

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Н. Д. Вайсфельд, З. Ю. Журавльова, В. В. Реут

**ПЛОСКІ МІШАНІ ЗАДАЧІ
ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ
ДЛЯ ПІВНЕСКІНЧЕНОЇ СМУГИ**

Монографія

ОДЕСА
ОНУ
2019

УДК 539.3
В14

Рекомендовано до друку вченою радою ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 2 від 30 жовтня 2018 р.

Рецензенти:

Г. С. Кіт, доктор фізико-математичних наук, професор, головний науковий співробітник відділу обчислювальних методів деформівних систем Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України, член-кореспондент НАН України;

А. Є. Шевельова, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара;

В. І. Острик, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач науково-дослідного сектору механіки спряжених хвильових полів Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Вайсфельд Н. Д.

В14 Плоскі мішані задачі теорії пружності для півнескінченної смуги : монографія / Н. Д. Вайсфельд, З. Ю. Журавльова, В. В. Реут. — Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2019. — 160 с.

ISBN 978-617-689-289-2

УДК 539.3

ISBN 978-617-689-289-2

© Н. Д. Вайсфельд, З. Ю. Журавльова,
В. В. Реут. 2019

© Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова, 2019

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	6
ВСТУП	7
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ.....	8
1.1. Плоскі задачі теорії пружності для півсмуги	8
1.2. Плоскі задачі термопружності	12
1.3. Плоскі задачі теорії пружності для смуги та півпростору з тріщинами	15
1.4. Врахування нерухомих особливостей невідомої функції при розв'язанні інтегральних рівнянь	23
1.5. Висновки до першого розділу.....	26
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКІВ МІШАНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВНЕСКІНЧЕНОЇ СМУГИ	
2.1. Зведення вихідної крайової задачі до одновимірної векторної крайової задачі.....	27
2.2. Формулювання та розв'язання векторної одновимірної крайової задачі у просторі трансформант	30
2.3. Побудова фундаментальної матричної системи розв'язків ...	31
2.4. Побудова матриці-функції Гріна.....	33
2.5. Побудова розв'язку вихідної задачі.....	36
2.6. Методика розв'язання сингулярного інтегрального чи інтегро-диференціального рівняння.....	37
2.6.1. Розв'язання СІДР	37
2.6.2. Розв'язання СІР у випадку наявності однієї нерухомої особливості.....	39

2.6.3. Розв’язання СІР у випадку наявності двох нерухомих особливостей.....	41
2.7. Висновки до другого розділу	43
РОЗДІЛ 3. МІШАНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВСМУГИ	
3.1. Мішана задача теорії пружності для півсмуги при виконанні умов другої основної задачі теорії пружності 44	
3.2. Навантаження по середині короткого торця (випадок 1)	46
3.3. Навантаження з лівого краю короткого торця (випадок 2)	51
3.4. Навантаження по всьому короткому торцю (випадок 3)	56
3.5. Висновки до третього розділу.....	58
РОЗДІЛ 4. ЗАДАЧІ НЕЗВ’ЯЗНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВСМУГИ	
4.1. Задача стаціонарної теплопровідності для півсмуги.....	59
4.2. Мішана задача термопружності для півсмуги при виконанні умов другої основної задачі теорії пружності на півнескінчених гранях	62
4.3. Навантаження по середині короткого торця (випадок 1)	64
4.4. Навантаження з лівого краю короткого торця (випадок 2)	71
4.5. Навантаження по всьому короткому торцю (випадок 3)	80
4.6. Висновки до четвертого розділу.....	86
РОЗДІЛ 5. ЗАДАЧІ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ ДЛЯ ПІВСМУГИ З ТРАНСВЕРСАЛЬНОЮ ТРІЩИНОЮ	
5.1. Задача концентрації напружень для півсмуги з поперечною тріщиною.....	87
5.2. Навантаження по середині короткого торця (випадок 1)	90
5.3. Навантаження по всьому короткому торцю (випадок 3)	98
5.4. Навантаження з лівого краю короткого торця (випадок 2) ..	105

5.5. Задача теорії пружності для зчепленої півсмуги з трансверсальною тріщиною – симетричний випадок.....	111
5.6. Навантаження по середині короткого торця у симетричній постановці (випадок 1).....	113
5.7. Навантаження по всьому короткому торцю у симетричній постановці (випадок 3).....	117
5.8. Висновки до п'ятого розділу	122
ВИСНОВКИ	123
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	125
ДОДАТОК А. ПОКРОКОВЕ ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ ЛЯМЕ ЗА ЗМІННОЮ y	145
ДОДАТОК Б. ПІДРАХУНОК ЕЛЕМЕНТІВ МАТРИЦІ ГРІНА	149
ДОДАТОК В. ЗНАХОДЖЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ $c_i, i = \overline{1,4}$	152
ДОДАТОК Г. ПІДСУМОВУВАННЯ СЛАБКО-ЗБІЖНИХ ЧАСТИН ІНТЕГРАЛІВ.....	153
АНОТАЦІЯ	155
ABSTRACT	157

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

СІДР – сингулярне інтегро-дифференціальне рівняння

СІР – сингулярне інтегральне рівняння

ССІДР – система сингулярних інтегро-дифференціальних рівнянь

ССІР – система сингулярних інтегральних рівнянь

КІН – коефіцієнт інтенсивності напружень

μ – коефіцієнт Пуассона

κ – стала Мусхелішвілі

ВСТУП

Актуальність теми. Мішані задачі теорії пружності займають важливе місце в механіці деформівного твердого тіла, що пов'язано з їх роллю при моделюванні різноманітних інженерних задач. Основні підходи до аналітичного розв'язання такого роду задач засновані на зображенні розв'язків рівнянь рівноваги через допоміжні функції (гармонічні, бігармонічні тощо). Головна незручність цих підходів полягає в тому, що для отримання виразів реальних механічних характеристик потрібно виконати додаткові операції, які часто є досить нетривіальними.

Запропонований у роботі підхід використовує безпосередні інтегральні перетворення рівнянь рівноваги. Це надає можливість побудувати в просторі трансформант аналітичний розв'язок відповідної векторної крайової задачі відносно шуканих трансформант переміщень. Для спрощення розрахунків побудовано матрицю-функцію Гріна, яку подано у вигляді білінійного розвинення. Цей підхід продемонстровано на розв'язанні мішаних задач теорії пружності для півсмуги, яка є модельним об'єктом для виявлення закономірностей напружено-деформованого стану пружних тіл.

Як свідчить аналіз літератури, у дослідженні плоских мішаних задач пружності існують невирішені проблеми, що потребують розвитку аналітичних методів їх розв'язання, які б дозволили спростити побудову розв'язку та виявити загальну якісну картину напруженого стану півсмуги.

