо першу варіацію і прирівнюємо її до нуля

$$\delta\Pi_\varepsilon = \int_V \frac{\partial w}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}dV - \int_V X_i\delta u_i dV - \int_A p_i\delta u_i dA.$$

Позначаючи $\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$ і беручи до уваги, що

$$\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}\delta u_{i,j},$$

маємо

$$\delta\Pi_\varepsilon = -\int_V (\sigma_{ij},_j + X_i)\delta u_i dV + \int_A (\sigma_{ij}n_j - p_i)\delta u_i dA = 0.$$

Варіація $\delta\Pi_\varepsilon = 0$ тільки за умови, що обидва інтеграли дорівнюють нулю. Оскільки варіації δu_i довільні і довільний об'єм, то необхідною і достатньою умовою цього є

$$\sigma_{ij},_j + X_i = 0, \;\; \sigma_{ij}n_j - p_i = 0.$$

Таким чином, доведено: якщо потенціальна енергія досягає мінімуму, то виконуються всі рівняння теорії пружності, тому поле переміщень збігається з дійсним.

3.15 Теорема про мінімум доповняльних робіт (теорема Кастільяно)

Як і в попередньому параграфі, розглядаємо тіло, навантажене силами p_i на A_σ, і X_i в об'ємі V з заданими переміщеннями u_i на поверхні A_u, вся поверхня $A = A_\sigma + A_u$. В стані рівноваги маємо

$$\sigma_{ij},_j + X_i = 0, \quad x_i \subset V \tag{3.15.1}$$

та граничні умови

$$p_i = \sigma_{ij}n_j \quad \text{при} \quad x_i \subset A_\sigma;$$
$$u_i = f_i(x_1,x_2,x_3) \;\text{при}\; x_i \subset A_u. \tag{3.15.2}$$

Пряма теорема

Нехай напруження одержать варіації $\delta\sigma_{ij}$, а навантаження δp_i. Ці варіації повинні задовольняти умови рівноваги і граничні умови в об'ємі V:

$$\sigma_{ij},_j + \delta\sigma_{ij},_j + X_i = 0, \tag{3.15.3}$$

$$p_i + \delta p_i = (\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij})n_j. \tag{3.15.4}$$

З (3.15.1), (3.15.2), (3.15.3), (3.15.4) випливає, що

$$\delta\sigma_{ij,j} = 0,\ \delta p_i = \delta\sigma_{ij} n_j. \tag{3.15.5}$$

Далі, на частині поверхні A_σ, де задані сили p_i, їх варіація дорівнює нулю, так як вони фіксовані. Тоді на A_σ

$$\delta\sigma_{ij} n_j = 0.$$

Знайдемо варіацію потенціальної енергії деформації

$$\delta W = \delta \int_V w(\sigma_{ij}) dV = \int_V \delta w(\sigma_{ij}) dV =$$

$$= \int_V \frac{\partial w}{\partial \sigma_{ij}} \delta\sigma_{ij} dV = \int_V \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} dV =$$

$$= \int_V u_{i,j} \delta\sigma_{ij} dV = \int_V [(u_i \delta\sigma_{ij})_{,j} - u_i \delta\sigma_{ij,j}] dV =$$

$$= \int_V (u_i \delta\sigma_{ij})_{,j} dV - \int_V u_i \delta\sigma_{ij,j} dV =$$

$$= \int_A u_i \delta\sigma_{ij} n_j dA = \int_A u_i \delta p_i dA,$$

$$\delta W - \int_A u_i \delta p_i dA = 0. \tag{3.15.6}$$

На частині поверхні тіла A_σ задані зовнішні сили p_i. Вони є фіксованими, тому їх варіація на A_σ дорівнює нулю. Внаслідок цього і $\int_{A_\sigma} u_i \delta p_i dA = 0$, тому $\int_A u_i \delta p_i dA = \int_{A_\mathrm{u}} u_i \delta p_i dA$. Оскільки на частині поверхні A_u переміщення u_i задані і є фіксованими, то при варіюванні вони поводять себе як сталі, тому на A_u $u_i \delta p_i = \delta(u_i p_i)$ і $\int_{A_\mathrm{u}} u_i \delta p_i dA = \delta \int_{A_\mathrm{u}} u_i p_i dA$. Тоді з (3.15.6) маємо

$$\delta\left(W - \int_{A_\mathrm{u}} u_i p_i dA\right) = 0. \tag{3.15.7}$$

Вираз у дужках

$$\Pi_\sigma = \left(W - \int_{A_\mathrm{u}} u_i p_i dA\right)$$

називається *доповняльною роботою*. З рівняння (3.15.7) випливає, що при дійсному напруженому стані

$$\delta\Pi_\sigma = 0,$$

тобто доповняльна робота має точку стаціонарності.
Доведемо, що ця точка є точкою мінімуму. Для цього треба довести, що при відхиленні від дійсного напруженого стану доповняльна робота збільшується

$$\Pi_\sigma(\sigma_{ij}+\delta\sigma_{ij})-\Pi_\sigma(\sigma_{ij})>0.$$

Далі виражаємо додаткову роботу деформації, викликану варіацією напружень через напруження, і знаходимо її варіацію:

$$\Pi_\sigma(\sigma_{ij}+\delta\sigma_{ij})-\Pi_\sigma(\sigma_{ij}) =$$

$$= \int_V [w(\sigma_{ij}+\delta\sigma_{ij})-w(\sigma_{ij})]dV - \int_{A_\mathrm{u}} u_i\delta p_i dA,$$

$$w(\sigma_{ij}+\delta\sigma_{ij}) = w(\sigma_{ij}) + \frac{\partial w}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{kl}.$$

Ураховуючи, що

$$\frac{\partial w}{\partial\sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}} = \frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial\sigma_{kl}},$$

одержимо

$$\Pi_\sigma(\sigma_{ij}+\delta\sigma_{ij})-\Pi_\sigma(\sigma_{ij}) = \int_V \frac{\partial^2 w}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{kl}dV.$$

Доведемо, що підінтегральна функція є додатною:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{kl} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\sigma_{kl}}\frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\delta_{ij}\sigma_{mm}\right)\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{kl} =$$

$$= \frac{1}{2\mu}\left(\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\delta\sigma_{mm}\delta\sigma_{kk}\right) > 0.$$

Звідси

$$\int\limits_V \frac{\partial^2 w}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{kl}dV > 0.$$

Це доводить, що доповняльна робота досягає мінімальної величини при дійсному напруженому стані.

Обернена теорема.

Якщо доповняльна робота досягає мінімуму і напруження задовольняють умови рівноваги та граничні умови

$$\sigma_{ij},_j + X_i = 0,\ p_i = \sigma_{ij}v_j \text{ на } A_\sigma,$$

то напруження будуть дійсними, тобто існують зумовлені ними деформації, які задовольняють рівняння сумісності Сен-Венана. Надамо варіацію напруженням і знайдемо $\delta\Pi_\sigma$:

$$\Pi_\sigma = W_\sigma - \int_{A_u} u_i p_i dA, \tag{3.15.8}$$

$$\delta\Pi_\sigma = \int_V \varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}dV - \int_A u_i\delta p_i dA = 0, \tag{3.15.9}$$

з рівнянь рівноваги $\sigma_{ij},_j + X_i = 0$ випливає, що

$$\sigma_{ij},_j + \delta\sigma_{ij},_j + X_i = 0,$$

тому

$$\delta\sigma_{ij},_j = 0. \tag{3.15.10}$$

Таким чином, постає задача мінімізації (3.15.9) за наявності обмежень (3.15.10). Для її розв'язання скористаємося методом невизначених множників Лагранжа. Для цього до заданого функціонала додамо скалярний добуток обмеження (3.15.10) і помножимо на невідомий множник – вектор λ_i. Одержимо задачу без обмежень

$$\int_V \varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}dV + \int_V \lambda_i\delta\sigma_{ij,j}dV - \int_A u_i\delta p_i dA = 0.$$

Після перетворень, подібних до попередніх, одержимо

$$\int_V (\varepsilon_{ij} - \lambda_{i,j})\delta\sigma_{ij}dV + \int_A (\lambda_i - u_i)\delta p_i dA = 0.$$

Звідси внаслідок довільності варіацій напружень і сил, а також довільності об'єму випливає, що існує вектор λ_i, який задовольняє умову $\lambda_i = u_i$ на A_u. Для того щоб існував тензор ε_{ij}, повинні задовольнятись рівняння Сен-Венана

$$\varepsilon_{ij} = (\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i})/2.$$

3.16 Варіаційна теорема Рейснера

Розглядається тіло, яке перебуває в рівновазі під дією зовнішніх сил. Заданий функціонал Рейснера

$$I = \int_V [w(\varepsilon_{ij}) - X_i u_i] dV - \int_V \sigma_{ij} \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\right] dV -$$
$$- \int_{A_\mathrm{u}} \sigma_{ij} n_j \big(u_i - u_i'\big) dA - \int_{A_\sigma} p'{}_i u_i dA, \qquad (3.16.1)$$

який залежить від переміщень u_i, деформацій ε_{ij} і напружень σ_{ij}, які вважаються незалежними. На границі A_u задано переміщення u_i', на границі A_σ—сили p_i'.

Варіаційна теорема Рейснера: якщо функціонал на вибраному полі переміщень u_i, деформацій ε_{ij} і напружень σ_{ij} має точку стаціонарності, то напружено-деформований стан є дійсним.

Щоб довести теорему, необхідно показати, що з вказаної вище умови випливає виконання рівнянь теорії пружності і виконання крайових умов. Умовою того, що функціонал Рейснера I досягає стаціонарного значення, є рівність нулю першої варіації $\delta I = 0$. Знаходимо першу варіацію і прирівнюємо її до нуля:

$$\int_V \left\{ \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta\varepsilon_{ij} - X_i \delta u_i - \delta\sigma_{ij} \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\right] - \right.$$
$$\left. - \sigma_{ij} \left[\delta\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i})\right] \right\} dV -$$
$$- \int_{A_\mathrm{u}} \delta\sigma_{ij} n_j \big(u_i - u_i'\big) dA - \int_{A_\sigma} p_i' \delta u_i dA = 0.$$

Ураховуючи, що

$$\frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})dV = \int_V \sigma_{ij}\delta u_i,_j dV =$$

$$= \int_V (\sigma_{ij}\delta u_i),_j dV - \int_V \sigma_{ij},_j \delta u_i dV = \int_{A_\sigma} \sigma_{ij}\delta u_i n_j dA - \int_V \sigma_{ij},_j \delta u_i dV,$$

маємо

$$\int_V \left(\frac{\partial w(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij}\right)\delta\varepsilon_{ij} dV + \int_V (X_i + \sigma_{ij},_j)\delta u_i dV -$$

$$-\int_V \delta\sigma_{ij}\left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]dV -$$

$$-\int_{A_\sigma} (p_i' - \sigma_{ij}n_j)\delta u_i dA - \int_A \delta\sigma_{ij}(u_i - u'_i)n_j dA = 0.$$

Звідси внаслідок незалежності варіацій переміщень δu_i, деформацій $\delta\varepsilon_{ij}$, напружень $\delta\sigma_{ij}$ і довільності об'єму випливає, що

$$\frac{\partial w(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij},$$

$$\sigma_{ij},_j + X_i = 0, \qquad (3.16.2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_i,_j + u_j,_i),$$

при $x_i \in V$

$$u_i = u'_i \quad \text{на} \quad A_u, \quad p_i' = \sigma_{ij}n_j \quad \text{на} \quad A_\sigma. \qquad (3.16.3)$$

Рівняння (3.16.2) одержані з умови стаціонарності функціонала Рейснера є основними рівняннями теорії пружності, співвідношення (3.16.3)—граничними умовами.

3.17 Однозначність розв'язку задачі теорії пружності

На даний момент фізична задача теорії пружності, чи задача механіки, поставлена математично. Однак після цього залишаються питання, чи має задача розв'язок, і якщо має, то скільки розв'язків, тобто розв'язків кілька чи один? Доведемо, що задача теорії пружності має один розв'язок.

Розглянемо два поля переміщень u'_i, u''_i, які задовольняють рівняння теорії пружності в переміщеннях

$$\mu u'_i,_{jj}+(\lambda+\mu)u'_k,_{ki}+X_i=0, \tag{3.17.1}$$

або

$$\mu u'_i,_{jj}+(\lambda+\mu)\varepsilon',_i+X_i=0$$

та граничні умови:

$$p_i=\sigma'_{ij}n_j \quad \text{на} \quad A_\sigma,$$
$$u'_i=f_i \quad \text{на} \quad A_u. \tag{3.17.2}$$

Такі самі умови виконуються для u'':

$$\mu u''_i,_{jj}+(\lambda+\mu)\varepsilon'',_i+X_i=0, \tag{3.17.3}$$
$$p_i=\sigma''_{ij}n_j \quad \text{на} \quad A_\sigma,$$
$$u''_i=f_i \quad \text{на} \quad A_u. \tag{3.17.4}$$

Позначимо

$$u'_i-u''_i=u_i,$$
$$\sigma'_{ij}-\sigma''_{ij}=\sigma_{ij},$$
$$\varepsilon'_{ij}-\varepsilon''_{ij}=\varepsilon_{ij}$$

та віднімемо від (3.17.1) і (3.17.2) рівняння (3.17.3) і (3.17.4). Внаслідок цього одержимо однорідну систему

$$\mu u_i,_{jj}+(\lambda+\mu)\varepsilon,_i=0,$$
$$\sigma_{ij}n_j=0, u_i=0. \tag{3.17.5}$$

Ці рівняння визначають напружено-деформований стан тіла, на поверхні якого відсутні сили, переміщення та об'ємні сили. Треба довести, що напруження і деформації в таких тілах відсутні. Для цього розглянемо роботу деформації:

$$W_\varepsilon=\int_V w_\varepsilon dV=\int_V\left(\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}+\frac{\lambda}{2}\varepsilon_{kk}\varepsilon_{nn}\right)dV=$$
$$=\frac{1}{2}\int_V\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV=\frac{1}{2}\int_V\sigma_{ij}u_{i,j}dV=$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \Big[(\sigma_{ij}u_i)_{,j} - \sigma_{ij,j}u_i\Big]dV = \frac{1}{2}\int_A \sigma_{ij}n_ju_idA + \frac{1}{2}\int_V X_iu_idV =$$
$$= \frac{1}{2}\int_A p_iu_idA + \frac{1}{2}\int_V X_iu_idV = 0.$$

Унаслідок того, що переміщення на поверхні тіла і об'ємні сили відсутні і задача однорідна, остаточно отримаємо

$$\int_V \Big[\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2}\varepsilon_{kk}\varepsilon_{kk}\Big]dV = 0.$$

Оскільки $\mu > 0$, $\lambda > 0$, підінтегральна функція, яка являє собою квадратичну форму, є додатною. З цього випливає, що інтеграл може дорівнювати нулю тільки за умови

$$\varepsilon_{ij} = 0,\ \varepsilon_{kk} = 0,\ \text{тому}\ \ {\varepsilon'}_{ij} = {\varepsilon''}_{ij}.$$

Так як виконується закон Гука напруження

$${\sigma'}_{ij} = {\sigma''}_{ij}.$$

Переміщення можуть відрізнятися тільки лінійною складовою, яка відповідає переміщенню твердого тіла.

3.18 Теорема взаємності робіт

Розглянемо два стани тіла. В першому стані у тілі виникають деформації ε_{ij} та напруження σ_{ij} під дією сил p_i і переміщень u_i, заданих на поверхні, в другому—відповідно ${\varepsilon'}_{ij}$ та ${\sigma'}_{ij}$ під дією ${p'}_i$ та u'_i. Розглянемо співвідношення

$${\sigma'}_{ij}\varepsilon_{ij} - \sigma_{ij}{\varepsilon'}_{ij}. \tag{3.18.1}$$

Скориставшись законом Гука

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk},$$

одержимо

$${\sigma'}_{ij}\varepsilon_{ij} - \sigma_{ij}{\varepsilon'}_{ij} = 0,$$
$${\sigma'}_{ij}\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}{\varepsilon'}_{ij}. \tag{3.18.2}$$

Співвідношення (3.18.2) є одним з варіантів теореми взаємності робіт. Щоб одержати ще один варіант теореми, скористаємося рівняннями рівноваги

$$\sigma_{ij},_j + X_i = 0,$$

$$\sigma'_{ij},_j + X'_i = 0.$$

Перше рівняння помножимо на u'_i, друге—на u_i і віднімемо після цього від першого рівняння друге. Візьмемо інтеграл по об'єму тіла. Одержимо

$$\int_V (X_i u'_i - X'_i u_i) dV + \int_V (\sigma_{ij},_j u'_i - \sigma'_{ij},_j u_i) dV = 0.$$

Скористаємося тим, що

$$\sigma_{ij,j} u'_i = (\sigma_{ij} u'_i)_{,j} - \sigma_{ij} u'_{i,i},$$

$$\sigma'_{ij,j} u_i = (\sigma'_{ij} u_i)_{,j} - \sigma'_{ij} u_{i,i},$$

та перетвореннями Гаусса – Остроградського, а також тим, що

$$\sigma'_{ij} u_{i,j} = \sigma'_{ij} \varepsilon_{ij}.$$

Одержимо

$$\int_V (X_i u'_i - X'_i u_i) dV + \int_A (p_i u'_i - p'_i u_i) dA = \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij} \varepsilon_{ij}) dV.$$

Взявши до уваги (3.18.2), маємо

$$\int_V X_i u'_i dV + \int_A p_i u'_i dA = \int_V X'_i u_i dV + \int_A p'_i u_i dA. \qquad (3.18.3)$$

Співвідношення (3.18.3) показує, що сума робіт поверхневих і об'ємних сил першого стану на переміщеннях, зумовлених силами другого стану, дорівнює роботі поверхневих і об'ємних сил другого стану на переміщеннях від сил першого стану. Це твердження відоме як теорема Бетті.