Цим обґрунтовано актуальність розробки нової методики аналітичного розв'язання плоских мішаних задач теорії пружності для півсмуги.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Дослідження напружено-деформованого стану пружних тіл почало активно розвиватися у XIX ст. і не втратило своєї актуальності до сьогодні. Це пояснюється широкою областю застосування в різноманітних інженерних додатках. Класична лінійна теорія пружності є найважливішою основою для більшості міцнісних розрахунків у техніці. Під час експлуатації будівельні та інші конструкції піддаються механічним, температурним та інших видам впливу. Тому при проектуванні необхідно розрахувати міцність таких конструкцій. Характеристики міцності виробів можна отримати на основі аналізу напружено-деформованого стану їх пружних моделей. Одною з таких моделей є півнескінченна смуга. Тому актуальною проблемою є розробка аналітично-числових методів дослідження її напружено-деформованого стану.

1.1. Плоскі задачі теорії пружності для півсмуги

У зв'язку з тим, що робота присвячена аналітично-числовому розв'язанню задачі для півсмуги, зосередимось на огляді аналітичних методів. Такими методами є зведення до інтегрального рівняння Фредгольма, використання подань у вигляді рядів та інтегралів Фур'є, зведення до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь, варіаційний, енергетичний методи, методи, що базуються на побудові системи біортогональних функцій, на діагоналізації системи рівнянь рівноваги та використанні розвинень за системами функцій Фадля-Папковича. Як видно, в більшості методів вводяться допо-

міжні функції, що ускладнює побудову розв'язку. Використання розвинень за системами функцій Фадля-Папковича є неможливим для мішаних задач.

Нижче наведено деталізований короткий огляд вказаних підходів до розв'язання плоских задач теорії пружності.

I. I. Воровіч та В. В. Копасенко [13] звели розв'язання задачі про симетрично навантажену півсмугу, що зчеплена по короткому краю, до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду відносно нормального навантаження в зоні зчеплення. В деякій мірі, як відмічено авторами, ця особливість ускладнює дослідження рівняння, а також його числове розв'язання. Н. Zorski [176] розв'язання задачі про півсмугу звів до сингулярного інтегрального рівняння. D. B. Vogu, розглядаючи задачу про з'єднані півсмуги [76], звів розв'язання до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь, розв'язання яких знайдено наближено. Розв'язок задачі про одну півсмугу [75] Vogu D. B. побудував у вигляді суперпозиції розв'язання задачі про півплощини та задачі про нескінченну смугу. Задача для симетрично навантаженої півнескінченної смуги, що закріплена вздовж короткого кінця, була розглянута в [168]. У цій роботі було отримано інтегральне рівняння для нормальних напружень біля закріплення та було досліджено природу особливостей його розв'язку.

P. P. Teodorescu [155] розв'язав задачу про півсмугу, коли на границі задані напруження. Функція напружень у цих задачах подається у вигляді комбінації рядів та інтегралів Фур'є. Аналогічний підхід було застосовано в роботах [63, 124, 138] для розв'язання задач про півсмугу. D. G. Crowdy та A. S. Fokas [86] побудували інтегральні розв'язки для еластостатичної півсмуги.

W. T. Koiter та J. Alblas у [113] застосували інтегральні перетворення до диференціального рівняння для функцій навантажень, що дозволило звести задачу про розтяг півсмути з вільними бічними гранями і зчепленій по короткій стороні до розв'язання нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Л. А. Агаловян і Р. С. Геворкян [1] звели розв'язання задачі про півсмути, коли її бічні грані вільні, а на торці задано переміщення, до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. J. P. Benthem [73] розглянув задачу про півсмути, коли її бічні грані вільні, а на торці задані напруження, і коли торець зчеплений, а на нескінченності задані напруження. Застосування перетворення Лапласа до рівняння для функції напружень звело задачу до розв'язання нескінченної алгебраїчної системи, регулярність якої не була доведена.

При розв'язанні задачі для півнескінченної смуги, що стиснута двома зосередженими силами, і вільним торцем, Л. П. Трапезніков [57] застосував варіаційний метод. В. Г. Сучеван [56] змішану задачу теорії пружності для півсмути розв'язав за допомогою варіаційного методу Кастильяно, знаходячи параметри, що варіюють, через нескінченну систему лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь.

P. Thecaris [156] при розв'язанні задачі про півсмути з вільними бічними сторонами та діючою по торцю зосередженою силою використав енергетичний метод.

У роботі [109] будується спеціальна система біортогональних функцій. За її допомогою розв'язується задача про півсмути, навантажену по торцю, яка може бути застосована для будь-яких граничних умов на навантаженому кінці. М. І. Гусейн-Заде [18] дослідила умови, яким повинні задовольняти напруження чи переміщення, щоб розв'язки затухали при віддаленні від цього кінця.

В. М. Замятин, А. В. Махов и А. А. Светашков [29] запропонували новий метод розв'язання плоских задач теорії пружності, заснований на діагоналізації системи рівнянь рівноваги.

Г. Norvay та J. Born [105] розглянули задачу про напружено-деформований стан півсмуги, коли її бічні грані вільні від навантажень, а по торцю задані переміщення у вигляді конкретних поліномів. При розв'язанні задачі використовується метод ортогональних поліномів.

У роботі [38] викладено основні аспекти алгоритму П. Ф. Папковича у методі однорідних розв'язків для двовимірної бігармонічної задачі у прямокутній області.

О. С. Гоголева [15] побудувала розв'язок класичної крайової проблеми теорії пружності про розподіл напружень у прямокутній півсмугі з вільними бічними гранями і заданими на торці півсмуги нормальними і дотичними напруженнями у вигляді розвинення по системам функцій Фадля-Папковича. М. Д. Коваленко та учні [31, 149] застосовували розвинення за функціями Фадля-Папковича для розв'язання задач про півсмугу. R. D. Gregory [102] задачу про півнескінченну еластостатичну смугу розв'язав також з використанням функцій Фадля-Папковича.

I. P. Gavrilkyuk, L. V. Makarov [96] дослідили клас задач в узагальненій постановці для випадку півсмуги. У цій роботі було побудовано різницеву схему на скінченій решітці, оцінено швидкість збіжності.

А. М. Gomilko [100] розглянув двовимірну бігармонічну задачу для півсмуги з граничними умовами типу Діріхле, для розв'язання якої використав метод суперпозиції. У роботі [101] проведено аналіз збіжності рядів та доведення методу виділення

особливостей для методу однорідних розв'язків на прикладі мішаної задачі для півсмуги.

R. D. Gregory та F. Y. M. Wan [103] дослідили стан плоскої півсмуги при різних видах граничних умов. Деякі точні розв'язки для півнескінченної тріщини в смузі були отримані за допомогою техніки конформного перетворення у [158]. Розв'язок для пружної задачі про півсмугу з вільними від навантаження бічними гранями та заданими нормальними переміщеннями і нульовими дотичними напруженнями на торці був представлений в [120].

У роботі [12] розглянуто методи розв'язання мішаних задач лінійної пружності, що складають основу розрахунку на міцність контактуючих деталей. У роботі [43] запропоновано та розвинуто підхід до розв'язання крайових задач для просторових канонічних областей на основі інтегральних перетворень для гармонічних функцій та доведення теорем додавання рівнянь рівноваги Ляме.