3.19 Теорема Клапейрона

Теорема Клапейрона стверджує, що робота деформації пружного тіла, яке перебуває в стані рівноваги, дорівнює половині роботи зовнішніх сил на переміщеннях у точках їх прикладення:

$$W = \int_V w dV = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}u_{i,j} dV =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int_V (\sigma_{ij}u_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij},_j u_i dV\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\int_V X_i u_i dV + \frac{1}{2}\int_A p_i u_i dA.$$

Таким чином, теорему доведено:

$$W = \frac{1}{2}\int_V X_i u_i dV + \frac{1}{2}\int_A p_i u_i dA.$$

3.20 Загальні розв'язки задачі теорії пружності

3.20.1 Розв'язок Папковича – Нейбера

Розв'язок задачі теорії пружності може бути знайдений шляхом рішення крайової задачі рівнянь Нав'є

$$\mu\ \nabla^2\vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\vec{u} + \vec{X} = 0 \tag{3.20.1}$$

або у координатному вигляді

$$\mu u_i,_{jj} + (\lambda+\mu)u_m,_{mi} + X_i = 0. \tag{3.20.2}$$

Член $u_{m,mi}$ входить у всі рівняння і зв'язує всі три проекції век тора переміщень. Це ускладнює розв'язок задачі. Мета розв'язку Папковича – Нейбера полягає в тому, щоб побудувати таку систему рівнянь, кожне з яких містить тільки одну компоненту невідомого вектора. Для цього додатково вводиться скалярна функція і вектор переміщень подається у вигляді

$$\vec{u} = A\Big(\varphi + \vec{r}\cdot\vec{\psi}\Big) + B\vec{\psi}, \tag{3.20.3}$$

де A і B–довільні сталі; $\varphi(x_1,x_2,x_3)$–невідома скалярна функція, $\vec{\psi}(x_1,x_2,x_3)$–невідома вектор-функція; $\vec{r} = \vec{i_k}x_k$—радіус-вектор. Для визначення умов, яким повинні задовольняти введені скалярна функція φ і векторна функція $\overrightarrow{\psi}$, використовуються рівняння Нав'є (3.20.1). Оскільки

$$\nabla^2\vec{u} = A\nabla^2\nabla\left(\varphi + \vec{r}\cdot\vec{\psi}\right) + B\nabla^2\vec{\psi} =$$

$$= A\nabla\nabla^2\left(\varphi + \vec{r}\cdot\vec{\psi}\right) + B\nabla^2\vec{\psi},$$

$$\nabla\nabla\cdot\vec{u} = A\nabla\nabla^2\left(\varphi + \vec{r}\cdot\vec{\psi}\right) + B\nabla\nabla\cdot\vec{\psi},$$

і враховуючи, що

$$\nabla\nabla\cdot\left(\vec{r}\cdot\vec{\psi}\right) = \vec{i}_m\frac{\partial}{\partial x_m}\cdot\vec{i}_k\frac{\partial}{\partial x_k}(x_i\psi_i) =$$

$$= \delta_{mk}\frac{\partial}{\partial x_m}(\delta_{ik}\psi_i + x_i\psi_{i,k}) =$$

$$= \delta_{mk}(\psi_{k,m} + \delta_{im}\psi_{i,k} + x_i\psi_{i,km}) =$$

$$= 2\psi_{m,m} + x_i\psi_{i,mm} = 2\nabla\cdot\vec{\psi} + \vec{r}\cdot\nabla^2\vec{\psi},$$

рівняння Нав'є набере вигляду

$$A(\lambda+2\mu)\nabla(\nabla^2\varphi + \vec{r}\cdot\nabla^2\vec{\psi}) +$$

$$+2A(\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\overrightarrow{\psi} + B(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\overrightarrow{\psi} + B\mu\nabla^2\overrightarrow{\psi} + \overrightarrow{X} = 0.$$

Для того щоб спростити одержане рівняння, треба позбутися члена $\nabla\nabla\cdot\vec{\psi}$, який містить зв'язані між собою всі три компонента вектора $\vec{\psi}$. Для цього використовуються довільні сталі A і B. Вибирається $A = 1$, а B визначається з умови

$$2(\lambda+2\mu) + B(\lambda+\mu) = 0,$$

$$B = -2\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} = -4(1-\nu).$$

Тоді

$$(\lambda+2\mu)\nabla(\nabla^2\varphi + \vec{r}\cdot\nabla^2\vec{\psi}) - 4(1-\nu)\mu\nabla^2\vec{\psi} + \vec{X} = 0.$$

Одержане рівняння можна задовольнити, поклавши

$$-4(1-\nu)\mu\nabla^2\vec{\psi} + \vec{X} = 0,\ \nabla^2\varphi + \vec{r}\cdot\nabla^2\vec{\psi} = 0.$$

Остаточно одержуємо

$$\nabla^2\vec{\psi} = \frac{\vec{X}}{4(1-\nu)\mu}, \ \nabla^2\varphi = -\frac{\vec{r}\cdot\vec{X}}{4(1-\nu)\mu}.$$

У разі відсутності об'ємних сил $X = 0$ одержуємо

$$\nabla^2\vec{\psi} = 0 \ \text{і} \ \nabla^2\varphi = 0,$$

тобто скалярна функція φ і векторна функція $\vec{\psi}$ є гармонічними.

Остаточно вектор переміщень виражається через введені функції

$$\vec{u} = \nabla\left(\varphi + \vec{r}\cdot\vec{\psi}\right) - 4(1-\nu)\vec{\psi},$$

$$u_i = \varphi_{,i} + \delta_{ki}\psi_k + x_k\psi_{k,i} - 4(1-\nu)\psi_i =$$
$$= \varphi_{,i} + x_k\psi_{k,i} - (3-4\nu)\psi_i.$$

3.20.2 Розв'язок Бусінеска – Гальоркіна

Розв'язок Бусінеска – Гальоркіна, як і розв'язок Папковича – Нейбера, дає можливість одержати рівняння для визначення кожного вектора окремо. Їх можна одержати на основі теореми Гельмгольца, за якою будь-яке векторне поле є сумою градієнта скалярної функції і ротора вектора, дивергенція якого дорівнює нулю. Тому вектор переміщень можна шукати у вигляді

$$\vec{u} = A\nabla\varphi + B\nabla\times\vec{\psi},$$

за умови $\nabla\cdot\vec{\psi} = 0$. З фізичної точки зору це означає, що вектор переміщень є суперпозицією потенціального і соленоїдального полів. Сталі A і B можуть вибрати так, щоб спростити одержане рівняння, якому повинні задовольняти скалярна функція φ і векторна функція $\vec{\psi}$. Щоб знайти умови, які вони повинні задовольняти, можна скористатися рівняннями Нав'є (3.20.1). Оскільки

$$\nabla^2\vec{u} = A\nabla^2\varphi + \nabla^2\nabla\times\vec{\psi},$$

$$\nabla\nabla\times\vec{u} = A\nabla\nabla^2\varphi + B\nabla\nabla\cdot\nabla\times\vec{\psi} = A\nabla^2\nabla\varphi + B\nabla\nabla\cdot\nabla\times\vec{\psi},$$

то підстановка в (3.20.1) дає

$$A(\lambda+2\mu)\nabla^2\nabla\varphi + \mu B\nabla^2\nabla\times\vec{\psi} + B(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\nabla\times\vec{\psi} + \vec{X} = 0.$$

Передостанній член зникає в наслідок наступної залежності

$$\nabla\cdot\nabla\times\vec{\psi}=\vec{i}_m\frac{\partial}{\partial x_m}\cdot\vec{i}_k\frac{\partial}{\partial x_k}\times\vec{i}_p\psi_p=$$

$$=\vec{i}_m\frac{\partial}{\partial x_m}\cdot\epsilon_{qkp}\vec{i}_q\psi_{p,k}=\delta_{mq}\epsilon_{qkp}\psi_{p,km}=\epsilon_{mkp}\psi_{p,km}=0.$$

У результаті одержуємо

$$\nabla^2[A(\lambda+2\mu)\nabla\varphi+\mu B\nabla\times\vec{\psi}]+\vec{X}=0.$$

В одержане рівняння входять чотири функції φ, ψ_1, ψ_2, ψ_3, але внаслідок того, що накладено умову $\nabla\cdot\vec{\psi}=0$, тільки три є незалежними, тому їх можна виразити через невідомий вектор $\vec{F}(x_1,x_2,x_3)$, поклавши

$$\varphi=\nabla\cdot\vec{F},\vec{\psi}=\nabla\times\vec{F}.$$

Це приводить до рівняння

$$\nabla^2[A(\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\vec{F}+\mu B\nabla\times\nabla\times\vec{F}]+\vec{X}=0.$$

Оскільки

$$\nabla\times\nabla\times\vec{F}=\nabla\nabla\cdot\vec{F}-\nabla^2\vec{F},$$

то одержуємо

$$\nabla^2\{A[(\lambda+2\mu)+\mu B]\nabla\nabla\cdot\vec{F}-\mu B\nabla^2\vec{F}\}+\vec{X}=0.$$

Оскільки сталі A і B довільні, їх вибирають з умови $A=1$, $A(\lambda+2\mu)+\mu B=0$. Звідси

$$B=-(\lambda+2\mu)/\mu,$$

або

$$B=-2(1-\nu)/(1-2\nu)$$

і невідомий вектор повинен задовольняти рівняння

$$(\lambda+2\mu)\nabla^2\nabla^2\vec{F}+\vec{X}=0,\quad \nabla^4\vec{F}=-\frac{\vec{X}}{\lambda+2\mu}.$$

Для вектора переміщень одержуємо вираз

$$\vec{u}=\nabla\nabla\cdot\vec{F}-\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\nabla\times\nabla\times\vec{F},$$

або

$$\vec{u} = \nabla\nabla \cdot \vec{F} - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\left(\nabla\nabla \cdot \vec{F} - \nabla^2 \vec{F}\right),$$

$$\vec{u} = -\frac{1}{1-2\nu}\nabla\nabla \cdot \vec{F} + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\nabla^2 \vec{F}.$$

У координатному вигляді

$$u_i = -\frac{1}{1-2\nu}F_{k,ki} + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}F_{i,mm}.$$

Якщо об'ємні сили відсутні $\vec{X} = 0$, то $\nabla^4 \vec{F} = 0$, тобто вектор $\vec{F}$, який називається вектором Гальоркіна, є бігармонічним.

3.21 Задачі

Задача 3.21.1. Поперечний переріз прямокутної призми при плоскій деформації перетворився на паралелограм (рис.3.21.1). Знайти відносну та лінійну деформацію в напрямках діагоналей призми, головні деформації і головні напрямки. Переміщення вважати лінійними функціями.

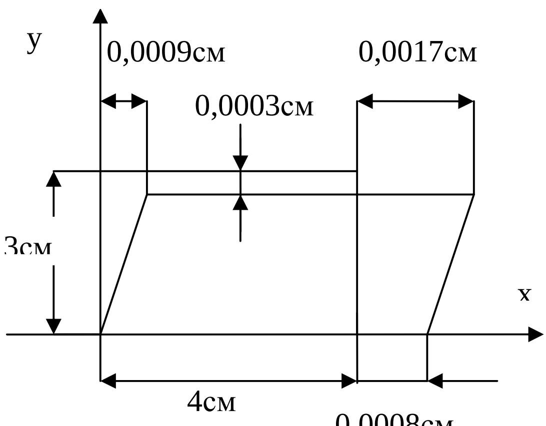

Рис.3.21.1

Задача 3.21.2. Знайти сталі Ляме для різних матеріалів, якщо відомі модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона:

$$a)\ E = 2\cdot 10^5\text{МПа},\ \nu = 0{,}3,$$
$$b)\ E = 1\cdot 10^5\text{МПа},\ \nu = 0{,}32,$$
$$c)\ E = 8\text{МПа},\ \nu = 0{,}47.$$

Задача 3.21.3. Знайти потенціальну енергію деформації стрижня завдовжки l з площею поперечного перерізу A, якщо відомі деформації

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \gamma_{12} = 0,$$
$$\gamma_{32} = -\frac{1}{G}\frac{\partial\phi}{\partial x_1},\ \gamma_{31} = \frac{1}{G}\frac{\partial\phi}{\partial x_2},$$

де $\phi = \phi(x_1,x_2)$–функція, яка залежить тільки від x_1,x_2

Задача 3.21.4. Визначити, при якому розподілі температур в ізотропному пружному тілі можливе вільне температурне розширення, тобто відсутні напруження, якщо тіло не закріплене і на нього не діють ніякі сили.

Задача 3.21.5. Виразити компоненти тензора напружень через гармонічні функції, які входять у розв'язок Папковича–Нейбера.

Задача 3.21.6. Довести, що за відсутності об'ємних сил функції

$$u = \frac{1}{2(1-2\nu)}\theta x,\ v = \frac{1}{2(1-2\nu)}\theta y,\ w = \frac{1}{2(1-2\nu)}\theta z$$

задовольняють рівняння Нав'є.

Задача 3.21.7. Знайти потенціальну енергію деформації пластинки, якщо задані переміщення (рис.3.21.2)

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x},\ v = -z\frac{\partial w}{\partial y},\ w = w(x,y).$$

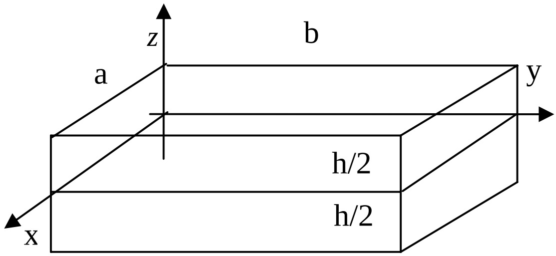

Рис.3.21.2

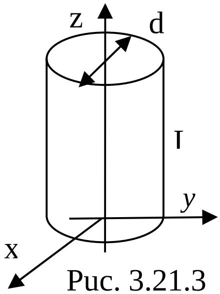

Рис. 3.21.3

Задача 3.21.8. Циліндричний стрижень круглого поперечного перерізу з розмірами $L = 10$ см, $d = 2$ см (рис.3.21.3), підвішений, у центрі ваги верхнього перерізу, розтягується власною вагою. Компоненти вектора переміщень дорівнюють

$$u = -\nu\gamma xz/E, \;\; v = -\nu\gamma yz/E,$$
$$w = \gamma\big[z^2 - l^2 + \nu\big(x^2 + y^2\big)\big]/(2E).$$

Визначити потенціальну енергію деформації та її складові, пов'язані зі зміною форми і об'єму ($\gamma = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, $E = 2 \cdot 10^5$МПа, $\nu = 0{,}3$).

Задача 3.21.9. Показати, що загальний розв'язок однорідних рівнянь Нав'є можна подати у вигляді

$$\vec{v} = \vec{\psi} - \frac{1}{2(1-\nu)} grad(z\phi_0),$$

де $\vec{\psi}$–загальний розв'язок рівняння $\nabla^2\vec{\psi} = 0$; а ϕ_0–будь-який частинний розв'язок рівняння

$$2\frac{\partial\phi_0}{\partial x} = div\vec{\psi}.$$

Задача 3.21.10. Показати, що загальний розв'язок однорідних рівнянь Нав'є можна подати у вигляді знайденному Черруті:

$$\vec{v} = \frac{\partial\vec{H}}{\partial x} - \frac{z}{3-4\nu} graddiv\vec{H},$$

де вектор $\vec{H}$–загальний розв'язок рівняння

$$\nabla^2\vec{H} = 0.$$

Задача 3.21.11. Записати граничні умови для тіл, навантажених, як показано на рис.3.21.4 та 3.21.5.

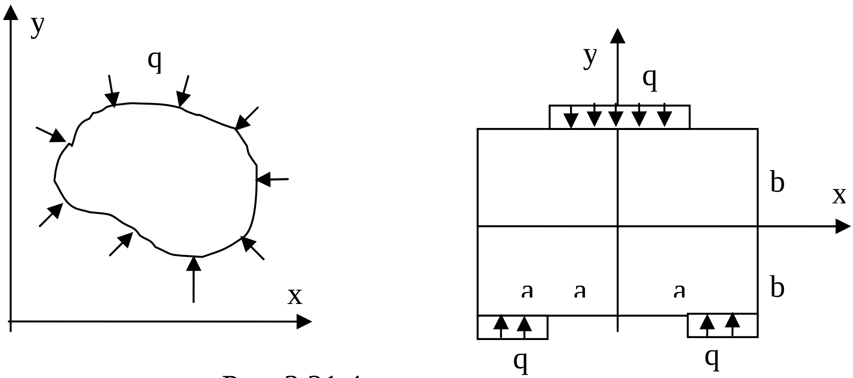

Рис. 3.21.4

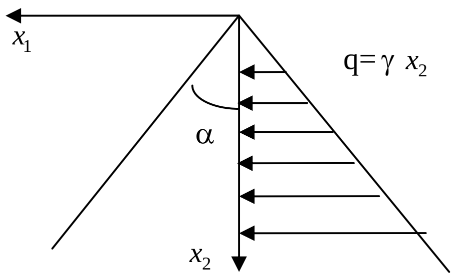

Рис. 3.21.5

3.22 Найпростіші задачі теорії пружності

Розтяг стрижня власною вагою.

Перевірити правильність розв'язку задачі методом опору матеріалів. Згідно з постановкою задачі в дисципліні опір матеріалів коли стрижень працює на розтяг (рис.3.22.1)

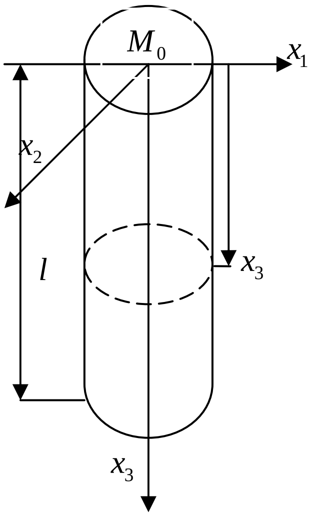

Рис.3.22.1

у поперечних перерізах діють нормальні напруження $\sigma = \frac{N}{A}$, де $N = A\gamma(l - x_3)$–осьова сила, A–площа поперечного перерізу і $\sigma_{33} = \gamma(l - x_3)$. Тензор напружень

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(l - x_3) \end{pmatrix},$$

де γ–питома вага, тобто сила прикладена до одиниці об'єму.

1. Перевіряємо виконання рівнянь рівноваги

$$\sigma_{ij},_j + X_i = 0;$$

$$\sigma_{11},_1 + \sigma_{12},_2 + \sigma_{13},_3 + X_1 = 0;$$
$$\sigma_{21},_1 + \sigma_{22},_2 + \sigma_{23},_3 + X_2 = 0;$$
$$\sigma_{31},_1 + \sigma_{32},_2 + \sigma_{33},_3 + X_3 = 0.$$

В випадку навантаження власною вагою об'ємні сили в напрямках осей x_1, x_2 відсутні, тому $X_1 = X_2 = 0$. В напрямку осі x_3 об'ємна сила дорівнює питомій вазі, тому $X_3 = \gamma$. Очевидно, перші два рівняння виконуються. Третє рівняння приводиться до вигляду $-\gamma + \gamma = 0$ і також виконується.