1.2. Плоскі задачі термопружності

Плоским задачам термопружності для півсмуги присвячені наступні роботи.

В. Новацький [45] побудував розв'язок більшості задач термопружності як суму двох розв'язків, один з яких носить характер термопружного потенціалу, а другий містить компоненти вектора переміщень Гальоркіна.

Роботу [33] присвячено розв'язанню плоских та просторових квазістатичних задач лінійної термопружності для прямокутних областей варіаційними методами з використанням спеціальних ортогональних поліномів.

У роботі [19] крайова задача стаціонарної теплопровідності для півсмуги з круговим отвором зведена до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що допускає застосування методу редукції. Температурне поле та стан температурних напружень у півсмузі був досліджений в [139]. Крайова задача температурно напруженого стану жорстких півсмуг, що зроблені з різних ізотропних матеріалів, була розв'язана у [151].

Новий метод розв'язання плоскої квазі-статичної задачі термопружності в термінах напружень запропоновано у [167] для прямокутної області. Цей метод дозволяє побудувати аналітичний розв'язок у формі тригонометричних рядів.

I. A. Abbas [64] розглянув термопружне півнескінченне середовище. Систему рівнянь в просторі трансформант Лапласа він розв'язав за допомогою аналітичного і скінченно-елементного методів. При оберненні трансформант Лапласа ним були отримані наближені розв'язки задачі. R. V. N. Melnik [131] дослідив властивості дискретної апроксимації для математичних моделей зв'язної термопружності в напружено-температурній постановці.

M. S. Abou-Dina, A. F. Ghaleb [65] розв'язали плоску задачу термопружності через гармонічні функції. M. Hvozda і K. Rosa [106] вивели формули для термопружних напружень та зміщень, викликаних стаціонарним точковим джерелом тепла у пружному півпросторі. А. Д. Шамровський, Г. В. Меркотан [62] розв'язали узагальнену зв'язну динамічну задачу термопружності для півпростору за допомогою теорії інваріантно-групових властивостей диференціальних рівнянь. У роботі Г. Габрусєва [14] розроблено алгоритм дослідження напруженого стану, що виникає в трансверсально ізотропному шарі в результаті теплообміну за законом Ньютона між шаром та зовнішнім середовищем при наявності ліній розділу

граничних умов третього роду для температури на граничних площинах шару.

А. V. Rychahivskyu та Yu. V. Tokovuu [148], використовуючи метод прямого інтегрування, розв'язали задачу термопружності для півплощини з умовами зчеплення, переміщення та змішаними граничними умовами. V. Seremet [150] отримав два нових розв'язки для крайових задач термопружності для півплощини. У роботі [126] було розв'язано задачу про термічний контакт півсмуги зі смугою. Шляхом застосування перетворення Фур'є задачу зведено до розв'язання сингулярного інтегрального рівняння з додатковою умовою.

А. І. Веремейчик, В. В. Гарбачевський, В. М. Хвісевич [11] побудували інтегральні рівняння плоскої крайової задачі неоднорідної термопружності, розробили алгоритм числового розв'язку задачі. У роботі [172] розв'язано задачу зв'язної термопружності під дією циклічного навантаження.

Ю. М. Коляно, Л. М. Затварська [34] побудували розв'язок для тонкої півсмуги-пластинки, що вільна від зовнішнього навантаження та нагрівається джерелом тепла методом продовження функцій. У роботі [170] досліджено півнескінченну пластину під впливом лазерного імпульсного локального нагріву, використовуючи L-S узагальнену термопружну теорію, де скінченно-елементні рівняння керування розв'язані безпосередньо в часовій області. Температурні поля та термальні напруження, які вони виробляють у пластинах, відкритому масиву нагрівальних джерел були досліджені в [171].

Крайова задача зв'язної термопружності для півшару з отвором та змішаними крайовими умовами розв'язана у роботі L. A. Fil'shtinskii та A. V. Bondar [93]. Задачу зведено до системи чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь, що розв'язані чисель-

но методом механічних квадратур. Yu. Tokovuu, Chien-Ching Ma представили в [160] аналітичний підхід до розв'язання плоских пружних та термопружних задач для неоднорідної, ортотропної площин, півплощин і смуг. Розв'язання задач було зведено до інтегрального рівняння за технікою керування з резольвентним ядром. S. Davidson [87] розглянув задачу про визначення термічних напружень у термопружній смузі з колінеарним масивом паралельних до країв тріщин. Розв'язок рівняння Дюхамеля-Неймана побудовано через гармонічні функції. H. Qing, W. Yang, J. Lu, D.-F. Li [143] розв'язали термопружну задачу для нескінченної смуги, що містить нескінченну множину періодично розподілених крайових тріщин. Температурний вплив: грань, що містить тріщини, раптово охолоджується. Інтегральне рівняння, до якого зведений розв'язок крайової задачі, розв'язується чисельно. Плоскі задачі термопружності для тіл з тріщинами досліджено в [30]. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями викладено у [55]. Дослідження термопружних полів у тілах з початковими деформаціями досліджено в працях Кушніра Р. М. та учнів [37].

1.3. Плоскі задачі теорії пружності для смуги та півпростору з тріщинами

Велике значення мають розв'язання плоских задач з тріщинами.

М. П. Савруком, П. Н. Осівом та І. В. Прокопчуком [51] був розроблений метод сингулярних інтегральних рівнянь як метод розв'язання двовимірних задач теорії пружності для тіл з тріщинами. Двовимірні статичні задачі теорії тріщин були розглянуті в ро-

боті Н. Ф. Морозова [41]. Л. І. Слеп'ян [52] вивчав статичні, динамічні тріщини та тріщини, що повільно ростуть, у твердих тілах, а також обговорював критерії росту тріщини. М. П. Саврук [50] розглянув методи розв'язання двовимірних крайових задач математичної теорії тріщин для ізотропних тіл, вивчив приклади розв'язання півплощини та смуги з тріщинами.

Шляхом застосування двостороннього перетворення Лапласа задача про півнескінченну тріщину, що паралельна границі півплощини, була зведена К. Б. Устиновим [60] до матричної задачі Рімана. X.-F. Wu, E. Lilla та W.-S. Zou [169] розглянули задачу про півнескінченну тріщину між двома з'єднаними неоднаковими пружними смугами з однаковою густиною. Крайова задача зведена за допомогою техніки відповідних відображень до стандартної задачі Рімана-Гільберта. Нестандартна крайова задача для рівняння Лапласа в нескінченній смузі, що містить скінченну тріщину була зведена Y. A. Antipov, P. Schiavone [71] з використанням перетворення Фур'є до інтегрального рівняння, а потім до векторної задачі Рімана-Гільберта. C. R. Chiang [84] розробив числову процедуру, що заснована на власних функціях Вільямса, для розв'язання пружних задач руйнування та продемонстрував її застосування для розв'язання задачі з нескінченною смугою, що містить центральну поперечну тріщину.

R. Ishida [107] звів розв'язання задачі для нескінченної пружної смуги з одиночною крайовою тріщиною до розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду.