2. Перевіряємо виконання рівнянь сумісності деформацій – рівнянь Сен-Венана. Це необхідно тому, що задача розв'язується у напруженнях, оскільки виконання тільки рівнянь рівноваги недостатньо, внаслідок того що рівнянь рівноваги тільки три, а тензор напружень має шість незалежних компонент, тобто кількість невідомих більше, ніж кількість рівнянь. За таких умов система в принципі має нескінченну кількість розв'язків. Для того щоб перевірити виконання рівнянь Сен-Венана, треба знайти деформації. Для цього використовується закон Гука

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\delta_{ij}\sigma_{mm}\right).$$

У розгорнутому вигляді

$$\varepsilon_{11}=\tfrac{1}{2\mu}\Big(\sigma_{11}-\tfrac{\nu}{1+\nu}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\Big)=\tfrac{1}{2\mu}\Big(0-\tfrac{\nu}{1+\nu}\gamma(l-x_3)\Big)=$$
$$=-\tfrac{\nu}{2\mu(1+\nu)}\gamma(l-x_3)=-\tfrac{\nu}{E}\gamma(l-x_3),$$

$$\varepsilon_{22}=-\frac{\nu}{E}\gamma(l-x_3),\ \ \varepsilon_{33}=\frac{1}{E}\gamma(l-x_3),$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2\mu}\sigma_{12}=0,\ \varepsilon_{23}=0,\ \varepsilon_{31}=0,$$

$$\hat{\varepsilon}=\begin{pmatrix} -\nu\gamma(l-x_3)/E & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\gamma(l-x_3)/E & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(l-x_3)/E \end{pmatrix}.$$

Рівняння сумісності деформацій мають вигляд

$$\varepsilon_{ij},_{kl}+\varepsilon_{kl},_{ij}-\varepsilon_{ik},_{jl}-\varepsilon_{jl},_{ik}=0,$$

$$\varepsilon_{11},_{22}+\varepsilon_{22},_{11}=2\varepsilon_{12},_{12};$$

$$\varepsilon_{11},_{33}+\varepsilon_{33},_{11}=2\varepsilon_{13},_{13};$$

$$\varepsilon_{22},_{33}+\varepsilon_{33},_{22}=2\varepsilon_{23},_{23};$$

$$\varepsilon_{11},_{23}=(\varepsilon_{12},_3+\varepsilon_{13},_2-\varepsilon_{23},_1),_1;$$

$$\varepsilon_{22},_{13}=(\varepsilon_{12},_3+\varepsilon_{32},_1-\varepsilon_{13},_2),_2;$$

$$\varepsilon_{33},_{12}=(\varepsilon_{23},_1+\varepsilon_{31},_2-\varepsilon_{12},_3),_3;$$

і є диференціальними рівняннями другого порядку. Всі компоненти тензора деформацій є лінійними функціями, тому їхні другі похідні дорівнюють нулю, внаслідок цього рівняння сумісності деформацій виконуються.

3. Перевіряємо виконання крайових умов. За умовою задачі на поверхні тіла задані сили. Маємо першу крайову задачу теорії пружності. Граничні умови зв'язують сили на поверхні тіла і компоненти тензора напружень $p_i=\sigma_{ij}n_j$, де p_i–проекції інтенсивності поверхневих сил; n_j–проекції одиничної нормалі до поверхні тіла. Наводимо ці співвідношення в розгонутому вигляді

$$p_1=\sigma_{11}n_1+\sigma_{12}n_2+\sigma_{13}n_3,$$

$$p_2 = \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3,$$

$$p_3 = \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3.$$

Поверхня стрижня складається з трьох частин: перша–нижній торець, друга—бокова поверхня, третя—верхній торець.

Нижній торець

$$x_3 = l,\ n_1 = n_2 = 0,\ n_3 = 1,\ p_1 = p_2 = p_3 = 0,$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0,\ \sigma_{33} = \gamma(l - l) = 0.$$

Підстановка цих величин у граничні умови показує, що вони виконуються.

Бокова поверхня. Її рівняння має вигляд $f(x_1,x_2) = 0$ і проекція нормалі на вісь x_3, $n_3 = 0$, $n_1 \neq 0,\ n_2 \neq 0$,

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0,\ \sigma_{33} = \gamma(l - x_3).$$

Підстановка цих величин у граничні умови показує що вони виконуються.

Верхній торець. Розподіл зовнішніх сил на верхньому торці з опору матеріалів невідомий. Відомо тільки те, що він закріплений, тому з крайових умов можна лише визначити, при якому розподілі напружень результат, одержаний в опорі матеріалів, буде правильним. На верхньому торці маємо

$$x_3 = 0,\ n_1 = n_2 = 0,\ n_3 = -1,$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0,\ \sigma_{33} = \gamma(l - 0) = \gamma l.$$

Підстановка цих величин у граничні умови дає

$$p_1 = p_2 = 0,\ p_3 = \gamma l.$$

Якщо стрижень закріплено так, що сили на верхньому торці розподіляються якось інакше, то результатом, одержаним в опорі матеріалів, можна користуватися тільки в розумінні принципу Сен-Венана, тобто на деякій відстані від місця прикладання сили напруження будуть близькими до тих, що дає опір матеріалів.

4. Визначаємо переміщення. За формулою Чезаро

$$u_i = u_i^0 + \left(x_j' - x_j^0\right)\omega_{ij}^0 + \int_{M^0}^{M'} \left[\varepsilon_{ik} + (x_j' - x_j)(\varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{kj,i})\right] dx_k,$$

де $\vec{u}^0 = \vec{u}(M^0)$—переміщення точки відліку; ω^0_{ij}—компоненти тензора обертання тіла як абсолютно твердого навколо точки відліку. Оскільки точка закріплення стрижня вибирається в центрі ваги і осі x_1, x_2 головні осі, то переміщення точки відліку M^0 відсутнє $\vec{u}^0 = 0$ і обертання тіла як абсолютно твердого навколо M^0 також відсутнє $\omega^0_{ij} = 0$.

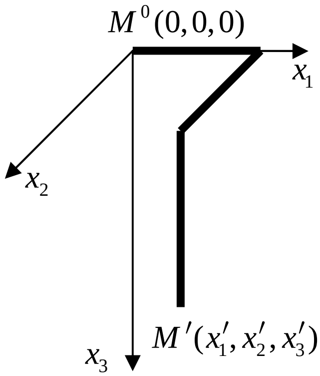

Рис.3.22.2

У наслідок цих умов перші два доданки у формулі Чезаро випадають і залишається тільки третій інтегральний, який дає переміщення за рахунок деформування стрижня:

$$u_i = \int_{M^0}^{M'} \left[\varepsilon_{ik} + (x_j' - x_j)(\varepsilon_{ik},_j - \varepsilon_{kj},_i)\right] dx_k.$$

Ураховуючи що всі компоненти тензора деформацій залежать тільки від x_3, маємо

$$u_1 = \int_{M^0}^{M'} [\varepsilon_{1k} + (x_1' - x_1)(\varepsilon_{1k},_1 - \varepsilon_{k1},_1) +$$
$$+ (x_2' - x_2)(\varepsilon_{1k},_2 - \varepsilon_{k2},_1) + (x_3' - x_3)(\varepsilon_{1k},_3 - \varepsilon_{k3},_1)] dx_k =$$
$$= \int_{M^0}^{M'} \left[\varepsilon_{1k} + (x_3' - x_3)\varepsilon_{1k},_3\right] dx_k =$$
$$= \int_{M^0}^{M'} \{[\varepsilon_{11} + (x_3' - x_3)\varepsilon_{11},_3]\, dx_1 +$$
$$+ [\varepsilon_{12} + (x_3' - x_3)\varepsilon_{12},_3] dx_2 + [\varepsilon_{13} + (x_3' - x_3)\varepsilon_{13},_3]\, dx_3\}.$$

Криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Найзручнішим шляхом від M_0 до M' є шлях який складається з відрізків прямих, паралельних осям координат (рис.3.22.2). Він дорівнює сумі інтегралів по відрізках

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^{x'_1}[\varepsilon_{11}+(x'_3-x_3)\varepsilon_{11},_3]dx_1+\int_0^{x'_2}0+\int_0^{x'_3}0= \\ &= \int_0^{x'_1}[-\nu\gamma(l-x_3)/E+(x'_3-x_3)\nu\gamma/E]dx_1= \\ &= (\nu\gamma/E)\int_0^{x'_1}[-l+x'_3]dx_1=(\nu\gamma/E)(x'_3-l)x'_1, \end{aligned}$$

$$u_1=(\nu\gamma/E)(x'_3-l)x'_1.$$

Аналогічно визначаємо

$$u_2=(\nu\gamma/E)(x'_3-l)x'_2.$$

Знаходимо переміщення в напрямку осі x_3, (z)

$$u_3=\int_{M_0}^{M'}\left[\varepsilon_{3k}+(x'_j-x_j)(\varepsilon_{3k},_j-\varepsilon_{kj},_3)\right]dx_k=$$

$$\begin{gathered} =\int_{M^0}^{M'}[\varepsilon_{3k}+(x'_1-x_1)(\varepsilon_{3k},_1-\varepsilon_{k1},_3)+ \\ +(x'_2-x_2)(\varepsilon_{3k},_2-\varepsilon_{k2},_3)+ \\ +(x'_3-x_3)(\varepsilon_{3k},_3-\varepsilon_{k3},_3)]dx_k= \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} =\int_{M^0}^{M'}[\varepsilon_{3k}-(x'_1-x_1)\varepsilon_{k1},_3-(x'_2-x_2)\,\varepsilon_{k2},_3]dx_k= \\ =(\gamma/E)\int_{M^0}^{M'}\{-(x'_1-x_1)\nu dx_1-(x'_2-x_2)\nu dx_2+(l-x_3)\,dx_3\}= \\ =-(\gamma\nu/E)\int_0^{x'_1}(x'_1-x_1)dx_1-(\gamma\nu/E)\int_0^{x'_2}(x'_2-x_2)dx_2+ \\ +(\gamma/E)\int_0^{x'_3}(l-x_3)dx_3= \\ =-\gamma\nu {x'_1}^2/2E-\gamma\nu {x'_2}^2/2E+(\gamma/E)(lx'_3-{x'_3}^2/2)= \\ =-(\gamma/2E)[\nu({x'_1}^2+{x'_2}^2)-(2lx'_3-{x'_3}^2)]. \end{gathered}$$

Всестороннє стискання тіла довільної форми.

Розглядається ізотропне тіло, навантажене рівномірно розподіленими силами інтенсивності $\vec{p}$, нормальними до його поверхні (рис.3.22.3). Розв'язок задачі визначення напружено-деформованого стану може спиратися на наступні фізичні міркування. Оскільки навантаження рівномірно розподілене і напрямлене по нормалі до поверхні тіла, то форма тіла не змінюється, будуть змінюватися лише розміри і об'єм. Оскільки форма не змінюється будуть відсутні зсуви і, відповідно дотичні напруження.

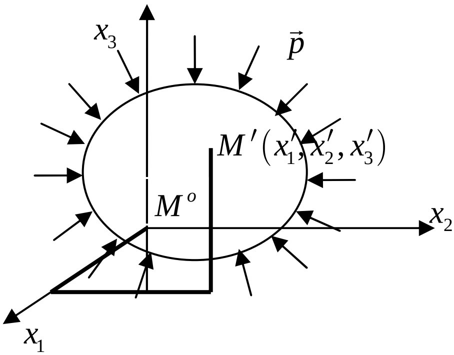

Рис.3.22.3

З попереднього випливає висновок, що в тілі на будь-яких площинках будуть діяти тільки нормальні напруження. Тоді тензор напружень матиме діагональну структуру

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}.$$

Для того щоб перевірити правильність розв'язку, треба перевірити, чи виконуються рівняння теорії пружності і граничні умови.

1. Перевірка виконання рівнянь рівноваги

$$\sigma_{ij},_j + X_i = 0,$$

$$\sigma_{11},_1 + \sigma_{12},_2 + \sigma_{13},_3 + X_1 = 0,$$

$$\sigma_{21},_1 + \sigma_{22},_2 + \sigma_{23},_3 + X_2 = 0,$$

$$\sigma_{31},_1 + \sigma_{32},_2 + \sigma_{33},_3 + X_3 = 0.$$

За умовою задачі об'ємні сили в напрямках осей x_1,x_2,x_3 відсутні, тому $X_1 = X_2 = X_3 = 0$. Всі компоненти тензора сталі величини, тому їх похідні дорівнюють нулю. Рівняння рівноваги виконуються.

2. Перевірка виконання рівнянь сумісності деформацій – рівнянь Сен-Венана. Перевірка необхідна тому що задача розв'язується у напруженнях. Виконання одних рівнянь рівноваги недостатньо, оскільки рівнянь рівноваги три, а тензор напружень має шість незалежних компонент. Таким чином, кількість невідомих більше, ніж кількість рівнянь. Тому рівняння рівноваги мають нескінченну кількість розв'язків. Для того щоб перевірити виконання рівнянь Сен-Венана, треба знайти деформації. За законом Гука

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\delta_{ij}\sigma_{mm}\right).$$

У розгорнутому вигляді

$$\varepsilon_{11} = \tfrac{1}{2\mu}\Big(\sigma_{11} - \tfrac{\nu}{1+\nu}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\Big) =$$
$$= \tfrac{1}{2\mu}\Big(-p + \tfrac{\nu}{1+\nu}3p\Big) =$$
$$= -\tfrac{1-2\nu}{2\mu(1+\nu)}p = -\tfrac{1-2\nu}{E}p,$$
$$\varepsilon_{22} = -\frac{1-2\nu}{E}p,\ \varepsilon_{33} = -\frac{1-2\nu}{E}p,$$
$$\varepsilon_{12} = 0,\ \varepsilon_{23} = 0,\ \varepsilon_{31} = 0.$$

Рівняння сумісності деформацій можна записати у вигляді

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0.$$

Вони є диференціальними рівняннями другого порядку. Всі компоненти тензора деформацій є сталими і їх другі похідні дорівнюють нулю, тому рівняння сумісності деформацій виконуються.

3. Перевірка виконання крайових умов. За умовою задачі на поверхні тіла задані сили. Маємо першу крайову задачу теорії пружності. Граничні умови зв'язують сили на поверхні тіла і компоненти тензора напружень

$$p_i = \sigma_{ij} n_j,$$

де p_i–проекції інтенсивності поверхневих сил; n_j–проекції одиничної нормалі до поверхні тіла.

У розгорнутому вигляді

$$p_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3,$$
$$p_2 = \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3,$$
$$p_3 = \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3.$$

Вектор інтенсивності зовнішніх сил напрямлений по нормалі до поверхні, але має протилежний напрямок, тому він має вигляд

$$\vec{p} = -p\vec{n},$$

де $\vec{n}$–одинична зовнішня нормаль до поверхні тіла; p–величина інтенсивності зовнішніх сил.

У координатному вигляді

$$p_1 = -pn_1,\ p_2 = -pn_2,\ p_3 = -pn_3.$$

Підстановка компонент тензора напружень та інтенсивності зовнішніх сил у крайові умови показує, що вони виконуються.

4. Визначення переміщень. За формулою Чезаро

$$u_i = u_i^0 + \left(x_j' - x_j^0\right)\omega_{ij}^0 + \int_{M^0}^{M'} \left[\varepsilon_{ik} + (x_j' - x_j)(\varepsilon_{ik},_j - \varepsilon_{kj},_i)\right] dx_k,$$

де $\vec{u}^0 = \vec{u}(M^0)$–переміщення точки відліку; ω_{ij}^0–компоненти тензора обертання тіла як абсолютно твердого навколо точки відліку. Точка закріплення тіла вибирається довільно. Оскільки головним інтересом є переміщення за рахунок деформацій, то можна покласти, що переміщення точки відліку M^0 відсутнє $\vec{u}^0 = 0$ і обертання тіла як абсолютно твердого навколо M^0 також відсутнє $\omega_{ij}^0 = 0$ тому перші два доданки у формулі Чезаро випадають. Залишається тільки третій—інтегральний, який дає переміщення за рахунок деформування

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} -\frac{1-2\nu}{E}p & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1-2\nu}{E}p & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1-2\nu}{E}p \end{pmatrix},$$

$$u_i = \int_{M^0}^{M'} \left[\varepsilon_{ik} + (x_j' - x_j)(\varepsilon_{ik},_j - \varepsilon_{kj},_i)\right] dx_k.$$

Всі компоненти тензора деформацій сталі величини, тому всі похідні дорівнюють нулю, звідки

$$u_i = \int_{M^0}^{M'} \varepsilon_{ik} dx_k,$$

$$u_1 = \int_{M^0}^{M'} \varepsilon_{1k} dx_k = \int_{M^0}^{M'} (\varepsilon_{11} dx_1 + \varepsilon_{12} dx_2 + \varepsilon_{13} dx_3).$$

В данній задачі криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Найзручнішим з точки зору техніки інтегрування є шлях від M^0 до M', який складається з відрізків прямих, паралельних осям координат (рис.3.22.3). Враховуючи, що $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = 0$, маємо

$$u_1 = \int_0^{x_1'} \varepsilon_{11} dx_1 + \int_0^{x_2'} 0 + \int_0^{x_3'} 0 = -\frac{1-2\nu}{E} p \int_0^{x_1'} dx_1 = -\frac{1-2\nu}{E} p x_1'.$$

Аналогічно визначають

$$u_2 = -\frac{1-2\nu}{E} p x_2', \; u_3 = -\frac{1-2\nu}{E} p x_3'.$$

Згин стрижня моментом.

У цій задачі за вісь x_3 вибирається лінія центрів ваги. Осі x_1, x_2–центральні головні осі. В опорі матеріалів при розгляді такого виду навантаження стрижня, який називається чистим згином (рис.3.22.4), нормальні напруження в поперечних перерізах визначаються формулою Нав'є

$$\sigma = \sigma_z = \sigma_{33} = \frac{m_y}{I_y} x_1,$$

де m_y–зосереджений момент на кінці стрижня; I_y–осьовий момент інерції. Всі інші компоненти тензора напружень дорівнюють нулю

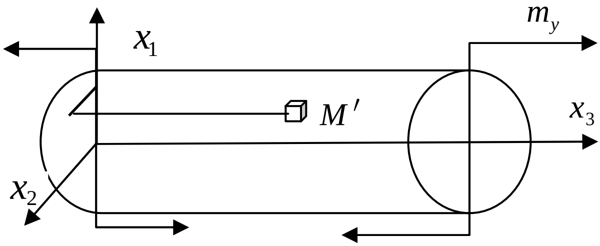

Рис.3.22.4

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_y x_1 / I_y \end{pmatrix}.$$

Перевірка правильності розв'язку полягає в перевірці виконання рівнянь теорії пружності і граничних умов.