Є. В. Борисова [4] задачу про концентрацію напружень біля вершини скінченної тріщини у півплощині з вільними бічними гранями розв'язала модифікацією методу розривних розв'язків, який привів до сингулярного інтегрального рівняння. M. B. Civelek та

F. Erdogan [85] розглянули задачу для нескінченної смуги з множинними тріщинами, що перпендикулярні границям. Розв'язок задачі зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь. M. R. Gecit [97] звів розв'язок задачі про смугу, одна сторона якої зчеплена, а друга знаходиться в умовах першої основної задачі теорії пружності, з тріщиною до розв'язання сингулярного інтегрального рівняння. Останнє розв'язано методом колокацій. У роботі S. Krenk [115] наведені значення КІН, що отримані методом сингулярного інтегрального рівняння (CIP).

H. Itou і A. Tani [108] звели розв'язок задачі для нескінченної смуги з півнескінченною тріщиною шляхом застосування потенціалів простого та подвійного шару до розв'язання сингулярного інтегрального рівняння. E. N. Theotokoglou і G. J. Tsamasphyros [157] представили метод для роботи з пружною смугою, що послаблена тріщинами та отворами. За допомогою комплексних потенціалів розв'язок даної задачі зводиться до сингулярного інтегрального рівняння. F. Tian-You [159] запропонував процедуру підрахунку коефіцієнтів інтенсивності для нескінченної тріщини у смугі, що заснована на формулюванні Мусхелішвілі у вигляді комплексних потенціалів та комбінуванні техніки відповідних відображень.

H. Tada, P. C. Paris, G. R. Irwin [154] отримали наближену формулу для КІН методом асимптотичної інтерполяції. Наближені формули для КІН за дією на берегах тріщини довільного нормального навантаження приведені також у роботах [81, 82].

S. D. Akbarov, N. Yahnioğlu, A. Turan [66] розглянули задачу для нескінченної смуги з тріщиною. Для розв'язання задачі використовувались методи трьохвимірної лінеаризованої теорії пружності, а для підрахунку коефіцієнтів інтенсивності використаний енергетичний метод.

Задача для плоскої напруженої пружної півплощини з крайовою тріщиною, що розташована вздовж лінії з'єднання двох абсолютно зв'язних різнорідних чверть-площин була розв'язана в [70]. Мішана крайова задача була в подальшому зведена до системи двох функціональних рівнянь типу Вінера-Хопфа. R. Ballarini та H. A. Lou [72] розглянули застосування функції Гріна для розв'язання плоских задач теорії пружності з тріщинами на прикладах розв'язання задач біморфних смуг з тріщинами. Коефіцієнти інтенсивності підраховані з урахуванням навантаження, геометрії та властивостей матеріалів. Розв'язок для скінченної смуги, одна грань якої прив'язана до жорсткої опори, а інша знаходиться під дією рівномірного розтягуючого навантаження, був отриманий розгляданням нескінченної смуги, що містить поперечне жорстке включення в середині та двосиметрично навантажені поперечні тріщини, в [98]. Перетворення Фур'є та асимптотичний аналіз були застосовані для зведення задачі про тріщину третього роду, що перпендикулярна до сполучення композитної біморфної смуги, до сингулярного інтегрального рівняння, яке було чисельно розв'язано за допомогою квадратурної формули Гауса-Чебишева у [130].

У роботі Xianfang Li, S. H. Guo [123] розглянуті ефекти неоднорідності динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень для антипоскої міжфазної тріщини у функціонально градуїзованому матеріалі, зв'язаному до пружної півсмуги. Використання перетворень Фур'є і Лапласа звело віхідну мішану крайову задачу до трьох рівнянь у рядах, а потім до сингулярного інтегрального рівняння першого роду. Антиплоский аналіз впливу руйнування був представлений для слабо-неперервного сполучення у симетричній функціонально градуїзованій композитній смузі в [122]. За допомогою використання інтегральних перетворень Лапласа та Фур'є, задача

була зведена до парного інтегрального рівняння, та було отримано асимптотично аналітичний розв'язок напруженого поля біля вершин тріщини. У роботі Н. Н. Антоненко [3] запропонований спосіб розв'язання задачі про центральну продольну тріщину з наповнювачем у смузі. Для розв'язання задачі використано інтегральне перетворення Фур'є. Задача зведена до системи інтегродиференціальних рівнянь відносно похідних стрибків переміщень на берегах тріщини.

V. M. Alexandrov, D. A. Pozharskii [67] дослідили плоску задачу про міжфазну тріщину між пружною смугою та пружною півплощиною з іншого матеріалу. Для розв'язання системи інтегральних рівнянь для стрибків переміщень у зоні тріщини використовувався регулярний асимптотичний метод, котрий є ефективним, коли тріщина суттєво вузька. У роботі A. V. Dyskin, L. N. Germanovich, K. B. Ustinov [90] розглянуті дві конфігурації моделювання міжфазної тріщини з паралельними вільними границями: тріщина в півплощині та тріщина в центрі нескінченної смуги. Міжфазну тріщину на межі розділу кругового включення і матриці було досліджено в роботі [59].

Л. В. Степанова проаналізувала напружений стан біля стаціонарної тріщини поперечних переміщень у пластичному тілі. O. L. Bowie і C. E. Freese [77] розв'язали задачу згину смуги з тріщиною. Н. Chai [80] дослідив питання розповсюдження тріщин у пружній зчепленій смузі. L. I. Kal'muk, M. G. Stashchuk, V. I. Pokhmurs'kii [111] розв'язали задачу для жорстко зчепленої смуги та смуги з вільними границями з тріщиною та жорстким включенням, і обчислили коефіцієнти інтенсивності біля границь

тріщини і жорсткого включення. Дослідженню тріщин та жорстких включень у динамічній постановці присвячені роботи [134].

Chen Yi-zhou [83] вивчив питання аналізу напружень у нескінченній смугі, що послаблена періодичними тріщинами. Крайова задача зводиться до мішаної комплексної. Для розв'язання задачі використовується розширення варіаційного методу власних функцій. R. S. Dhaliwal, B. M. Singh [88, 153] розв'язали задачу для нескінченної жорстко зчепленої смуги з двома та трьома компланарними тріщинами Гріффіна. Вважається, що тріщини відкрились від внутрішнього тиску. Використовуючи перетворення Фур'є, розв'язок задачі зведений до системи інтегральних рівнянь, що розв'язуються точно. D.-S. Lee [121] розглянув пружно-статичну задачу для нескінченної смуги з циліндричним отвором та двома симетрично розташованими внутрішніми тріщинами, що перпендикулярні до границі. Розв'язок задачі зведений до системи трьох інтегральних рівнянь.

Н. А. Дорош і Г. С. Кіт [21] розглянули задачу рівноваги нескінченної смуги з прямолінійною поперечною тріщиною під дією температури. T. Menouillard, T. Belytschko [132] проаналізували розповсюдження тріщини в нагрітій смугі. M. V. Mirsalimov [133] звів задачу термopужності про смугу з тріщиною до сингулярного інтегрального рівняння.