1. Перевірка виконання рівнянь рівноваги

$$\sigma_{ij},_j + X_i = 0,$$

$$\sigma_{11,1}+\sigma_{12,2}+\sigma_{13,3}+X_1=0,$$
$$\sigma_{21,1}+\sigma_{22,2}+\sigma_{23,3}+X_2=0,$$
$$\sigma_{31,1}+\sigma_{32,2}+\sigma_{33,3}+X_3=0.$$

За умовою задачі об'ємні сили в напрямках осей x_1,x_2,x_3 не враховуються, тому $X_1=X_2=X_3=0$. Два перших рівняння виконуються, оскільки, всі компоненти тензора напружень, які в них входять, дорівнюють нулю. В третьому рівнянні дві перші компоненти тензора дорівнюють нулю, а σ_{33} не залежить від x_3, тому похідна $\sigma_{33,3}$ дорівнює нулю і третє рівняння рівноваги також виконується.

2. Перевірка виконання рівнянь сумісності деформацій – рівнянь Сен-Венана. Перевірка необхідна тому що задача розв'язується у напруженнях. Виконання одних рівнянь рівноваги недостатньо, оскільки рівнянь рівноваги три, а тензор напружень має шість незалежних компонент. У наслідок того шо кількість невідомих більше, ніж кількість рівнянь тому рівняння рівноваги мають нескінченну кількість розв'язків. Для того щоб перевірити виконання рівнянь Сен-Венана, треба знайти деформації. За законом Гука

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij}-\frac{\nu}{1+\nu}\delta_{ij}\sigma_{mm}\right),$$

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{2\mu}\left(0-\frac{\nu}{1+\nu}\frac{m_y}{I_y}x_1\right)=-\frac{\nu m_y}{2\mu(1+\nu)I_y}x_1=-\frac{\nu m_y}{EI_y}x_1,$$

враховуючи, що

$$\frac{m_y}{EI_y}=\frac{1}{\rho}=k,$$

де ρ–радіус кривизни; k–кривизна нейтральної лінії, результат можна записати у вигляді

$$\varepsilon_{11}=-\nu k x_1,$$

аналогічно

$$\varepsilon_{22}=-\nu k x_1.$$

Знаходимо

$$\varepsilon_{33}=\frac{1}{2\mu}\left(\frac{m_y}{I_y}x_1-\frac{\nu}{1+\nu}\frac{m_y}{I_y}x_1\right)=\frac{m_y}{2\mu(1+\nu)I_y}x_1=\frac{m_y}{EI_y}x_1,$$

$$\varepsilon_{33} = kx_1.$$

Оскільки всі дотичні напруження відсутні, то деформації зсувів дорівнюють нулю:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0.$$

Рівняння сумісності деформацій

$$\varepsilon_{ij},_{kl} + \varepsilon_{kl},_{ij} - \varepsilon_{ik},_{jl} - \varepsilon_{jl},_{ik} = 0$$

є диференціальними рівняннями другого порядку. Компоненти тензора деформацій є лінійними функціями, тому їх другі похідні дорівнюють нулю і рівняння сумісності деформацій виконуються.

3. Перевірка виконання крайових умов. За умовою задачі на поверхні тіла задано сили. Маємо першу крайову задачу теорії пружності. Граничні умови зв'язують сили на поверхні тіла і компоненти тензора напружень $p_i = \sigma_{ij} n_j$, де p_i–проекції інтенсивності поверхневих сил; n_j–проекції одиничної нормалі до поверхні тіла. У розгорнутому вигляді

$$p_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3,$$

$$p_2 = \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3,$$

$$p_3 = \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3.$$

Поверхня стрижня складається з трьох частин: перша – A_1 лівий торець, друга – A_2 бокова поверхня, третя – A_3 правий торець.

Лівий торець.

Це площина, рівняння якої $x_3 = 0$, проекції одиничної нормалі до нього

$$n_1 = n_2 = 0, \ n_3 = -1.$$

Оскільки розподілені сили, прикладені до нього, невідомі, то, використовуючи крайові умови, можна лише встановити, як повинні бути прикладені сили, щоб розв'язок одержаний методами опору матеріалів був правильним:

$$p_1 = 0, \ p_2 = 0, \ p_3 = \sigma_{33} n_3 = -\frac{m_y}{I_y} x_1.$$

Залишається перевірити, чи еквівалентна система сил моменту m_y.

Головний вектор прикладених сил

$$\vec{P} = \int_{A_1} \vec{p} dA, \; P_1 = 0, \; P_2 = 0,$$

$$P_3 = \int_{A_1} -kx_1 dA = -k \int_{A_1} x_1 dA = -kS_{x_2} = 0,$$

де S_{x_2}–статичний момент перерізу відносно осі x_2, яка є головною. Головний момент може бути заданий своїми проекціями на осі координат. Момент відносно осі x_1

$$M_1 = \int_{A_1} p_3 x_2 dA = \frac{m_y}{I_y} \int_{A_1} x_1 x_2 dA = \frac{m_y}{I_y} I_{xy} = 0,$$

оскільки відцентровий момент I_{xy} відносно головних осей дорівнює нулю. Момент відносно осі x_3

$$M_3 = \int_{A_1} \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \rho dA = 0.$$

Момент відносно осі x_2

$$M_2 = M_y = \int_{A_1} p_3 x_1 dA = \frac{m_y}{I_y} \int_{A_1} x_1^2 dA = \frac{m_y}{I_y} I_y = m_y.$$

Якщо ж сили розподілені якось інакше, то розв'язком опору матеріалів можна користуватися лише на основі принципу Сен-Венана, за яким напруження в точках, віддалених від місця прикладання сил, залежить тільки від головного вектора і головного моменту.

Бокова поверхня A_2. Її рівняння має вигляд $f(x_1, x_2) = 0$ і проекція нормалі на вісь x_3, $n_3 = 0$, проекції нормалі на осі x_1, x_2– $n_1 \neq 0, \; n_2 \neq 0$,

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0, \; \sigma_{33} = m_y x_1 / I_y.$$

Підстановка цих величин у граничні умови на боковій поверхні A_2 показує, що вони виконуються.

Правий торець є площина, рівняння якої $x_3 = l$, проекції одиничної нормалі до нього

$$n_1 = n_2 = 0, \; n_3 = 1.$$

Умови навантаження на правому торці аналогічні лівому, тому з крайових умов можна тільки визначити, при якому розподілі сил результат, одержаний в опорі матеріалів, буде правильним.

4. Визначення переміщень. За формулою Чезаро

$$u_i = u_i^0 + \left(x_j' - x_j^0\right)\omega_{ij}^0 + \int_{M^0}^{M'} \left[\varepsilon_{ik} + (x_j' - x_j)(\varepsilon_{ik},_j - \varepsilon_{kj},_i)\right] dx_k$$

де $\vec{u}^0 = \vec{u}(M^0)$–переміщення точки відліку; ω_{ij}^0–компоненти тензора обертання тіла як абсолютно твердого навколо точки відліку. Точка закріплення тіла вибирається довільно. Оскільки головним інтересом є переміщення за рахунок деформацій, то покладається, що переміщення точки відліку M^0 відсутнє $\vec{u}^0 = 0$ і обертання тіла як абсолютно твердого навколо M^0 також відсутнє $\omega_{ij}^0 = 0$. У наслідку два перших доданки у формулі Чезаро випадають і залишається тільки третій–інтегральний, який дає переміщення за рахунок деформування

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} -\nu k x_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu k x_1 & 0 \\ 0 & 0 & k x_1 \end{pmatrix},$$

$$u_i = \int_{M^0}^{M'} \left[\varepsilon_{ik} + (x_j' - x_j)(\varepsilon_{ik},_j - \varepsilon_{kj},_i)\right] dx_k.$$

Ураховуючи, що всі компоненти тензора деформацій залежать тільки від x_1 і $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0$, знаходимо

$$u_1 = \int_{M^0}^{M'} [\varepsilon_{1k} + (x_1' - x_1)(\varepsilon_{1k},_1 - \varepsilon_{k1},_1) +$$
$$+ (x_2' - x_2)(\varepsilon_{1k},_2 - \varepsilon_{k2},_1) + (x_3' - x_3)(\varepsilon_{1k},_3 - \varepsilon_{k3},_1)] dx_k =$$

$$= \int_{M^0}^{M'} \left[\varepsilon_{1k} - (x_2' - x_2)\varepsilon_{k2},_1 - (x_3' - x_3)\varepsilon_{k3},_1\right] dx_k =$$

$$= \int_{M^0}^{M'} \{[\varepsilon_{11} - (x_2' - x_2)\varepsilon_{12},_1 - (x_3' - x_3)\varepsilon_{13},_1] dx_1 +$$
$$+ [\varepsilon_{12} - (x_2' - x_2)\varepsilon_{22},_1 - (x_3' - x_3)\varepsilon_{23},_1] dx_2 +$$
$$+ [\varepsilon_{13} - (x_2' - x_2)\varepsilon_{32},_1 - (x_3' - x_3)\varepsilon_{33},_1] dx_3\} =$$

$$=\int_{M^0}^{M'}\left\{\varepsilon_{11}dx_1-(x_2'-x_2)\varepsilon_{22,1}\,dx_2-(x_3'-x_3)\varepsilon_{33,1}\,dx_3\right\}=$$

$$=\int_0^{x_1'}\varepsilon_{11}dx_1-\int_0^{x_2'}(x_2'-x_2)\varepsilon_{22,1}dx_2-\int_0^{x_3'}(x_3'-x_3)\varepsilon_{33,1}dx_3=$$

$$=-\nu k\int_0^{x_1'}x_1dx_1+\nu k\int_0^{x_2'}(x_2'-x_2)dx_2-k\int_0^{x_3'}(x_3'-x_3)dx_3=$$

$$=\frac{1}{2}k\left[\nu\left(-x_1^2+x_2^2\right)-x_3^2\right].$$

$$u_2=\int_{M_0}^{M'}\left[\varepsilon_{2k}+(x_j'-x_j)(\varepsilon_{2k,j}-\varepsilon_{kj,2})\right]dx_k=$$

$$=\int_{M^0}^{M'}[\varepsilon_{2k}+(x_1'-x_1)(\varepsilon_{2k,1}-\varepsilon_{k1,2})+$$
$$+(x_2'-x_2)(\varepsilon_{2k,2}-\varepsilon_{k2,2})+(x_3'-x_3)(\varepsilon_{2k,3}-\varepsilon_{k3,2})]dx_k=$$

$$=\int_{M^0}^{M'}\left[\varepsilon_{2k}+(x_1'-x_1)\varepsilon_{2k,1}\right]dx_k=$$

$$=\int_{M^0}^{M'}\{[\varepsilon_{21}+(x_1'-x_1)\varepsilon_{21,1}]dx_1+$$
$$+[\varepsilon_{22}+(x_1'-x_1)\varepsilon_{22,1}]dx_2+[\varepsilon_{23}+(x_1'-x_1)\varepsilon_{23,1}]dx_3\}=$$

$$=\int_{M^0}^{M'}\left[\varepsilon_{22}+(x_1'-x_1)\varepsilon_{22,1}\right]dx_2=-\nu k\int_0^{x_2'}x_1'dx_2=-\nu kx_1'x_2'.$$

$$u_3=\int_{M_0}^{M'}\left[\varepsilon_{3k}+(x_j'-x_j)(\varepsilon_{3k,j}-\varepsilon_{kj,3})\right]dx_k=$$

$$=\int_{M^0}^{M'}[\varepsilon_{3k}+(x_1'-x_1)(\varepsilon_{3k,1}-\varepsilon_{k1,3})+$$
$$+(x_2'-x_2)(\varepsilon_{3k,2}-\varepsilon_{k2,3})+(x_3'-x_3)(\varepsilon_{3k,3}-\varepsilon_{k3,3})]dx_k=$$

$$=\int_{M^0}^{M'}\left[\varepsilon_{3k}+(x_1'-x_1)\varepsilon_{3k,1}\right]dx_k=\int_{M_0}^{M'}\left[\varepsilon_{33}+(x_1'-x_1)\varepsilon_{33,1}\right]dx_3=$$

$$=\int_0^{x_3'}\left[\varepsilon_{33}+(x_1'-x_1)\varepsilon_{33,1}\right]dx_3=k\int_0^{x_3'}x_1'dx_3=kx_1'x_3'.$$

Кручення стрижня круглого поперечного перерізу.

При розгляді задачі кручення стрижня круглого поперечного перерізу (рис.3.22.5) методами опору матеріалів одержані дотичні напруження в поперечному перерізі $\tau_{z\theta} = \frac{m_z}{I_p}\rho$, а всі інші компоненти тензора напружень відсутні. Тензор напружень в циліндричній системі має вигляд

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3\rho/I_p \\ 0 & m_3\rho/I_p & 0 \end{pmatrix}.$$

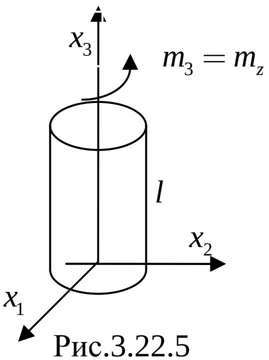

Рис.3.22.5

На даний момент всі рівняння одержано в декартовій системі координат, тому необхідно до неї перейти. Матриця перетворення локального базису

$$\|\alpha_{ij}\| = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Формули перетворення компонент тензора напружень $\sigma'_{km} = \alpha_{ki}\alpha_{mj}\sigma_{ij}$, де величини зі штрихами належать до нової системи координат, а без них–до старої. Оскільки компоненти матриці перетворення в даному випадку $\alpha_{13} = \alpha_{23} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = 0$, то

$$\begin{aligned} &\sigma'_{11} = \alpha_{1i}\alpha_{1j}\sigma_{ij} = \alpha_{11}\alpha_{1j}\sigma_{1j} + \alpha_{12}\alpha_{1j}\sigma_{2j} = \\ &= \alpha_{11}\alpha_{11}\sigma_{11} + \alpha_{11}\alpha_{12}\sigma_{12} + \alpha_{12}\alpha_{11}\sigma_{21} + \\ &+ \alpha_{12}\alpha_{12}\sigma_{22} = \\ &= \sigma_{\rho\rho}\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta\sigma_{\rho\theta} + \sigma_{\theta\theta}\sin^2\theta = 0. \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\sigma'_{22} = \sigma_{\rho\rho}\sin^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta\sigma_{\rho\theta} + \sigma_{\theta\theta}\cos\theta = 0,$$

$$\sigma'_{33} = 0, \quad \sigma'_{12} = 0,$$

$$\sigma'_{13} = \alpha_{1i}\alpha_{3j}\sigma_{ij} = \alpha_{1i}\alpha_{33}\sigma_{i3} = \alpha_{12}\alpha_{33}\sigma_{23} = -\frac{m_3}{I_p}\rho\sin\theta = -\frac{m_3}{I_p}x_2,$$

$$\sigma'_{23}=\alpha_{2i}\alpha_{3j}\sigma_{ij}=\alpha_{2i}\alpha_{33}\sigma_{i3}=\alpha_{22}\alpha_{33}\sigma_{23}=\frac{m_3}{I_p}\rho\cos\theta=\frac{m_3}{I_p}x_2,$$

і матриця тензора напружень у декартовій системі координат має вигляд

$$\hat{\sigma}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -m_3x_2/I_p \\ 0 & 0 & m_3x_1/I_p \\ -m_3x_2/I_p & m_3x_1/I_p & 0 \end{pmatrix}.$$

Перевірка виконання рівнянь теорії пружності і граничних умов.

1. Перевірка виконання рівнянь рівноваги $\sigma_{ij},_j+X_i=0$,

$$\begin{aligned} \sigma_{11},_1+\sigma_{12},_2+\sigma_{13},_3+X_1=0,\\ \sigma_{21},_1+\sigma_{22},_2+\sigma_{23},_3+X_2=0,\\ \sigma_{31},_1+\sigma_{32},_2+\sigma_{33},_3+X_3=0. \end{aligned}$$

За умовою задачі об'ємні сили в напрямках осей x_1,x_2,x_3 не враховуються, тому $X_1=X_2=X_3=0$. Два перші рівняння виконуються, оскільки дві перші компоненти тензора напружень, які в них входять, дорівнюють нулю, а третя не залежить від x_3 і $\sigma_{13},_3=\sigma_{23},_3=0$. У третьому рівнянні перша компонента тензора не залежить від x_1, а друга–від x_2, тому похідні $\sigma_{31},_1=\sigma_{32},_2=0$ дорівнюють нулю, $\sigma_{33}=0$ дорівнює нулю і третє рівняння рівноваги також виконується.

2. Перевірка виконання рівнянь сумісності деформацій – рівнянь Сен-Венана. Перевірка необхідна тому що задача розв'язується у напруженнях. Виконання одних рівнянь рівноваги недостатньо, оскільки рівнянь рівноваги три, а тензор напружень має шість незалежних компонент. Тому кількість невідомих більше, ніж кількість рівнянь у наслідок цього рівняння рівноваги мають нескінченну кількість розв'язків. Для того щоб перевірити виконання рівнянь Сен-Венана, треба знайти деформації. За законом Гука

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij}-\frac{\nu}{1+\nu}\delta_{ij}\sigma_{mm}\right).$$

За умовою задачі перший інваріант $\sigma_{mm} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 0$,

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = 0,$$

$$\varepsilon_{13} = \tfrac{1}{2\mu}\sigma_{13} = -\tfrac{m_3}{2\mu I_p}x_2,$$
$$\varepsilon_{23} = \tfrac{1}{2\mu}\sigma_{23} = \tfrac{m_3}{2\mu I_p}x_1.$$

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -m_3x_2/2\mu I_p \\ 0 & 0 & m_3x_1/2\mu I_p \\ -m_3x_2/2\mu I_p & m_3x_1/2\mu I_p & 0 \end{pmatrix}.$$

Рівняння сумісності деформацій

$$\varepsilon_{ij},_{kl} + \varepsilon_{kl},_{ij} - \varepsilon_{ik},_{jl} - \varepsilon_{jl},_{ik} = 0$$

є диференціальними рівняннями другого порядку. Компоненти тензора деформацій є лінійними функціями, тому їх другі похідні дорівнюють нулю і рівняння сумісності деформацій виконуються.