F. Erdogan та K. Arin [91] запропонували технологію розв'язання пружних задач з довільно орієнтованою внутрішньою тріщиною. У якості прикладу в статті наведений розв'язок задачі для нескінченної смуги. F. Erdogan і H. Terada [92] розглянули задачу про півсмугу з бічною тріщиною. Півсмуга навантажена жорстким клином без тертя, який прикладений до тріщини. Контактна

задача зводиться до системи сингулярних інтегральних рівнянь. О. V. Poberezhnyi [140] дослідив вплив миттєвих гріючих джерел на напружений стан та коефіцієнти інтенсивності для півсмуги з граничною тріщиною.

R. V. Goldstein, I. N. Ryskov і R. L. Salganik [99] розглянули задачу для нескінченної смуги з центральною поперечною тріщиною та дослідили коефіцієнти інтенсивності. У роботі [112] розглянуто ряд динамічних задач для тонких пружних тіл.

V. D. Lamzyuk, V. I. Mossakovshii, S. D. Sotnikova [119] розв'язали задачу про напружену тріщину у нескінченній смузі методом суперпозиції розв'язання трьох задач: про напружену тріщину на нескінченній площині, про першу основну задачу для нескінченної однорідної смуги та про нескінченну смугу, яка вільна від навантаження.

P. A. Martynyuk, E. B. Polyak [129] представили загальний розв'язок задачі для смуги з тріщиною, що паралельна бічним граням на довільній відстані від границь. У роботі [104] досліджено міжфазні тріщини в пружних тілах за дії на них гармонічного навантаження.

R. R. Parmeter та B. Mukherji [137] задачу про смугу з крайовою тріщиною розв'язали методом скінченних елементів.

Метод, що базується на формулах взаємного перерозвинення розв'язків системи рівнянь Ляме в полярній та декартовій системах координат, був запропонований для розв'язання задачі для пружної закріпленої по торцю півсмуги з круговим жорстким включенням у [20].

Підхід методу ліній тріщини напруженого поля був поданий у [144] для обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень нескін-

ченної смуги, що розтягується, з ексцентричною тріщиною. Скінченна тріщина зі сталою довжиною (тріщина типу Йоффе), що розвивається у функціонально градуйованій смузі під плоским навантаженням була досліджена за допомогою методу Шмідта у [127]. За допомогою використання перетворення Фур'є та визначення стрибків компонентів переміщень вздовж поверхні тріщини як невідомих функцій, дві пари дуальних інтегральних рівнянь були отримані. Для розв'язання парних інтегральних рівнянь, стрибки компонент переміщень вздовж поверхні тріщини були розвинені у ряди за поліномами Якобі. Задача для нескінченної пружної смуги, що містить довільно розташовані тріщини і пари зосереджених сил сформульована в термінах системи сингулярних інтегральних рівнянь у [125].

Симетрична задача про дві поперечні тріщини в пружній смузі з підкріпленими поверхнями була сформульована в термінах сингулярного інтегрального рівняння [116]. Спеціальні випадки одної центральної тріщини чи двох крайових тріщин були продискутовані. У роботі [2] викладено методи та результати досліджень контактної взаємодії між тонкостінними елементами типу накладок (стрингерів) та включень з масивними тілами, а також дії штампів на тіло з покриттями та прослойками.

Статичні задачі теорії пружності для півплощини та смуги, що послаблені прямолінійною поперечною тріщиною, були досліджені у [114]. Метод узагальнених інтегральних перетворень зводить розв'язання задачі для рівнянь рівноваги до розв'язання сингулярного інтегрального рівняння першого роду з ядром Коші відносно похідної функції розкриття тріщини. Величини коефіцієнтів інтенсивності напружень біля вершини тріщини були отримані.

1.4. Врахування нерухомих особливостей невідомої функції при розв'язанні інтегральних рівнянь

Дослідженню сингулярних інтегральних рівнянь вигляду:

$$c_0 \varphi(x) + \frac{c_1}{\pi i} \int_0^1 \frac{\varphi(y)}{y-x} dy + \sum_{k=0}^n \frac{c_{k+2} x^{n_k}}{\pi i} \int_0^1 \frac{y^{k-n_k} \varphi(y)}{(y+x)^{k+1}} dy = f(x), \quad (1.1)$$

$$x \in I = [0; 1], 0 \leq \operatorname{Re} n_k \leq k, k = 0, 1, \dots, n$$

а також вигляду:

$$A\varphi(x) = c_0 \varphi(x) + \frac{c_1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(y)}{y-x} dy + \sum_{k=0}^n \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{c_{k+2}(x, y)(1-x)^{m_k^+}(1+x)^{m_k^-} \varphi(y)}{(1-y)^{m_k^+-k}(1+y)^{m_k^--k}(1-xy)^{k+1}} dy +$$

$$+ \int_{-1}^1 K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), 0 \leq \operatorname{Re} m_k^+ \leq k$$

присвячена робота Р. В. Дудучави [22].

Рівняння з однорідними 1-ї степені ядрами, що ускладнені операторами зсуву, вивчені А. П. Солдатовим [53] у просторах гольдерових функцій зі складною нескінченною вагою.

При $c_1 = 0$ рівняння (1.1), спираючись на роботу М. Г. Крейна [35], досліджував Л. Г. Михайлов [39].

У випадку $n = 0, c_0 = 0, c_1 = 1, \operatorname{Im} c_2 = 0$ рівняння (1.1) повністю розв'язав Н. Ф. Вуекнер [78] (випадок $n = 0, c_0 = 1, c_1 = 0$ був розглянутий раніше у [35]).

Рівняння (1.1) досліджував Г. І. Вігман [74], але дослідження носить незакінчений характер; рівняння (1.1) розв'язується в класі функцій $\bigcup_{0 < \alpha < 1} L_1(I, x^\alpha)$, що не є інваріантним відносно операторів, які входять у рівняння (1.1); підстановкою $x = e^{-t}, y = e^{-\tau}$ рівняння (1.1) зводиться до рівняння згортки на півосі, та автор формально розв'язує його методом Вінера-Хопфа [44], не досліджуючи інтегрованість отриманих розв'язків; просто метод Вінера-Хопфа в кла-

сичній формі придатний лише для рівнянь з неперервними предсимволами і при $c_1 = 0$ є непридатним для рівняння (1.1).

У випадку $n = 0, c_2 = -c_1$ рівняння (1.2) повністю розв'язано в роботах Ф. Трикомі [58] та С. Г. Міхліна [40].

У теперішній час також продовжуються дослідження сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями.