3. Перевірка виконання крайових умов. За умовою задачі на поверхні тіла задано сили. Маємо першу крайову задачу теорії пружності. Граничні умови зв'язують сили на поверхні тіла і компоненти тензора напружень $p_i = \sigma_{ij}n_j$, де p_i–проекції інтенсивності поверхневих сил; n_j–проекції одиничної нормалі до поверхні тіла. У розгорнутому вигляді

$$p_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3,$$
$$p_2 = \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3,$$
$$p_3 = \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3.$$

Поверхня стрижня складається з трьох частин: перша – A_1 верхній торець, друга – A_2 бокова поверхня, третя – A_3 нижній торець.

Верхній торець $x_3 = l,\ n_1 = n_2 = 0,\ n_3 = 1$, як розподілені прикладені до нього сили невідомо. Відомо тільки, що вони еквівалентні крутному моменту $m_3 = m_z$, тому, використовуючи крайові умови, можна лише встановити, як повинні бути прикладені сили для того, щоб одержаний методами опору матеріалів розв'язок був правильним:

$$p_1 = -\frac{m_3}{I_p}x_2,\ p_2 = \frac{m_3}{I_p}x_1,\ p_3 = 0.$$

Залишається перевірити, чи еквівалентна система сил моменту m_3.

Головний вектор прикладених сил

$$\vec{P} = \int_{A_1} \vec{p}dA,$$

$$P_1 = -\frac{m_3}{I_p}\int_{A_1} x_2 dA = 0,$$

$$P_2 = \frac{m_3}{I_p}\int_{A_1} x_1 dA = 0,\quad P_3 = 0,$$

$$\int_{A_1} x_1 dA = S_{x_2} = 0,\ \int_{A_1} x_2 dA = S_{x_1} = 0,$$

статичні моменти перерізу відносно осей $x_1,\ x_2$, які є головними, дорівнюють нулю. Головний момент може бути заданий своїми проекціями на осі координат. Моменти відносно осей $x_1,\ x_2$

$$M_1 = \int_{A_1} p_3 x_2 dA = 0,\ M_2 = \int_{A_1} p_3 x_1 dA = 0,$$

момент відносно осі x_3

$$\begin{aligned}
&M_3 = \textstyle\int_{A_1}(-p_1x_2 + p_2x_1)dA = \\
&= \tfrac{m_3}{I_p}\textstyle\int_{A_1}\left(x_2^2 + x_2^2\right)dA = \\
&\tfrac{m_3}{I_p}\textstyle\int_{A_1}\rho^2 dA = \tfrac{m_3}{I_p}I_p = m_3.
\end{aligned}$$

Таким чином, розподіл сил статично еквівалентний заданому. Якщо сили розподілені якось інакше, то розв'язком опору матеріалів можна користуватися лише на основі принципу Сен-Венана, за яким напруження в точках, віддалених від місця прикладення сил, залежить тільки від головного вектора і головного моменту.

Бокова поверхня A_2 має рівняння $x_1^2 + x_2^2 = R^2$, де R–радіус циліндра. Проекція одиничної нормалі до поверхні на вісь x_3,

$n_3 = 0$, проекції нормалі на осі x_1, x_2

$$n_1 = x_1/R,\ n_2 = x_2/R,$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{33} = 0.$$

Підстановка цих величин у граничні умови на боковій поверхні A_2 показує, що два перших рівняння тотожньо виконуються, бо всі члени дорівнюють нулю, а третє має форму

$$-\frac{m_3}{I_p} x_2 \frac{x_1}{R} + \frac{m_3}{I_p} x_1 \frac{x_2}{R} = 0$$

і також виконується.

Нижній торець. Умови навантаження на нижньому торці аналогічні верхньому, тому з крайових умов можна тільки визначити, при якому розподілі сил результат, одержаний в опорі матеріалів, буде правильним.

4. Визначення переміщень. За формулою Чезаро

$$u_i = u_i^0 + \left(x'_j - x_j^0\right)\omega_{ij}^0 + \int_{M^0}^{M'} \left[\varepsilon_{ik} + (x'_j - x_j)(\varepsilon_{ik},_j - \varepsilon_{kj},_i)\right] dx_k,$$

де $\vec{u}^0 = \vec{u}(M^0)$–переміщення точки відліку; ω_{ij}^0–компоненти тензора обертання тіла як абсолютно твердого навколо точки відліку. Точка закріплення тіла вибирається довільно. Головним інтересом є переміщення за рахунок деформацій, тому покладається, що переміщення точки відліку M^0 відсутнє $\vec{u}^0 = 0$ і обертання тіла, як абсолютно твердого, навколо M^0 також відсутнє $\omega_{ij}^0 = 0$. У наслідок цього два перших доданки у формулі Чезаро випадають і залишається тільки третій–інтегральний, який дає переміщення за рахунок деформування

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -m_3 x_2/2\mu I_p \\ 0 & 0 & m_3 x_1/2\mu I_p \\ -m_3 x_2/2\mu I_p & m_3 x_1/2\mu I_p & 0 \end{pmatrix},$$

$$u_i = \int_{M^0}^{M'} \left[\varepsilon_{ik} + (x'_j - x_j)(\varepsilon_{ik},_j - \varepsilon_{kj},_i)\right] dx_k.$$

Ураховуючи, що всі компоненти тензора деформацій залежать тільки від x_3 і $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = 0$, знаходимо

$$u_1 = \int_{M^0}^{M'} [\varepsilon_{1k} + (x_1' - x_1)(\varepsilon_{1k},_1 - \varepsilon_{k1},_1) +$$
$$+ (x_2' - x_2)(\varepsilon_{1k},_2 - \varepsilon_{k2},_1) + (x_3' - x_3)(\varepsilon_{1k},_3 - \varepsilon_{k3},_1)] dx_k =$$
$$= \int_{M^0}^{M'} \left[\varepsilon_{1k} - (x_2' - x_2)\varepsilon_{k2},_1 - (x_3' - x_3)\varepsilon_{k3},_1\right] dx_k =$$
$$= \int_{M^0}^{M'} \{[\varepsilon_{11} - (x_2' - x_2)\varepsilon_{12},_1 - (x_3' - x_3)\varepsilon_{13},_1] dx_1 +$$
$$+ [\varepsilon_{12} - (x_2' - x_2)\varepsilon_{22},_1 - (x_3' - x_3)\varepsilon_{23},_1] dx_2 +$$
$$+ [\varepsilon_{13} - (x_2' - x_2)\varepsilon_{32},_1 - (x_3' - x_3)\varepsilon_{33},_1] dx_3\} =$$
$$= \int_{M^0}^{M'} \{[-(x_3' - x_3)\varepsilon_{23},_1] dx_2 + [\varepsilon_{13} - (x_2' - x_2)\varepsilon_{32},_1] dx_3\} =$$
$$= \tfrac{m_3}{2\mu I_p} \int_{M^0}^{M'} [(x_3' - x_3) dx_2 - x_2' dx_3] =$$
$$= -\tfrac{m_3}{2\mu I_p} \int_0^{x_2'} x_3' dx_2 - \tfrac{m_3}{2\mu I_p} \int_0^{x_3'} x_2' dx_3 = -\tfrac{m_3}{\mu I_p} x_2' x_3'.$$

Аналогічно визначається

$$u_2 = \frac{m_3}{\mu I_p} x_1' x_3',$$

$$u_3 = \int_{M^0}^{M'} \left[\varepsilon_{3k} + (x_j' - x_j)(\varepsilon_{3k},_j - \varepsilon_{kj},_3)\right] dx_k =$$
$$= \int_{M^0}^{M'} \left[\varepsilon_{3k} + (x_1' - x_1)(\varepsilon_{3k},_1 - \varepsilon_{k1},_3) +\right.$$
$$\left. + (x_2' - x_2)(\varepsilon_{3k},_2 - \varepsilon_{k2},_3) + (x_3' - x_3)(\varepsilon_{3k},_3 - \varepsilon_{k3},_3)\right] dx_k =$$
$$= \int_{M^0}^{M'} \{[\varepsilon_{31} + (x_1' - x_1)\varepsilon_{31},_1 + (x_2' - x_2)\varepsilon_{31},_2] dx_1 +$$
$$+ [\varepsilon_{32} + (x_1' - x_1)\varepsilon_{32},_1 - (x_2' - x_2)\varepsilon_{32},_2] dx_2 +$$
$$+ [\varepsilon_{33} + (x_1' - x_1)\varepsilon_{33},_1 + (x_2' - x_2)\varepsilon_{33},_2] dx_3\} =$$
$$= \int_{M^0}^{M'} \{[\varepsilon_{31} + (x_2' - x_2)\varepsilon_{31},_2] dx_1 + [\varepsilon_{32} + (x_1' - x_1)\varepsilon_{32},_1] dx_2\} =$$
$$= \int_0^{x_1'} [\varepsilon_{31} + (x_2' - x_2)\varepsilon_{31},_2] dx_1 + \int_0^{x_2'} [\varepsilon_{32} + (x_1' - x_1)\varepsilon_{32},_1] dx_2 =$$
$$= -\frac{m_3}{I_p} \int_0^{x_1'} x_2' dx_1 + \frac{m_3}{I_p} \int_0^{x_2'} x_1' dx_2 = \frac{m_3}{I_p} \left(-x_2' x_1' + x_1' x_2'\right) = 0.$$

Розділ 4

Рівняння теорії пружності в криволінійних координатах

4.1 Криволінійні координати і косокутний базис

4.1.1 Локальний базис, контраваріантні і коваріантні компоненти

Криволінійними координатами можуть бути три довільних параметри, які однозначно визначають положення кожної точки і позначаються q^1, q^2, q^3 (рис.4.1.1). Якщо x_i–декартові координати точки, то існує однозначна залежність

$$x_i = x_i(q^1,q^2,q^3). \tag{4.1.1}$$

Необхідною і достатньою умовою існування взаємно однозначної залежності є нерівність нулю якобіана перетворення (4.1.1):

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q^1} & \frac{\partial x_1}{\partial q^2} & \frac{\partial x_1}{\partial q^3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q^1} & \frac{\partial x_2}{\partial q^2} & \frac{\partial x_2}{\partial q^3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q^1} & \frac{\partial x_3}{\partial q^2} & \frac{\partial x_3}{\partial q^3} \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial x_i}{\partial q^j}\right| \neq 0. \tag{4.1.2}$$

Для того щоб перетворення (4.1.1) зберігало орієнтацію системи координат, тобто права система перетворювалась на праву, якобіан (4.1.2) повинен бути додатним. Якщо фіксувати величину одного з параметрів, наприклад покласти $q^1 = const$ і змінювати неперервно два інших q^2 і q^3, то одержимо деяке сімейство поверхонь. Аналогічно, фіксуючи q^2 і q^3, одержимо ще два сімейства поверхонь. Завдяки тому, що на залежності (4.1.1) накладені умови однозначності, в кожній точці перетинаються тільки три поверхні, по одній з кожного сімейства. Ці поверхні є координатними поверхнями (див. рис.4.1.1).

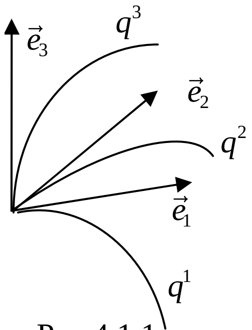

Рис.4.1.1

Напрямок координатних ліній q^1,q^2,q^3 визначається за допомогою векторів локального координатного базису в кожній точці $\vec{e}_1$,$\vec{e}_2$,$\vec{e}_3$, які є дотичними до відповідних координатних ліній q^1,q^2,q^3. На відміну від декартових координат, в криволінійних координатах в загальному випадку напрямок векторів координатного базису, їх довжина і кут між ними змінюються при переході від точки до точки. В криволінійній системі довільний вектор $\vec{a}$ можна задати в точці через лінійну комбінацію векторів локального базису:

$$\vec{a} = \vec{e}_1 a^1 + \vec{e}_2 a^2 + \vec{e}_3 a^3, \quad \vec{a} = \vec{e}_i a^i. \tag{4.1.3}$$

Величини a^i називаються контраваріантними компонентами вектора $\vec{a}$. Знак суми за правилом Ейнштейна не ставиться. В усіх формулах типу (4.1.3), коли один і той самий індекс стоїть на різних рівнях, мають на увазі суму, кількість членів якої дорівнює розмірності простору. Величини контраваріантних компонент найпростіше визначаються шляхом введення взаємного базису. Вектори взаємного базису $\vec{e}^{\,i}$ визначаються через вектори основного наступним способом

$$\vec{e}^{\,i} = \frac{\vec{e}_j \times \vec{e}_k}{V}, \tag{4.1.4}$$

де i,j,k—індекси, які створюють циклічну перестановку з 1,2,3; V–об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах основного базису, і визначається як їх змішаний добуток

$$V = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3). \tag{4.1.5}$$

За визначенням вектор взаємного базису $\vec{e}^1$ перпендикулярний до векторів основного базису $\vec{e}_2$ і $\vec{e}_3$, $\vec{e}^2$–до $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_3$, $\vec{e}^3$–до $\vec{e}_2$ і $\vec{e}_1$. Тому скалярний добуток

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}^m = \begin{cases} 1 & (i = m), \\ 0 & (i \neq m). \end{cases} \tag{4.1.6}$$

Використовуючи взаємний базис, кожен вектор можна задати у вигляді лінійної комбінації його базісних векторів

$$\vec{a} = \vec{e}^1 a_1 + \vec{e}^2 a_2 + \vec{e}^3 a_3, \;\; \vec{a} = \vec{e}^k a_k. \tag{4.1.7}$$

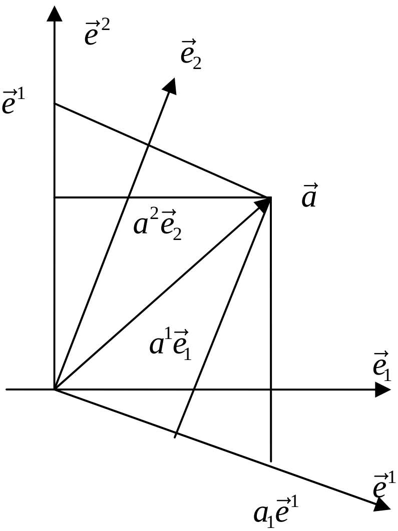

Рис.4.1.2

Величини a_k називаються коваріантними компонентами вектора $\vec{a}$ (рис.4.1.2). Якщо скалярно помножити $\vec{a} \cdot \vec{e}_i$, задавши вектор $\vec{a}$ як лінійну комбінацію векторів взаємного базису, то одержимо $\vec{a} \cdot \vec{e}_i = \vec{e}^k a_k \cdot \vec{e}_i = \vec{e}^k \cdot \vec{e}_i a_k$, і врахувати те, що $\vec{e}^k \cdot \vec{e}_i = \begin{cases} 1 & (i = k), \\ 0 & (i \neq k), \end{cases}$ то

$$a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i. \tag{4.1.8}$$

Аналогічно визначаються контраваріантні компоненти вектора

$$a^k = \vec{a} \cdot \vec{e}^k. \tag{4.1.9}$$

4.1.2 Метричний тензор і вимірювання довжини

Для того щоб вивчати деформований стан, необхідно мати можливість виміряти відстань між точками простору або довжину відрізка і кути між відрізками, які перетинаються в одній точці. Квадрат довжини вектора $d\vec{r}$, який з'єднує дві близькі точки M^0 і M^1 (рис.4.1.3), може бути виражений як скалярний добуток

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r},$$

де $ds = |d\vec{r}|$. Виражаємо вектор $d\vec{r}$ через контраваріантні компоненти

$$ds^2 = \vec{e}_i dx^i \cdot \vec{e}_m dx^m =$$

$$= \vec{e}_i \vec{e}_m dx^i dx^m,$$

$$ds^2 = g_{im} dx^i dx^m,$$

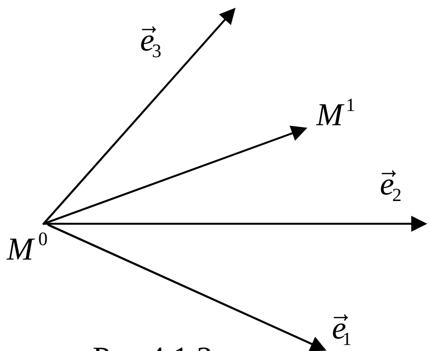

Рис.4.1.3

де величини $g_{im} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_m$– коваріантні компоненти метричного тензора. Малий вектор $d\vec{r}$ можна також виразити через коваріантні компоненти

$$d\vec{r} = \vec{e}^k dx_k$$

і відповідно квадрат його довжини в формі

$$ds^2 = \vec{e}^i dx_i \cdot \vec{e}^k dx_k = \vec{e}^i \cdot \vec{e}^k dx_i dx_k,$$

$$ds^2 = g^{ik} dx_i dx_k,$$

де

$$g^{ik} = \vec{e}^i \cdot \vec{e}^k$$

контраваріантні компоненти метричного тензора, або

$$ds^2 = \vec{e}^i dx_i \cdot \vec{e}_k dx^k = \vec{e}^i \cdot \vec{e}_k dx_i dx^k,$$

$$ds^2 = g^i_k dx_i dx^k,$$

де g^i_k–змішані компоненти метричного тензора. Раніше було показано, що

$$\vec{e}^i \cdot \vec{e}_k = \begin{cases} 1 & (i = k), \\ 0 & (i \neq k), \end{cases} \quad \text{тому} \quad g^i_k = \begin{cases} 1 & (i = k), \\ 0 & (i \neq k), \end{cases}$$

і квадрат довжини можна виразити у формі $ds^2 = dx_i dx^i$.

Якщо система координат ортогональна, тобто вектори локального базису взаємно перепендикулярні, то їх скалярні добутки дорівнюють нулю. Внаслідок цього позадіагональні компоненти метричного тензора дорівнюють нулю і він діагоналізується:

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}.$$

В ортогональних системах квадрат довжини малого відрізка приймає форму

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2,$$

або

$$ds^2 = H_1^2(dx^1)^2 + H_2^2(dx^2)^2 + H_3^2(dx^3)^2,$$

де $g_{11} = H_1^2, \quad g_{22} = H_2^2, \quad g_{33} = H_3^2$. Величини $H_1, \ H_2, \ H_3$ називаються коефіцієнтами Ляме.