У роботі В. Г. Попова [141] розв'язок динамічної задачі про пружну півсмугу, що зчеплена з пружним півпростором, зведено до сингулярного інтегрального рівняння з двома нерухомими особливостями, яке розв'язано з використанням спеціальних квадратурних формул для сингулярних інтегралів. У [142] розв'язок задачі про визначення напруженого стану в пружном ізотропному півпросторі з тріщиною, що перетинається з його границею під гармонічними продовжними зсувними вібраціями, зведено до сингулярного інтегро-диференціального рівняння відносно невідомого стрибка переміщень на берегах тріщини. Розв'язок цього рівняння ускладнено існуванням нерухомої особливості в його ядрі. Отже, одним з важливих результатів роботи є розвиток ефективного наближеного методу для розв'язування таких рівнянь, що приймають до уваги реальні асимптотики невідомої функції. О. Ф. Кривий [118] розв'язав задачу про взаємний вплив міжфазних тунельних тріщин і включення в кусково-анізотропному просторі, де застосував метод, що дозволяє враховувати нерухомі особливості невідомих функцій. У роботі [136] запропоновано підхід розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями.

N. S. Gabbasov [94] розглянув лінійне інтегральне рівняння третього роду з нерухомими особливостями в ядрі. Для наближеного розв'язку цього рівняння в просторі розподілу, запропонована

нова узагальнена версія методу колокацій [95]. Симетричне характеристичне сингулярне інтегральне рівняння з двома нерухомими особливостями на кінцях у класі функцій обмежених на кінцях, було проаналізоване у [68, 69]. Для поліномів Чебишева першого роду в правій частині розв'язок інтегрального рівняння виражений у термінах двох не ортогональних поліномів з вагами. Заснований на цьому новому узагальненому спектральному співвідношенні для сингулярного оператора з двома нерухомими особливостями, наближений розв'язок повного сингулярного інтегрального рівняння отриманий шляхом приведення до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду. Дослідження оптимальної квадратурної формули для сингулярних інтегралів з нерухомою особливістю було отримане в роботі [152]. Чисельне розв'язання для гіперсингулярного інтегрального рівняння зубчатої півплощини задачі було отримано запропонованими у [79] методами колокацій. Ці методи шукають наближення похідної розв'язку оригінального рівняння. Дослідження алгебри, згенерованої сингулярними інтегральними операторами Коші та інтегральними операторами з нерухомими особливостями на одиничному інтервалі, було дано в роботі [89]. У [110] P. Junghanns, A. Rathsfeld розглянули поліноміальний метод колокацій для чисельного розв'язку сингулярних інтегральних рівнянь Коші з нерухомими особливостями на проміжку, де нерухомі особливості вважаються типу згортки Мелліна. У роботі Саакяна А. В. [49] отримані квадратурні формули найвищої алгебраїчної точності для сингулярних інтегралів та показана ефективність їх застосування для розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь з узагальненим ядром Коші, що називаються також рівняннями з нерухомою особливістю.

1.5. Висновки до першого розділу

Сучасні автори використовують два основних підходи: аналітичний та числово-аналітичний, вибір між якими визначається крайовими умовами на гранях півсмуги. Спільним в усіх цих підходах є подання розв'язку рівнянь рівноваги через гармонічні, бігармонічні та інші функції.

У монографії представлений підхід, запропонований Г. Я. Поповим [46], де інтегральні перетворення застосовано безпосередньо до рівнянь рівноваги та крайових умов вихідної задачі, що звело вихідну задачу до одновимірної, яку розв'язано за допомогою векторних крайових задач [48]. Для розв'язання інтегрального рівняння, до якого зведено розв'язок даної задачі, використано метод ортогональних поліномів, запропонований Г. Я. Поповим [46].

Дослідження праць, присвячених розв'язанню плоских задач теорії пружності для півсмуги, показало, що залишається відкритою проблема дослідження напруженого стану півсмуги при наявності трансверсальної тріщини. У роботах не враховувались нерухомі особливості функцій переміщень у кутових точках півсмуги.

З аналізу наукової літератури слідус, що незважаючи на значну кількість робіт, виконаних у напрямі дослідження мішаних плоских задач теорії пружності, існують не розв'язані проблеми врахування нерухомих особливостей функцій переміщень, а саме для пружної півнескінченної смуги під впливом на неї зовнішніх навантажень та наявності тріщини. У зв'язку з цим обраний напрямок досліджень, цілі та задачі яких описано у вступі до монографії.

РОЗДІЛ 2

МЕТОДИКА ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКІВ МІШАНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВНЕСКІНЧЕНОЇ СМУГИ

Даний розділ містить описання аналітичного апарату, що застосовується для розв'язання змішаних задач теорії пружності для півнескінченної смуги. Він базується на результатах робіт [46, 48]. Приведена методика розв'язання мішаних плоских задач, що заснована на застосуванні інтегральних перетворень безпосередньо до системи рівнянь рівноваги Ляме і крайових умов, що зводить вихідну задачу до векторної одновимірної крайової задачі. Векторна одновимірна крайова задача розв'язується точно з використанням апарату матричного диференційного числення та матричної функції Гріна.

2.1. Зведення вихідної крайової задачі до одновимірної векторної крайової задачі

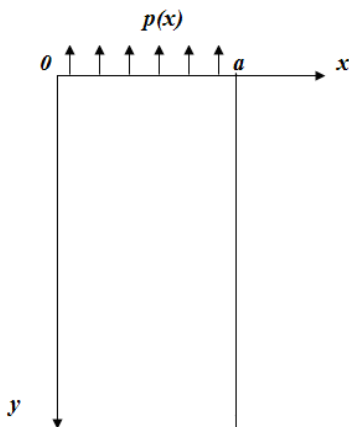


Рис. 2.1 Геометрія та координатна система півсмуги

Розглядається пружна півсмуга (рис. 2.1) (G – модуль пружності, μ – коефіцієнт Пуассона), яка займає область, що описується в декартовій системі координат співвідношеннями $0 < x < a, 0 < y < \infty$.

До півсмуги по короткому торцю $y=0, 0 < x < a$ прикладене нормальне навантаження:

$$\sigma_y|_{y=0} = p(x), \quad \tau_{xy}|_{y=0} = 0, \quad 0 < x < a, \quad (2.1)$$

де $p(x)$ є відома функція. На бічних півнескінченних гранях $x=0, 0 < y < \infty$ і $x=a, 0 < y < \infty$ граничні умови запишемо у формі:

$$U_0[f] = 0, \quad U_1[f] = 0, \quad 0 < y < \infty \quad (2.2)$$

Тут $U_0[f(x)] = \alpha_0 f(0, y) + \beta_0 \partial f / \partial x(0, y), U_1[f(x)] = \alpha_1 f(a, y) + \beta_1 \partial f / \partial x(a, y)$ – граничні функціонали загального вигляду (вони будуть деталізовані пізніше для кожної конкретної задачі), $f(x, y) = (u_x(x, y), u_y(x, y))^T$ – вектор переміщень.