4.1.3 Коваріантні і контраваріантні компоненти тензора

Коваріантні компоненти вектора і будь-якого тензора можуть бути виражені через контраваріантні і навпаки. Оскільки довільний вектор $\vec{a}$ може бути задано у вигляді $\vec{a} = \vec{e}_i a^i$, $\vec{a} = \vec{e}^k a_k$, то $\vec{e}_i a^i = \vec{e}^k a_k$. Якщо помножити скалярно обидві сторони на $\vec{e}_m$, то

$$\vec{e}_m \cdot \vec{e}_i a^i = \vec{e}_m \cdot \vec{e}^k a_k,$$

але $\quad \vec{e}_m \cdot \vec{e}_i = g_{mi}, \ \ \vec{e}_m \cdot \vec{e}^k = g_m^k, \quad$ звідки

$$g_{mi} a^i = g_m^k a_k,$$

$$g_m^k a_k = a_m, \ \text{ або } \ a_m = g_{mi} a^i.$$

Аналогічно $a^k = g^{ki} a_i$.

Якщо скористатися останніми співвідношеннями, то можна одержати

$$a_m = g_{mk} a^k = g_{mk} g^{ki} a_i, \ \ a_m = g_{mk} g^{ki} a_i,$$

звідки випливає, що

$$g_{mk}g^{ki} = \left(\begin{cases} 1 & (m=i), \\ 0 & (m \neq i). \end{cases} \right)$$

Тобто матриці метричного тензора з коваріантними і контраваріантними компонентами взаємнообернені

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тому контраваріантні компоненти метричного тензора визначають за формулою

$$g^{ij} = \frac{G_{ij}}{|g_{ij}|},$$

де G_{ij}–алгебраїчне доповнення компоненти g_{ij}; $|g_{ij}|$—визначник. Зв'язок коваріантних і контраваріантних компонент будь-якого тензора вищих рангів подається формулами аналогічними формулам для тензора першого рангу (вектора). Наприклад, для тензора другого рангу

$$\sigma_{ij} = g_{ik}g_{jm}\sigma^{km},$$

$$\sigma^{ij} = g^{ik}g^{jm}\sigma_{km}.$$

4.1.4 Вимірювання площі і об'єму

Через компоненти метричного тензора можна знайти площу паралелограма, побудованого на векторах координатного базиса. Якщо A_{12}–площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ (рис.4.1.4), то

$$A_{12} = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \sin\alpha = \sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{12}}\sin\alpha,$$

$$g_{12} = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = |\vec{e}_1||\vec{e}_2| \cos\alpha = \sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}\cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}, \ \ \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{g_{12}^2}{g_{11}g_{22}}},$$

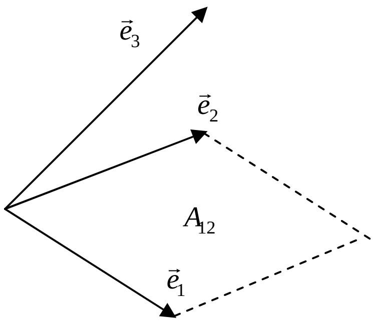

Рис.4.1.4

$$A_{12} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Аналогічно

$$A_{23} = \sqrt{g_{22}g_{33} - g_{23}^2},$$

$$A_{31} = \sqrt{g_{11}g_{33} - g_{13}^2}.$$

Визначення об'єму тіла приводить до інтеграла $V = \int_V dV$. Об'єм елементарного паралелепіпеда dV, побудованого на векторах $\vec{e}_1 dq^1$, $\vec{e}_2 dq^2$, $\vec{e}_3 dq^3$, можна визначити, використовуючи змішаний добуток

$$dV = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) dq^1 dq^2 dq^3.$$

Таким чином, задача зводиться до визначення об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах локального базису, який дорівнює змішаному добутку

$$v = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = |\vec{e}_1||(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)|\cos\beta,$$

де β–кут між векторами $\vec{e}_1$ і $(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)$. Раніше було знайдено $|\vec{e}_1| = \sqrt{g}_{11}$ і $|(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)| = \sqrt{g_{22}g_{33} - g_{23}^2}$. Для визначення $\cos\beta$ можна скористатися тим, що за визначенням векторів спряженого базису

$$\vec{e}^1 = \frac{(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)}{v},$$

тому вектори $\vec{e}^1$ і $(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)$ паралельні і відрізняються тільки коефіцієнтом, тому кут β між $\vec{e}_1$ і вектором $\vec{e}^1$ або $(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)$ однаковий. Використовуючи скалярний добуток, можна зайти

$$\cos\beta = \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}^1}{|\vec{e}_1||\vec{e}^1|}.$$

Оскільки $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}^1 = 1$, $|\vec{e}_1| = \sqrt{g}_{11}$, $|\vec{e}^1| = \sqrt{g}^{11}$. Контраваріантну компоненту g^{11} метричного тензора можна виразити через коваріантні компоненти як елемента матриці $\|g^{ij}\|$, оберненої до $\|g_{ij}\|$:

$$g^{11} = \frac{G_{11}}{g} = \frac{g_{22}g_{33} - g_{23}^2}{g},$$

де g–визначник $g = |g_{ij}|$. Підставляючи всі ці величини в формулу $v = |\vec{e}_1||(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)|\cos\beta$, одержуємо

$$v = \frac{\sqrt{g}_{11}\sqrt{g_{22}g_{33} - g_{23}^2}\sqrt{g}}{\sqrt{g}_{11}\sqrt{g_{22}g_{33} - g_{23}^2}} = \sqrt{g}, \quad v^2 = g.$$

Таким чином, метричний тензор визначає всі геометричні характеристики простору–довжину, площу, об'єм.

4.2 Диференціювання базисних векторів

4.2.1 Коваріантна похідна

Визначення зміни вектора в криволінійній системі координат пов'язане не тільки із визначенням зміни його проекцій при переході від точки до точки, як в декартовій системі координат, а й із зміною локального базису, оскільки через вектори локального базису виражаються коваріантні і контраваріантні компоненти вектора. Знайдемо диференціал вектора $\vec{a} = \vec{e}_k a^k$:

$$d\vec{a} = d\left(\vec{e}_k a^k\right) = \vec{e}_k da^k + a^k d\vec{e}_k.$$

У криволінійній системі координат радіус-вектор довільної точки є функцією від вибраних параметрів q^1, q^2, q^3

$$\vec{R} = \vec{R}\left(q^1, q^2, q^3\right).$$

Базисні вектори в криволінійній системі визначають за формулою

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{R}}{\partial q^i}.$$

Для того щоб визначити зміну базисних векторів, треба знайти їх похідні

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q^k} = \vec{e}_{ik}.$$

Оскільки

$$\vec{e}_{ik} = \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial q^i \partial q^k} = \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial q^k \partial q^i}, \text{ то } \quad \vec{e}_{ik} = \vec{e}_{ki}.$$

Для визначення похідних базисних векторів скористаємось обхідним шляхом. Розглянемо похідні від скалярних добутків векторів локального базису по координатах

$$\frac{\partial}{\partial q^k}(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \vec{e}_{ik} \cdot \vec{e}_j + \vec{e}_i \cdot \vec{e}_{jk},$$

$$\frac{\partial}{\partial q^j}(\vec{e}_k \cdot \vec{e}_i) = \vec{e}_{kj} \cdot \vec{e}_i + \vec{e}_k \cdot \vec{e}_{ij},$$

$$\frac{\partial}{\partial q^i}(\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k) = \vec{e}_{ji} \cdot \vec{e}_k + \vec{e}_j \cdot \vec{e}_{ki}.$$

Якщо скласти два перших співвідношення, відняти від них третє, врахувати те, що $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ij}$, то одержимо

$$\vec{e}_{ij} \cdot \vec{e}_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right).$$

Величини, які стоять справа, позначаються $\Gamma_{ij,k}$ або $[_{ij},_k]$ і називаються символами Крістоффеля першого роду

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right).$$

Як будь-який вектор, похідні базисних векторів, можна задати у вигляді лінійної комбінації базисних векторів

$$\vec{e}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \vec{e}_k.$$

Коефіцієнти Γ_{ij}^k називаються символами Крістоффеля другого роду. Помножимо скалярно останнє співвідношення на базисний вектор

$$\vec{e}_{ij} \cdot \vec{e}_m = \Gamma_{ij}^k \vec{e}_k \cdot \vec{e}_m.$$

Оскільки

$$\vec{e}_k \cdot \vec{e}_m = g_{km},$$

то

$$\vec{e}_{ij} \cdot \vec{e}_m = g_{km} \Gamma_{ij}^k.$$

Зліва стоїть символ Крістоффеля першого роду, тому

$$\Gamma_{ij,m} = g_{km} \Gamma_{ij}^k.$$

Якщо помножити ліву і праву частини на контраваріантну компоненту метричного тензора і згорнути, то одержимо

$$g^{mn}\Gamma_{ij,m} = g^{mn}g_{km}\Gamma^k_{ij} = g^n_k\Gamma^k_{ij} = \Gamma^n_{ij},$$

тобто

$$\Gamma^m_{ij} = g^{mn}\Gamma_{ij,n}.$$

Таким чином визначаються коефіцієнти розкладу похідних базисних векторів і, фактично, похідних. Повернувшись до визначення диференціала вектора

$$da^k = \frac{\partial a^k}{\partial q^m}dq^m,$$

$$d\vec{e}_k = \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial q^m}dq^m = \vec{e}_{km}dq^m = \Gamma^n_{km}\vec{e}_n dq^m,$$

в результаті підстановки одержимо

$$d\vec{a} = \vec{e}_k\frac{\partial a^k}{\partial q^m}dq^m + a^k\Gamma^n_{km}\vec{e}_n dq^m =$$

$$= \vec{e}_n\frac{\partial a^n}{\partial q^m}dq^m + a^k\Gamma^n_{km}\vec{e}_n dq^m = \vec{e}_n\left(\frac{\partial a^n}{\partial q^m} + a^k\Gamma^n_{km}\right)dq^m,$$

$$d\vec{a} = \vec{e}_n\left(\frac{\partial a^n}{\partial q^m} + a^k\Gamma^n_{km}\right)dq^m.$$

Порівняння одержаного виразу для диференціала вектора в криволінійній системі координат з його виразом в декартовій системі

$$d\vec{a} = \vec{e}_n\frac{\partial a_n}{\partial x_m}dx_m$$

приводить до висновку, що величина

$$a^n_{,m} = \frac{\partial a^n}{\partial q^m} + a^k\Gamma^n_{km}$$

відіграє роль похідної в криволінійній системі координат і називається коваріантною або абсолютною похідною, тому можна записати

$$d\vec{a} = \vec{e}_n a^n_{,m}dq^m.$$

Аналогічно, при розгляді диференціала вектора, вираженого через коваріантні компоненти, одержуємо

$$a_i,_j = \frac{\partial a_i}{\partial q^j} - a_k \Gamma_{ij}^k.$$

Якщо розглядається коваріантна похідна від тензорів, ранг яких вище першого, то кількість доданків дорівнює рангу тензора. Наприклад,

$$\varepsilon_{ij},_k = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial q^k} - \varepsilon_{im}\Gamma_{jk}^m - \varepsilon_{mj}\Gamma_{ik}^m,$$

$$\sigma_{,k}^{ij} = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial q^k} + \sigma^{im}\Gamma_{mk}^j + \sigma^{mj}\Gamma_{mk}^i.$$

4.2.2 Фізичні компоненти тензора

У фізичних задачах за базисні вектори вибирають вектори одиничної довжини. В зв'язку з цим фізичними компонентами тензора називаються компоненти у випадку, коли вектори локального базису нормовані тобто мають одиничну довжину. Величини фізичних компонент можна одержати наступним чином, розглядається довільний вектор $\vec{a}$, $\vec{a} = \vec{e}_k a^k$, і нормуються базисні вектори

$$\vec{\tilde{e}}_k = \frac{\vec{e}_k}{|\vec{e}_k|} = \frac{\vec{e}_k}{\sqrt{q_{kk}}}, \quad \left|\vec{\tilde{e}}_k\right| = 1.$$

Вектор $\vec{a}$ записується у вигляді

$$\vec{a} = \frac{\vec{e}_k}{\sqrt{q_{kk}}}\sqrt{q_{kk}}a^k = \vec{\tilde{e}}_k \tilde{a}^k.$$

Величини

$$\tilde{a}^k = \sqrt{q_{kk}}a^k$$

називаються фізичними компонентами. Аналогічно

$$\vec{a} = \vec{e}^k a_k = \frac{\vec{e}^k}{\sqrt{q^{kk}}}\sqrt{q^{kk}}a_k = \vec{\tilde{e}}^k \tilde{a}_k,$$

$$\tilde{a}_k = \sqrt{q^{kk}}a_k.$$

Слід мати на увазі, що справа суми по k немає:

$$\tilde{a}_1 = \sqrt{q^{11}}a_1,\ \ \tilde{a}_2 = \sqrt{q^{22}}a_2,\ \ \tilde{a}_3 = \sqrt{q^{33}}a_3.$$

4.3 Рівняння в ортогональних системах координат

4.3.1 Циліндрична система координат

Як приклад розглядається використання розглянутих методів для одержання рівнянь теорії пружності в циліндричних координатах. Узагальнені координати $q^1 = \rho$, $q^2 = \theta$, $q^3 = z$. Радіус-вектор

$$\vec{R} = \vec{i}_1 x_1 + \vec{i}_2 x_2 + \vec{i}_3 x_3$$

виражається через узагальнені координати

$$x_1 = \rho\cos\theta,\ \ x_2 = \rho\sin\theta,\ \ x_3 = z,$$

$$\vec{R} = \vec{i}_1 \rho\cos\theta + \vec{i}_2 \rho\sin\theta + \vec{i}_3 z.$$

Знаходять вектори локального базису

$$\vec{e}_k = \frac{\partial \vec{R}}{\partial q^k},$$

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_\rho = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \rho} = \vec{i}_1 \cos\theta + \vec{i}_2 \sin\theta,$$

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \theta} = -\vec{i}_1 \rho\sin\theta + \vec{i}_2 \rho\cos\theta,$$

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_z = \frac{\partial \vec{R}}{\partial z} = \vec{i}_3.$$

Визначають коваріантні компоненти метричного тензора

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j,$$

$$g_{11} = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1,\ \ g_{22} = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \rho^2,\ \ g_{33} = 1,$$

$$g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0,$$

$$\|g_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначають контраваріантні компоненти метричного тензора

$$g^{ij} = \frac{G_{ij}}{g}, \ \ g = |g_{ij}|,$$

$$g = \rho^2,$$

$$g^{11} = \frac{\rho^2}{\rho^2} = 1, \ \ g^{22} = \frac{1}{\rho^2}, \ g^{33} = \frac{\rho^2}{\rho^2} = 1,$$

$$g^{12} = g^{23} = g^{31} = 0.$$

Визначають символи Крістоффеля першого роду

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right).$$

В цьому випадку від нуля відмінні тільки похідні

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial q^1} = 2\rho,$$

тому

$$\Gamma_{22,1} = -\rho, \ \ \Gamma_{12,2} = \Gamma_{21,2} = \rho.$$

Всі останні індекси Крістоффеля першого роду дорівнюють нулю.

Визначають символи Крістофеля другого роду

$$\Gamma^m_{ij} = g^{mk}\Gamma_{ij,k} = g^{m1}\Gamma_{ij,1} + g^{m2}\Gamma_{ij,2} + g^{m3}\Gamma_{ij,3}.$$

В даному випадку відмінні від нуля тільки g^{11},g^{22},g^{33}, тому

$$\Gamma^1_{22} = -\rho, \quad \Gamma^2_{21} = \frac{1}{\rho^2}\rho = \frac{1}{\rho}$$

усі останні Γ^k_{ij} дорівнюють нулю.

Рівняння рівноваги

У теорії пружності використовуються в основному контраваріантні компоненти тензора напружень, тому

$$\sigma^{ij}_{,j} + X^i = 0.$$

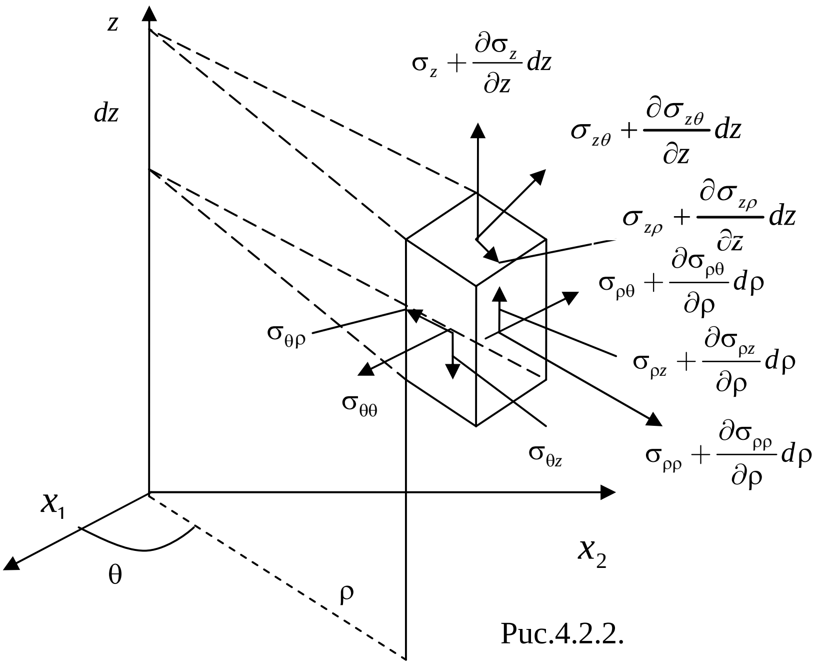

Рис.4.2.2.

Перше рівняння

$$\sigma,_1^{i1}+\sigma,_2^{i2}+\sigma,_3^{i3}+X^i=0,$$

$$\sigma,_1^{11}=\frac{\partial\sigma^{11}}{\partial q^1}+\sigma^{1m}\Gamma^1_{m1}+\sigma^{1m}\Gamma^1_{m1}=\frac{\partial\sigma^{11}}{\partial q^1}+2\sigma^{1m}\Gamma^1_{m1}.$$

Всі $\Gamma^1_{m1}=0$, тому

$$\sigma,_1^{11}=\frac{\partial\sigma^{11}}{\partial q^1},$$

$$\sigma,_2^{12}=\frac{\partial\sigma^{12}}{\partial q^2}+\sigma^{1m}\Gamma^2_{m2}+\sigma^{m2}\Gamma^1_{m2}=\frac{\partial\sigma^{12}}{\partial q^2}+\sigma^{11}\Gamma^2_{12}+\sigma^{22}\Gamma^1_{22},$$

$$\sigma,_3^{13}=\frac{\partial\sigma^{13}}{\partial q^3}+\sigma^{1m}\Gamma^3_{m3}+\sigma^{m3}\Gamma^1_{m3}=\frac{\partial\sigma^{13}}{\partial q^3},$$

$$\frac{\partial\sigma^{11}}{\partial q^1}+\frac{\partial\sigma^{12}}{\partial q^2}+\frac{\partial\sigma^{13}}{\partial q^3}+\sigma^{11}\Gamma^2_{12}+\sigma^{22}\Gamma^1_{22}+X^1=0.$$

Переходимо до фізичних компонент

$$\sigma_{\rho\rho} = \tilde{\sigma}^{11} = \sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}\sigma^{11} = \sigma^{11},$$

$$\frac{\partial\sigma^{11}}{\partial q^1} = \frac{\partial\sigma_{\rho\rho}}{\partial\rho},$$

$$\sigma_{\rho\theta} = \tilde{\sigma}^{12} = \sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}\sigma^{12} = \rho\sigma^{12},$$

$$\sigma^{12} = \frac{1}{\rho}\sigma_{\rho\theta},$$

$$\frac{\partial\sigma^{12}}{\partial q^2} = \frac{\partial\sigma^{12}}{\partial\theta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{\rho\theta}}{\partial\theta},$$

$$\sigma_{\rho z} = \tilde{\sigma}^{13} = \sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{33}}\sigma^{13} = \sigma^{13},$$

$$\frac{\partial\sigma^{13}}{\partial q^3} = \frac{\partial\sigma_{\rho z}}{\partial z},$$

$$X_\rho = \tilde{X}^i = \sqrt{g_{11}}X^1 = X^1,$$

$$\sigma^{11}\Gamma^2_{12} = \sigma_{\rho\rho}\frac{1}{\rho},$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \tilde{\sigma}^{22} = \sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{22}}\sigma^{22} = \rho^2\sigma^{22},$$

$$\sigma^{22} = \frac{1}{\rho^2}\sigma_{\theta\theta},$$

$$\sigma^{22}\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{\rho^2}\sigma_{\theta\theta}\rho = -\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\rho}.$$

Перше рівняння, виражене через фізичні компоненти, має вигляд

$$\frac{\partial\sigma_{\rho\rho}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{\rho\theta}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_{\rho\theta} - \sigma_{\theta\theta}}{\rho} + X_\rho = 0.$$

Розглядаємо друге рівняння

$$\sigma,^{21}_1 + \sigma,^{22}_2 + \sigma,^{23}_3 + X^2 = 0,$$

$$\sigma,^{21}_1 = \frac{\partial\sigma^{21}}{\partial q^1} + \sigma^{2m}\Gamma^1_{m1} + \sigma^{m1}\Gamma^2_{m1} = \frac{\partial\sigma^{21}}{\partial q^1} + \sigma^{21}\Gamma^2_{12},$$

$$\sigma_{\rho\theta} = \tilde{\sigma}^{21} = \sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}\sigma^{12} = \rho\sigma^{12},$$

$$\sigma^{12} = \frac{\sigma_{\rho\theta}}{\rho},$$

$$\frac{\partial \sigma^{21}}{\partial q^1} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\sigma_{\rho\theta}}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{\rho\theta}}{\partial \rho} - \frac{\sigma_{\rho\theta}}{\rho^2},$$

$$\frac{\partial \sigma^{21}}{\partial q^1} + \sigma^{21}\Gamma^2_{12} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{\rho\theta}}{\partial \rho} - \frac{\sigma_{\rho\theta}}{\rho^2} + \frac{\sigma_{\rho\theta}}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{\rho\theta}}{\partial \rho},$$

$$\sigma^{22}_{,2} = \frac{\partial \sigma^{22}}{\partial q^2} + 2\sigma^{2m}\Gamma^2_{m2} = \frac{\partial \sigma^{22}}{\partial q^2} + 2\sigma^{21}\Gamma^2_{12},$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \tilde{\sigma}^{22} = \sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{22}}\sigma^{22} = \rho^2\sigma^{22},$$

$$\sigma^{22} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\rho^2},$$

$$\sigma^{22}_{,2} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2\frac{\sigma_{\rho\theta}}{\rho}\frac{1}{\rho},$$

$$\sigma^{23}_{,3} = \frac{\partial \sigma^{23}}{\partial q^3} + \sigma^{2m}\Gamma^3_{m3} + \sigma^{m3}\Gamma^2_{m3} = \frac{\partial \sigma^{23}}{\partial q^3},$$

$$\sigma_{\theta z} = \tilde{\sigma}^{23} = \sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{33}}\sigma^{23} = \rho\sigma^{23},$$

$$\sigma^{23} = \frac{1}{\rho}\sigma_{\theta z},$$

$$\sigma^{23}_{,3} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z},$$

$$X_\theta = \tilde{X}^2 = \sqrt{g_{22}}X^2 = \rho X^2,$$

$$X^2 = \frac{1}{\rho}X_\theta.$$

Друге рівняння рівноваги в фізичних компонентах

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2\frac{\sigma_{\rho\theta}}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial z} + \frac{1}{\rho}X_\theta = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial z} + 2\frac{\sigma_{\rho\theta}}{\rho} + X_\theta = 0.$$

Третє рівняння

$$\sigma^{31}_{,1} + \sigma^{32}_{,2} + \sigma^{33}_{,3} + X^3 = 0,$$

$$\sigma,^{31}_{1} = \frac{\partial \sigma^{31}}{\partial q^1} + \sigma^{3m}\Gamma^1_{m1} + \sigma^{m1}\Gamma^3_{m1} = \frac{\partial \sigma^{31}}{\partial q^1},$$

$$\sigma_{\rho z} = \tilde{\sigma}^{31} = \sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{33}}\sigma^{31} = \sigma^{31},$$

$$\sigma,^{32}_{2} = \frac{\partial \sigma^{32}}{\partial q^2} + \sigma^{m2}\Gamma^3_{m2} + \sigma^{3m}\Gamma^2_{m2} = \frac{\partial \sigma^{32}}{\partial q^2} + \sigma^{31}\Gamma^2_{12} = \frac{\partial \sigma^{32}}{\partial q^2} + \frac{1}{\rho}\sigma^{31},$$

$$\sigma_{\theta z} = \tilde{\sigma}^{32} = \sqrt{g_{33}}\sqrt{g_{22}}\sigma^{32} = \rho\sigma^{32},$$

$$\sigma^{32} = \frac{1}{\rho}\sigma_{\theta z},$$

$$\sigma,^{32}_{2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{\rho z}}{\rho},$$

$$X_z = \tilde{X}^3 = \sqrt{g_{33}}X^3 = X^3,$$

$$\sigma,^{33}_{3} = \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial q^3} + 2\sigma^{m3}\Gamma^3_{m3} = \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial q^3},$$

$$\sigma_{zz} = \tilde{\sigma}^{33} = \sqrt{g_{33}}\sqrt{g_{33}}\sigma^{33} = \sigma^{33},$$

$$\sigma,^{33}_{3} = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}.$$

Третє рівняння рівноваги у фізичних компонентах

$$\frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho z}}{\rho} + X_z = 0.$$

Співвідношення Коші

У загальному випадку

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_i,_j + u_j,_i),$$

де $u_i,_j$ і $u_j,_i$–коваріантні похідні,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial q^j} - u_k\Gamma^k_{ij} + \frac{\partial u_j}{\partial q^i} - u_k\Gamma^k_{ij}\right),$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial q^j} + \frac{\partial u_j}{\partial q^i} - 2u_k\Gamma^k_{ij}\right).$$

У циліндричній системі координат

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial q^1} + \frac{\partial u_1}{\partial q^1} - 2u_k\Gamma_{11}^k\right) = \frac{\partial u_1}{\partial q^1},$$

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \tilde{\varepsilon}_{11} = \sqrt{g^{11}}\sqrt{g^{11}}\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11},$$

$$u_\rho = \tilde{u}_1 = \sqrt{g^{11}}u_1 = u_1,$$

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho},$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial u_2}{\partial q^2} - 2u_k\Gamma_{22}^k\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial u_2}{\partial q^2} - u_1\Gamma_{22}^1\right) = \left(\frac{\partial u_2}{\partial q^2} + \rho u_1\right),$$

$$u_\theta = \tilde{u}_2 = \sqrt{g^{22}}u_2 = \frac{1}{\rho}u_2,$$

$$u_2 = \rho u_\theta,$$

$$u_1 = u_\rho,$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \tilde{\varepsilon}_{22} = \sqrt{g^{22}}\sqrt{g^{22}}\varepsilon_{22} = \frac{1}{\rho^2}\varepsilon_{22},$$

$$\varepsilon_{22} = \rho^2\varepsilon_{\theta\theta},$$

$$\rho^2\varepsilon_{\theta\theta} = \rho\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \rho u_\rho,$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\rho}{\rho},$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial u_3}{\partial q^3} + 2u_k\Gamma_{33}^k\right) = \frac{\partial u_3}{\partial q^3},$$

$$u_z = \tilde{u}_3 = \sqrt{g^{33}}u_3 = u_3,$$

$$\varepsilon_{zz} = \tilde{\varepsilon}_{33} = \sqrt{g^{33}}\sqrt{g^{33}}u_{33} = \varepsilon_{33},$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial q^2} + \frac{\partial u_2}{\partial q^1} - 2u_k\Gamma^k_{12}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial q^2} + \frac{\partial u_2}{\partial q^1} - 2u_2\Gamma^2_{12}\right),$$

$$u_1 = u_\rho, \;\; u_2 = \rho u_\theta,$$

$$\varepsilon_{\rho\theta} = \tilde{\varepsilon}_{12} = \sqrt{g^{11}}\sqrt{g^{22}}\varepsilon_{12} = \frac{1}{\rho}\varepsilon_{12},$$

$$\varepsilon_{12} = \rho\varepsilon_{\rho\theta},$$

$$\rho\varepsilon_{\rho\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial\theta} + \rho\frac{\partial u_\theta}{\partial\rho} + u_\theta - 2\rho u_\theta\frac{1}{\rho}\right),$$

$$\varepsilon_{\rho\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial\rho} - \frac{u_\theta}{\rho}\right),$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial q^3} + \frac{\partial u_3}{\partial q^2} - 2u_k\Gamma^k_{23}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial q^3} + \frac{\partial u_3}{\partial q^2}\right),$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \tilde{\varepsilon}_{23} = \sqrt{g^{22}}\sqrt{g^{33}}\varepsilon_{23} = \frac{1}{\rho}\varepsilon_{23},$$

$$\varepsilon_{23} = \rho\varepsilon_{\theta z},$$

$$u_2 = \rho u_\theta, \;\; u_3 = u_z,$$

$$\rho\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\rho\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right),$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right),$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial q^1} + \frac{\partial u_1}{\partial q^3} - 2u_k\Gamma^k_{31}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial q^1} + \frac{\partial u_1}{\partial q^3}\right),$$

$$\varepsilon_{\rho z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial\rho} + \frac{\partial u_\rho}{\partial z}\right).$$

Закон Гука в циліндричній системі координат. Оскільки система координат ортогональна, це випливає з того, що $g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0$, при використанні фізичних компонент тензорів, закон Гука буде мати таку саму форму, як і в декартових координатах:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk},$$

де індекси 1, 2, 3 заміняють на ρ, θ, z.

4.3.2 Сферична система

Параметрами, які визначають положення точки, є $(\rho, \vartheta, \alpha)$. У цій системі (рис.4.2.3)

$$x_1 = \rho\sin\vartheta\cos\alpha, \;\; x_2 = \rho\sin\vartheta\sin\alpha, \;\; x_3 = \rho\cos\vartheta,$$

$$0 \le \rho < \infty, \; 0 \le \alpha \le 2\pi, \; 0 \le \vartheta < \pi.$$

Тому

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = d\rho^2 + \rho^2\sin^2\vartheta d\alpha^2 + \rho^2 d\vartheta^2,$$

$$h_1^2 = g_{11} = 1, \;\; h_2^2 = g_{22} = \rho^2\sin^2\vartheta, \;\; h_3^2 = g_{33} = \rho^2,$$

вводячи позначення фізичних компонент вектора переміщень $(u_\rho, u_\alpha, u_\vartheta)$ і фізичних компонент тензора деформацій $\varepsilon_{\rho\rho}, \varepsilon_{\alpha\alpha}, \varepsilon_{\vartheta\vartheta}$, $\varepsilon_{\alpha\vartheta}, \varepsilon_{\vartheta\rho}, \varepsilon_{\rho\alpha}$ одержимо наступні формули для деформацій:

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \frac{\partial u_\rho}{\partial\rho},$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{\rho\sin\vartheta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{u_\rho}{\rho} + ctg\vartheta\frac{u_\vartheta}{\rho},$$

$$\varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\vartheta}{\partial\vartheta} + \frac{u_\rho}{\rho},$$

$$\varepsilon_{\rho\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho\sin\vartheta}\frac{\partial u_\rho}{\partial\alpha} - \frac{u_\alpha}{\rho} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial\rho}\right),$$

$$\varepsilon_{\rho\vartheta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial\vartheta} - \frac{u_\vartheta}{\rho} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial\rho}\right),$$

$$\varepsilon_{\alpha\vartheta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\vartheta} - \frac{u_\alpha}{\rho}ctg\vartheta + \frac{1}{\rho\sin\vartheta}\frac{\partial u_\vartheta}{\partial\alpha}\right).$$

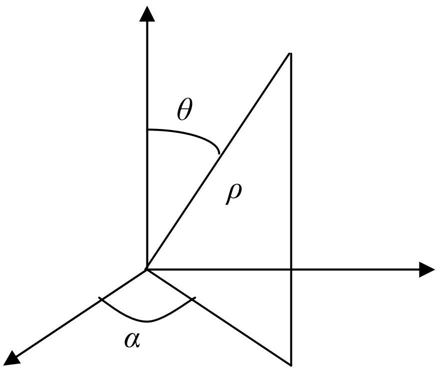

Рис.4.2.3

Напруження пов'язані з деформаціями законом Гука:

$$\sigma_{\rho\rho} = 2\mu\varepsilon_{\rho\rho} + \lambda e,$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = 2\mu\varepsilon_{\alpha\alpha} + \lambda e,$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = 2\mu\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \lambda e,$$

$$\sigma_{\rho\alpha} = 2\mu\varepsilon_{\rho\alpha}, \;\; \sigma_{\alpha\vartheta} = 2\mu\varepsilon_{\alpha\vartheta}, \;\; \sigma_{\vartheta\rho} = 2\mu\varepsilon_{\vartheta\rho},$$

$$e = \varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}.$$

В окремому випадку, коли деформований стан характеризується центральною симетрією, деформації стають функціями тільки змінної ρ :

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \;\; \varepsilon_{\alpha\alpha} = \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{u_\rho}{\rho},$$

$$\varepsilon_{\rho\alpha} = \varepsilon_{\alpha\vartheta} = \varepsilon_{\vartheta\rho} = 0.$$

У цьому окремому випадку

$$\sigma_{\rho\rho} = 2\mu\varepsilon_{\rho\rho} + \lambda e,$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{\vartheta\vartheta} = 2\mu\varepsilon_{\alpha\alpha} + \lambda e,$$

$$\sigma_{\rho\alpha} = \sigma_{\alpha\vartheta} = \sigma_{\vartheta\rho} = 0,$$

$$e = \varepsilon_{\rho\rho} + 2\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + 2\frac{u_\rho}{\rho}.$$

Рівняння рівноваги в ортогональних криволінійних координатах. У сферичній системі координат $(\rho, \vartheta, \alpha)$ (рис.4.2.4)

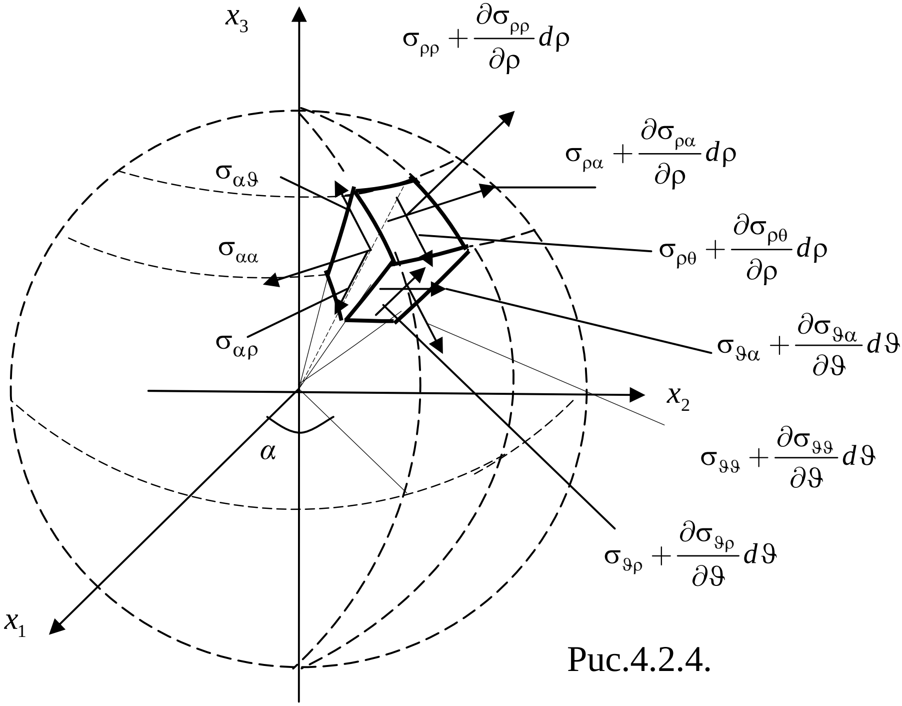

Рис.4.2.4.

$$\frac{\partial\sigma_{\rho\rho}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho\sin\vartheta}\frac{\partial\sigma_{\rho\alpha}}{\partial\alpha}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{\rho\vartheta}}{\partial\vartheta}+\frac{2\sigma_{\rho\rho}-\sigma_{\alpha\alpha}-\sigma_{\vartheta\vartheta}+\sigma_{\rho\vartheta}ctg\vartheta}{\rho}+X_\rho=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{\rho\alpha}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho\sin\vartheta}\frac{\partial\sigma_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{\alpha\vartheta}}{\partial\vartheta}+\frac{3\sigma_{\rho\alpha}+2\sigma_{\alpha\vartheta}ctg\vartheta}{\rho}+X_\alpha=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{\rho\vartheta}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho\sin\vartheta}\frac{\partial\sigma_{\alpha\vartheta}}{\partial\alpha}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{\vartheta\vartheta}}{\partial\vartheta}+\frac{3\sigma_{\rho\vartheta}+(\sigma_{\vartheta\vartheta}-\sigma_{\alpha\alpha})ctg\vartheta}{\rho}+X_\vartheta=0.$$