Введемо тут і далі позначення для переміщень $u_x(x, y) = u(x, y), u_y(x, y) = v(x, y)$ та для похідних функції $f(x, y)$: $f' = \partial f / \partial x, f'' = \partial f / \partial y$. У цих позначеннях система рівнянь рівноваги Ляме зображується у поданні:

$$\begin{cases} \mu_* \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} + X_1(x, y) = 0 \\ \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \mu_* \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + X_2(x, y) = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

де $\mu_0 = \frac{1}{1-2\mu}, \mu_* = \mu_0 + 1, X_1(x, y) = X_x(x, y), X_2(x, y) = X_y(x, y)$ – компоненти об'ємних сил. Сталі μ_0, μ_* виражено через сталу Мусхелішвілі

$$\kappa = 3 - 4\mu: \mu_0 = \frac{2}{\kappa - 1}, \mu_* = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}, \frac{\mu_0}{\mu_*} = \frac{2}{\kappa + 1}, \mu_0 - 1 = \frac{3 - \kappa}{\kappa - 1}.$$

Систему (2.3) перепишемо у формі:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \frac{2}{\kappa + 1} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} X_1(x, y) = 0 \\ \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} + \frac{2}{\kappa - 1} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + X_2(x, y) = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Граничні умови по короткому торцю (2.1) переформулюємо в термінах переміщень:

$$2G\mu_0 \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{y=0} + (1 - \mu) \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) = p(x), 0 < x < a \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{y=0} = 0, \quad 0 < x < a. \quad (2.6)$$

Введемо невідому функцію $\chi(x) = v|_{y=0}$, $\chi'(x) = v'|_{y=0}$. Враховуючи крайову умову (2.6), отримаємо, що $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\chi'(x)$. Отже, умова (2.6) виконується автоматично.

Задача (2.2, 2.4-2.6) зводиться до одновимірної крайової задачі шляхом застосування інтегрального \sin - \cos перетворення Фур'є за змінною y :

$$\begin{bmatrix} u_\beta(x), X_{1\beta}(x) \\ v_\beta(x), X_{2\beta}(x) \end{bmatrix} = \int_0^\infty \begin{bmatrix} u(x, y), X_1(x, y) \\ v(x, y), X_2(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta y \\ \sin \beta y \end{bmatrix} dy \quad (2.7)$$

з відповідними формулами обернення:

$$\begin{bmatrix} u(x, y), X_1(x, y) \\ v(x, y), X_2(x, y) \end{bmatrix} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \begin{bmatrix} u_\beta(x), X_{1\beta}(x) \\ v_\beta(x), X_{2\beta}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta y \\ \sin \beta y \end{bmatrix} d\beta \quad (2.8)$$

Покрокове інтегрування рівнянь (2.4) наведено у додатку А. Інтегральне перетворення застосоване до крайових умов, у просторі трансформант отримано крайову задачу:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_\beta(x)}{dx^2} - \frac{\beta^2(\kappa-1)}{\kappa+1} u_\beta(x) + \frac{2\beta}{\kappa+1} \frac{dv_\beta(x)}{dx} = \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \chi'(x) - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} X_{1\beta}(x), \\ \frac{d^2 v_\beta(x)}{dx^2} - \frac{\beta^2(\kappa+1)}{\kappa-1} v_\beta(x) - \frac{2\beta}{\kappa-1} \frac{du_\beta(x)}{dx} = -\beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \chi(x) - X_{2\beta}(x) \\ U_0[\bar{y}_\beta] = 0, U_1[\bar{y}_\beta] = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\text{Тут } \bar{y}_\beta(x) = \begin{pmatrix} u_\beta(x) \\ v_\beta(x) \end{pmatrix}.$$

2.2. Формулювання та розв'язання векторної одновимірної крайової задачі у просторі трансформант

Для зведення задачі до векторної крайової задачі вводяться на-

$$\text{ступні вектор: } \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \chi'(x) - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} X_{1\beta}(x) \\ -\beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \chi(x) - X_{2\beta}(x) \end{pmatrix} \text{ і матриці: } P = \begin{pmatrix} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} & 0 \\ 0 & \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\kappa+1} \\ -\frac{1}{\kappa-1} & 0 \end{pmatrix}. \text{ Тоді рівняння (2.9) у векторній формі можуть бути}$$

записані у вигляді векторного рівняння $L_2 \bar{y}_\beta(x) = \vec{f}(x)$, де L_2 – диференціальний оператор другого порядку $L_2 \bar{y}_\beta(x) = I \bar{y}_\beta''(x) + 2\beta Q \bar{y}_\beta'(x) - \beta^2 P \bar{y}_\beta(x)$, I – одинична матриця. В результаті отримуємо векторну одновимірну крайову задачу:

$$\begin{aligned} L_2 \bar{y}_\beta(x) &= \vec{f}(x) \\ U_0[\bar{y}_\beta] &= 0, U_1[\bar{y}_\beta] = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Розв'язок векторної одновимірної крайової задачі відшукується як суперпозиція загального розв'язку векторного однорідного рівняння $\bar{y}_\beta^0(x)$ і його часткового розв'язку $\bar{y}_\beta^1(x)$:

$$\bar{y}_\beta(x) = \bar{y}_\beta^0(x) + \bar{y}_\beta^1(x) \quad (2.11)$$

Ці розв'язки побудовано за допомогою апарату матричного диференціального числення [17], [48], для чого потрібно побудувати фундаментальну матричну систему розв'язків відповідного матричного однорідного рівняння.

2.3. Побудова фундаментальної матричної системи розв'язків

Як доведено в [48], для того, щоб отримати розв'язок однорідного векторного рівняння у (2.10), спочатку потрібно побудувати розв'язок матричного однорідного рівняння:

$$L_2 Y_\beta(x) = 0, 0 < x < a, \quad (2.12)$$

тут $Y_\beta(x)$ – матриця порядку 2×2 . Оберемо матрицю $Y_\beta(x)$ у формі $Y_\beta(x) = e^{\xi x} I$ і підставимо у матричне рівняння (2.12). В результаті дістанемо рівність $L_2 e^{\xi x} I = M(\xi) e^{\xi x}$, де матриця $M(\xi)$ має вигляд:

$$M(\xi) = I\xi^2 + 2\beta Q\xi - \beta^2 P = \begin{pmatrix} \xi^2 - \beta^2 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} & \frac{2\beta\xi}{\kappa+1} \\ -\frac{2\beta\xi}{\kappa-1} & \xi^2 - \beta^2 \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \end{pmatrix}.$$

Відповідно до [47] розв'язок матричного однорідного рівняння сконструйовано за формулою:

$$Y(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{\xi x} M^{-1}(\xi) d\xi, \quad (2.13)$$

де $M^{-1}(\xi)$ – матриця, обернена до матриці $M(\xi)$. Замкнутий контур C охоплює всі особливі точки матриці $M^{-1}(\xi)$. Для оцінки цих особливих точок використовується той факт, що обернена матриця може

бути виражена як транспонована матриця алгебраїчних доповнень, помножена на визначник вихідної матриці. Визначник матриці $M(\xi)$ знайдено у вигляді полінома четвертого ступеня:

$$\det M(\xi) = \xi^4 - 2\beta^2 \xi^2 + \beta^4 = (\xi - \beta)^2 (\xi + \beta)^2.$$