Рівняння в переміщеннях

$$\mu\left\{\nabla^2u_\rho-\tfrac{2}{\rho^2}\left[u_\rho+\tfrac{1}{\sin\vartheta}\tfrac{\partial}{\partial\vartheta}(u_\vartheta\sin\vartheta)+\tfrac{1}{\sin\vartheta}\tfrac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}\right]\right\}+(\lambda+\mu)\tfrac{\partial}{\partial\rho}\times$$
$$\times\left[\tfrac{1}{\rho^2}\tfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2u_\rho\right)+\tfrac{1}{\rho\sin\vartheta}\tfrac{\partial}{\partial\vartheta}(u_\vartheta\sin\vartheta)+\tfrac{1}{\rho\sin\vartheta}\tfrac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}\right]+X_\rho=0,$$

$$\mu\left\{\nabla^2 u_\vartheta - \tfrac{2}{\rho^2}\left[\tfrac{\partial u_\rho}{\partial\vartheta} - \tfrac{1}{2\sin^2\vartheta}u_\vartheta - \tfrac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\tfrac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}\right]\right\} + (\lambda+\mu)\tfrac{\partial}{\partial\vartheta}\times$$
$$\times\left[\tfrac{1}{\rho^2}\tfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2 u_\rho\right) + \tfrac{1}{\rho\sin\vartheta}\tfrac{\partial}{\partial\vartheta}(u_\vartheta\sin\vartheta) + \tfrac{1}{\rho\sin\vartheta}\tfrac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}\right] + X_\vartheta = 0,$$

$$\mu\left\{\nabla^2 u_\alpha + \tfrac{2}{\rho^2\sin\vartheta}\left[\tfrac{\partial u_\rho}{\partial\alpha} + ctg\vartheta\tfrac{\partial u_\vartheta}{\partial\alpha} - \tfrac{u_\alpha}{2\sin\vartheta}\right]\right\} + \tfrac{(\lambda+\mu)}{\rho\sin\vartheta}\tfrac{\partial}{\partial\alpha}\times$$
$$\times\left[\tfrac{1}{\rho^2}\tfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2 u_\rho\right) + \tfrac{1}{\rho\sin\vartheta}\tfrac{\partial}{\partial\vartheta}(u_\vartheta\sin\vartheta) + \tfrac{1}{\rho\sin\vartheta}\tfrac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}\right] + X_\alpha = 0,$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}.$$

4.3.3 Інші ортогональні системи

1. Еліптичні координати $x_1 = \lambda,\ x_2 = \mu,\ x_3 = z$ визначають за допомогою формул перетворення

$$x = c\lambda\mu,\ y = c\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)},\ z = z,$$

де c – масштабний множник. Метричні коефіцієнти (коефіцієнти Ляме)

$$h_1 = c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2-1}},\ h_2 = c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{1-\mu^2}},\ h_3 = 1.$$

Координатні поверхні:

$\lambda = const$–циліндри еліптичного перерізу з фокусами в точках $x = \pm c,\ \ y = 0$;

$\mu = const$–сімейство конфокальних гіперболічних циліндрів;

$z = const$–площини.

2. Параболічні координати. Якщо $r,\ \theta$–полярні координати точки на площині, то параболічні координати можуть бути введені за допомогою формул

$$x_1 = \lambda = \sqrt{2r}\sin\frac{\theta}{2},\ x_2 = \mu = \sqrt{2r}\cos\frac{\theta}{2},\ x_3 = z.$$

Координатні поверхні $\lambda = const$ і $\mu = const$ є параболічними циліндрами, що перетинаються, з твірними, паралельними осі z. Зв'язок з декартовими координатами дають формули

$$x = \frac{1}{2}\left(\mu^2 - \lambda^2\right),\ \ y = \lambda\mu,\ \ z = z.$$

Метричні коефіцієнти

$$h_1 = h_2 = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \;\; h_3 = 1.$$

3. Еліпсоїдальні координати.

Вводяться за допомогою рівнянь $(a > b > c)$

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1,$$

$\lambda > -c^2$–еліпсоїд

$$\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} + \frac{z^2}{c^2+\mu} = 1,$$

$-c^2 > \mu > -b^2$–однопорожнинний гіперболоїд

$$\frac{x^2}{a^2+\nu} + \frac{y^2}{b^2+\nu} + \frac{z^2}{c^2+\nu} = 1,$$

$-b^2 > \nu > -a^2$–двопорожнинний гіперболоїд.

Кожній точці x, y, z відповідає тільки одна система величин λ, μ, ν.

Параметри $x_1 = \lambda$, $x_2 = \mu$, $x_3 = \nu$ називаються еліпсоїдними координатами. Координати x, y, z виражаються явно через λ, μ, ν:

$$x = \pm\sqrt{\frac{(\lambda+a^2)(\mu+a^2)(\nu+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}},$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{(\lambda+b^2)(\mu+b^2)(\nu+b^2)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)}},$$

$$z = \pm\sqrt{\frac{(\lambda+c^2)(\mu+c^2)(\nu+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}}.$$

Коефіцієнти Ляме дорівнюють

$$h_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{R^2(\lambda)}}, \;\; h_2 = \frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{R^2(\mu)}},$$

$$h_3 = \frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{R^2(\nu)}},$$

$$R(s) = \sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)}, \quad (s = \lambda, \mu, \nu).$$

Оператор Лапласа

$$\nabla^2 u = \tfrac{4}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)(\mu-\nu)} \Big[(\mu-\nu)R(\lambda)\tfrac{\partial}{\partial\lambda}\big(R(\lambda)\tfrac{\partial u}{\partial\lambda}\big) +$$
$$+(\nu-\lambda)R(\mu)\tfrac{\partial}{\partial\mu}\Big(R(\mu)\tfrac{\partial u}{\partial\mu}\Big) + (\lambda-\mu)R(\nu)\tfrac{\partial}{\partial\nu}\big(R(\nu)\tfrac{\partial u}{\partial\nu}\big)\Big].$$

Частинний розв'язок рівняння Лапласа, що залежить тільки від λ, $U = U(\lambda)$, подається формулою

$$U = A\int \frac{d\lambda}{R(\lambda)} + B,$$

де A і B–довільні сталі.

4. Вироджені еліпсоїдальні координати.

а) Систему вироджених еліпсоїдальних координат (α, β, φ) для витягнутого еліпсоїда обертання визначають за допомогою формул

$$x = c\sin\beta\cos\varphi, \; y = c\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi, \; z = c ch\alpha\cos\beta,$$

де c—масштабний множник; $0 \le \alpha < \infty, \; 0 \le \beta \le \pi, \; -\pi < \varphi \le \pi.$

Координатні поверхні:

витягнуті еліпсоїди обертання $\alpha = const$;

двопорожнинні гіперболоїди обертання $\beta = const$;

площини $\varphi = const$.

Квадрат елемента довжини визначається формулою

$$ds^2 = c^2\big(sh^2\alpha + \sin^2\beta\big)\big(d\alpha^2 + d\beta^2\big) + c^2 sh^2\alpha\sin^2\beta d\varphi^2,$$

звідки для метричних коефіцієнтів одержують значення

$$h_1 = \; h_2 = c\sqrt{sh^2\alpha + \sin^2\beta}, \;\; h_3 = h_\varphi = csh\alpha + \sin\beta.$$

Рівняння Лапласа має вигляд

$$\nabla^2 u = \tfrac{1}{c^2\big(sh^2\alpha+\sin^2\beta\big)}\Big[\tfrac{1}{sh\alpha}\tfrac{\partial}{\partial\alpha}\big(sh\alpha\tfrac{\partial u}{\partial\alpha}\big) + \tfrac{1}{\sin\beta}\tfrac{\partial}{\partial\beta}\Big(\sin\beta\tfrac{\partial u}{\partial\beta}\Big) +$$
$$+\Big(\tfrac{1}{sh^2\alpha} + \tfrac{1}{\sin^2\beta}\Big)\tfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\Big] = 0.$$

б) Систему вироджених еліпсоїдальних координат (α, β, φ) для сплюснутого еліпсоїда обертання визначають за допомогою рівностей

$$x = cch\alpha\sin\beta\cos\varphi,\ \ y = cch\alpha\sin\beta\sin\varphi,\ \ z = cch\alpha\cos\varphi,$$

$$0 \le \alpha < \infty,\ \ 0 \le \beta \le \pi,\ \ -\pi < \varphi \le \pi.$$

Координатні поверхні:

сплюснуті еліпсоїди обертання $\alpha = const$;

однопорожнинні гіперболоїди обертання $\beta = const$;

площини $\varphi = const$, що проходять через вісь z.

Квадрат лінійного елемента і оператор Лапласа в розглянутій системі координат має вигляд

$$ds^2 = c^2\left(ch^2\alpha - \sin^2\beta\right)\left(d\alpha^2 + d\beta^2\right) + c^2ch^2\alpha\sin^2\beta d\varphi^2,$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2\left(ch^2\alpha - \sin^2\beta\right)}\left[\frac{1}{ch\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(ch\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sin\beta\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{ch^2\alpha}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right].$$

5. Тороїдальні координати. Систему тороїдальних координат (α, β, φ) визначають за допомогою формул

$$x = \frac{csh\alpha\cos\varphi}{ch\alpha - \cos\beta},\ \ y = \frac{csh\alpha\sin\varphi}{ch\alpha - \cos\beta},\ \ z = \frac{c\sin\beta}{ch\alpha - \cos\beta},$$

де c–масштабний множник;

$$0 \le \alpha < \infty,\ \ -\pi < \beta \le \pi,\ \ -\pi < \varphi \le \pi.$$

Координатними поверхнями є:

тори $\alpha = const$

$$(\rho - ccth\alpha)^2 + z^2 = \left(\frac{c}{sh\alpha}\right)^2,\ \ \left(\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\right),$$

сфери $\beta = const$

$$(z - ctg\beta)^2 + \rho^2 = \left(\frac{c}{\sin\beta}\right)^2,$$

площини $\varphi = const$.

Вираз для квадрата лінійного елемента має вигляд

$$ds^2 = \frac{c^2}{(ch\alpha - cos\beta)^2}\left[d\alpha^2 + d\beta^2 + sh^2\alpha d\varphi^2\right],$$

метричні коефіцієнти дорівнюють

$$h_\alpha = h_\beta = \frac{c}{ch\alpha - \cos\beta}, \ \ h_\varphi = \frac{csh\alpha}{ch\alpha - \cos\beta},$$

і оператор Лапласа дається виразом:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{sh\alpha}{ch\alpha - \cos\beta}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{sh\alpha}{ch\alpha - \cos\beta}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) +$$

$$+ \frac{1}{(ch\alpha - \cos\beta)sh\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Замість u зручно вводити нову функцію v за допомогою співвідношення

$$u = \sqrt{2ch\alpha - 2\cos\beta} \cdot v,$$

при цьому рівняння $\nabla^2 u = 0$ зводиться до рівняння

$$v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} + vcth\alpha + \frac{1}{4}v + \frac{1}{sh^2\alpha}v_{\varphi\varphi} = 0.$$

6. Біполярні координати.

а) Біполярні координати на площині.
Змінні $x_1 = \alpha, x_2 = \beta, x_3 = z$ називаються біполярними координатами, якщо існують рівності

$$x = \frac{ash\alpha}{ch\alpha - \cos\beta}, \ \ y = \frac{a\sin\beta}{ch\alpha - \cos\beta}, \ \ z = z.$$

Метричні коефіцієнти дорівнюють

$$h_1 = h_2 = \frac{a}{ch\alpha - \cos\beta}, \ \ h_3 = 1.$$

б) Бісферичні координати $x_1 = \alpha, \ \ x_2 = \beta, \ \ x_3 = \varphi$ визначають за допомогою формул

$$x = \frac{c\sin\alpha\cos\varphi}{ch\beta - \cos\alpha}, \ \ y = \frac{c\sin\alpha\sin\varphi}{ch\beta - \cos\alpha}, \ \ z = \frac{csh\beta}{ch\beta - \cos\alpha},$$

де c–сталий множник

$$0 \le \alpha < \infty, \ \ -\infty < \beta < \infty, \ \ -\pi < \varphi \le \pi.$$

Ці формули можна записати в компактній формі

$$z + i\rho = c\,ctg\frac{\alpha + i\beta}{2}, \quad \left(\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Координатні поверхні:

веретеноподібні поверхні обертання $\alpha = const$

$$(\rho - c\,cth\alpha)^2 + z^2 = \left(\frac{c}{\sin\alpha}\right)^2,$$

сфери $\beta = const$

$$\rho^2 + (z - c\,ctg\beta)^2 = \left(\frac{c}{\sin\beta}\right)^2,$$

площини $\rho = const$.

Вираз для квадрата лінійного елемента в просторових біполярних координатах має вигляд

$$ds^2 = \frac{c^2}{(ch\beta - cos\alpha)^2}\left[d\alpha^2 + d\beta^2 + \sin^2\alpha d\varphi^2\right],$$

звідки

$$h_1 = h_2 = \frac{c}{ch\beta - \cos\alpha}, \quad h_3 = \frac{c\sin\alpha}{ch\beta - \cos\alpha},$$

і рівняння Лапласа набирає вигляду

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{ch\beta - \cos\alpha}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\sin\alpha}{ch\beta - \cos\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{\sin\alpha(ch\beta - \cos\alpha)}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0.$$

При розв'язуванні рівняння Лапласа зручною є підстановка

$$u = \sqrt{2ch\beta - 2\cos\alpha}\,\upsilon.$$

Тоді для функції υ виходить рівняння

$$\upsilon_{\alpha\alpha} + \upsilon_{\beta\beta} + \upsilon_\alpha ctg\alpha - \frac{1}{4}\upsilon + \frac{1}{\sin^2\alpha}\upsilon_{\varphi\varphi} = 0.$$

7. Сфероїдальні координати.

а) Витягнуті сфероїдальні координати $x_1 = \lambda,\ x_2 = \mu,\ x_3 = \varphi$

$$x = c\,\lambda\mu, \quad y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}\cos\varphi,$$
$$z = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}\sin\varphi,$$

$$\lambda \geq 1, \ \ -1 \leq \mu \leq 1, \ \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$h_1 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - 1}}, \ \ h_2 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}},$$

$$h_3 = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}.$$

б) Сплюснуті сфероїдальні координати

$$x_1 = \lambda, \ x_2 = \mu, \ x_3 = \varphi,$$

$$x = c\lambda\mu\sin\varphi, \ y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \ z = c\lambda\mu\cos\varphi.$$

Поверхні $\lambda = const$–сплюснуті сфероїди, $\mu = const$–однопорожнинні гіперболоїди. Метричні коефіцієнти

$$h_1 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - 1}}, \ \ h_2 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}, \ \ h_3 = c\lambda\mu.$$

8. Параболоїдні координати. Змінні

$$x_1 = \lambda, \ \ x_2 = \mu, \ \ x_3 = \varphi,$$

зумовлені співвідношеннями

$$x = \lambda\mu\cos\varphi, \ y = \lambda\mu\sin\varphi, \ z = \frac{1}{2}\left(\lambda^2 - \mu^2\right)$$

називаються параболоїдними координатами. Метричні коефіцієнти

$$h_1 = h_2 = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \ \ h_3 = \lambda\mu.$$

Координатні поверхні $\lambda = const$, $\mu = const$ є параболоїдами обертання навколо осі симетрії z.

Література

1. Амензаде Ю.А. Теория упругости - М.:, Высш. шк., 1976.-271 с.

2. Безухов Н.И. Сборник задач по теории упругости и пластичности.- М.: ГИТТЛ, 1957.- 286 с.

3. Демидов С.П. Теория упругости.- М.:Высш. шк., 1979.- 432-с.

4. Ильюшин А.А., Ломакин В.А., Шмаков А.П. Задачи и упражнения по механике сплошной среды. Изд.-во МГУ, 1973.-215 с.

5. Коваленко А.Д. Основы термоупругости.- К.:Наук. думка, 1970.-357 с.

6. Ландау Д.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости.- М.: Наука, Главная редакция физ. - мат. литературы. 1963.-215 с.

7. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости.-М.: ГИТТЛ, 1947.-464 с.

8. Лурье А.И. Теория упругости.-М.: Наука, 1970.- 939 с.

9. Ляв А. Математическая теория упругости.-М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935

10. Мейз дж. Теория и задачи механики сплошных сред. -М.: Мир, 1974.-318 с.

11. Новацкий В. Теория упругости.- М.: Мир, 1975.-872 с.

12. Новожилов В.В. Теория упругости.-Л.:Судпроиздат, 1958.-370 с.

13. Папкович П. Ф. Теория упругости.-Л.: Оборонгиз, 1939.-499 с.

14. Рекач В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости.- М.: Высш. шк; 1966.- 227 с.

15. Снеддон И.Н., Берри Д.С. Классическая теория упругости.- М.: Государственное издательство физ.-мат. лит., 1961.-219 с.

17.Тимошенко С.П. Дж. Гудьер Теория упругости.-М.: Наука,1975.-575 с.

Зміст

НІКІТІН ВЯЧЕСЛАВ ЕВГЕНОВИЧ

Його з нами вже нємає, але ми його памятаємо. Громадянин, патріот, товариш, який все розумів без слів і готовий був допомогти без прохань. Закінчив КПІ спеціальність динаміку та міцність машин, майор Радянської армії, 26 квітня 1986 року був одним з перших ліквідаторів аварії на Чернобильський АС. Він любив життя і людей настільки, що не пожалів своє заради майбутнього наступних поколінь своєї Батьківщини.

Навчальне видання

Бабенко Андрій Єлисейович
Бобир Микола Іванович
Бойко Сергій Леонідович
Боронко Олег Олександрович

ТЕОРІЯ ПРУЖНОСТІ

Частина 1

Підручник

Підписано до друку 21.05.2009 р.
Формат 60x84/16. Папір офсетний № 1.
Гарнітура Times. Друк офсетний.
Ум.-друк. арк. 14.18.
Зам 29-091.

Видавництво ТОВ «Основа»
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців
ДК № 1981 від 21.10.2004 р.
01032, м. Київ-32, вул. Жилянська, 87/30.
Тел.: (044) 239-38-97, т/ф: 239-38-95, 239-38-96.

Видруковано ТОВ «Основа-Принт»
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців
ДК № 2072 від 25.01.2005 р.