Обернена матриця має вигляд:

$$M^{-1}(\xi) = \frac{1}{(\xi - \beta)^2 (\xi + \beta)^2} \begin{pmatrix} \xi^2 - \beta^2 \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} & -\frac{2\beta\xi}{\kappa + 1} \\ \frac{2\beta\xi}{\kappa - 1} & \xi^2 - \beta^2 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Після підстановки побудованої оберненої матриці (2.14) у вираз (2.13) можна помітити, що вираз під контурним інтегралом має два кратних полюси $\xi = \beta, \xi = -\beta$. Обчислюючи контурний інтеграл за допомогою теореми про лишки та обчислюючи лишки у кратних полюсах, отримуємо наступну матричну систему фундаментальних матричних розв'язків [8]:

$$Y_1(x) = \frac{e^{\beta x}}{2} \begin{pmatrix} \frac{\kappa - \beta x}{\beta(\kappa - 1)} & -\frac{x}{\kappa + 1} \\ \frac{x}{\kappa - 1} & \frac{\kappa + \beta x}{\beta(\kappa + 1)} \end{pmatrix} \quad Y_2(x) = \frac{e^{-\beta x}}{2} \begin{pmatrix} -\frac{\kappa + \beta x}{\beta(\kappa - 1)} & \frac{x}{\kappa + 1} \\ -\frac{x}{\kappa - 1} & -\frac{\kappa - \beta x}{\beta(\kappa + 1)} \end{pmatrix}.$$

Після підстановки знайдених матриць $Y_1(x), Y_2(x)$ у формулу (2.11) розв'язок векторного рівняння може бути записаний наступним чином [48]:

$$\bar{y}_\beta(x) = Y_1(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_2(x) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} + \bar{y}_\beta^1(x), \quad (2.15)$$

де сталі $c_i, i = \overline{1, 4}$ знаходяться з граничних умов на півнескінчених бічних гранях півсмути.

2.4. Побудова матриці-функції Гріна

Матрицю-функцію Гріна необхідно побудувати для отримання часткового розв'язку векторної крайової задачі. Знаходження матриці-функції Гріна реалізовано за допомогою методу матричних інтегральних перетворень [46]. Побудуємо матрицю-функцію Гріна $G(x, \xi)$ для векторної крайової задачі наступної структури:

$$\begin{cases} L_2 \bar{y}(x) = \bar{f}(x) \\ V_i [\bar{y}(x)] = 0, i = 0, 1, \end{cases} \quad (2.16)$$

де V_0, V_1 – крайові функціонали наступного вигляду:

$$\begin{aligned} V_0 [\bar{y}(x)] &= \alpha_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{y}(0) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{y}'(0), \\ V_1 [\bar{y}(x)] &= \alpha_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{y}(a) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{y}'(a). \end{aligned}$$

Ядро інтегрального перетворення обрано у вигляді:

$$H(x, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \sin \alpha_n x & 0 \\ 0 & \cos \alpha_n x \end{pmatrix}, \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

Обидві частини рівняння у (2.16) помножимо на ядро (2.17) та інтегруємо по частинам на відрізьку $[0; a]$.

Враховуючи, що:

$$\begin{aligned} H'(x, \alpha_n) &= \alpha_n \begin{pmatrix} \cos \alpha_n x & 0 \\ 0 & -\sin \alpha_n x \end{pmatrix}, \\ H'(0, \alpha_n) &= \alpha_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H'(a, \alpha_n) = \alpha_n \begin{pmatrix} \cos n\pi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ H(0, \alpha_n) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, H(a, \alpha_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \cos n\pi \end{pmatrix} = \cos n\pi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ H''(x, \alpha_n) &= -\alpha_n^2 H(x, \alpha_n), \end{aligned}$$

отримаємо, що:

$$\int_0^a H(x, \alpha_n) \bar{y}''(x) dx = \cos n\pi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{y}'(a) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{y}'(0) - \alpha_n \cos n\pi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{y}'(a) + \alpha_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{y}'(0) - \alpha_n^2 \bar{y}_n.$$

Запишемо:

$$\int_0^a H(x, \alpha_n) \bar{y}''(x) dx = V_0 [\bar{y}(x)] - \cos n\pi V_1 [\bar{y}(x)] - \alpha_n^2 \bar{y}_n.$$

За рахунок виконання граничних умов у (2.16), отримано:

$$\int_0^a H(x, \alpha_n) \bar{y}''(x) dx = -\alpha_n^2 \bar{y}_n, \quad \int_0^a H(x, \alpha_n) \bar{Q} \bar{y}'(x) dx = \alpha_n \bar{Q} \bar{y}_n,$$

$$\int_0^a H(x, \alpha_n) P \bar{y}(x) dx = \int_0^a H(x, \alpha_n) \bar{f}(x) dx = \bar{f}_n.$$

Рівняння в (2.16) прийме наступний вигляд:

$$\Omega_\beta(\alpha_n) \bar{y}_n = \bar{f}_n, \quad (2.18)$$

$$\text{тут } \bar{y}_n = \int_0^a \bar{y}(x) H(x, \alpha_n) dx, \quad \bar{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\kappa+1} \\ \frac{1}{\kappa-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega_\beta(\alpha_n) = -I\alpha_n^2 - 2\beta\alpha_n\bar{Q} - \beta^2 P =$$

$$= \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 - \beta^2 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} & -\frac{2\beta\alpha_n}{\kappa+1} \\ -\frac{2\beta\alpha_n}{\kappa-1} & -\alpha_n^2 - \beta^2 \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \end{pmatrix}.$$

Розв'язок рівняння (2.18) має вигляд:

$$\bar{y}_n = \Omega_\beta^{-1}(\alpha_n) \bar{f}_n$$

$$\text{де } \Omega_\beta^{-1}(\alpha_n) = \frac{1}{(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_n^2(\kappa-1) + \beta^2(\kappa+1)}{\kappa-1} & \frac{2\beta\alpha_n}{\kappa+1} \\ \frac{2\beta\alpha_n}{\kappa-1} & -\frac{\alpha_n^2(\kappa+1) + \beta^2(\kappa-1)}{\kappa+1} \end{pmatrix}.$$

Обернене інтегральне перетворення застосовується до розв'язку

$\vec{y}_n = \begin{pmatrix} y_{n1} \\ y_{n2} \end{pmatrix}$. У покомпонентній формі воно може бути записано так:

$$y_1(x) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} y_{n1} \sin(\alpha_n x) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} y_{n1} \sin(\alpha_n x),$$

$$y_2(x) = \frac{y_{02}}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} y_{n2} \cos(\alpha_n x) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} y_{n2} \cos(\alpha_n x).$$

У векторній формі маємо $\vec{y}(x) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} H(x, \alpha_n) \vec{y}_n$, тут штрих означає, що нульовий член помножується на $1/2$. З іншого боку маємо, що $\vec{y}_n = \int_0^a H(x, \alpha_n) \vec{y}(x) dx$. Після об'єднання цих двох результатів, побудовано формулу для шуканого вектора $\vec{y}(x) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} H(x, \alpha_n) \Omega_{\beta}^{-1}(\alpha_n) \vec{f}_n$. Використаємо зображення $\vec{f}_n = \int_0^a H(\xi, \alpha_n) \vec{f}(\xi) d\xi$ та отримаємо наступне співвідношення:

$$\begin{aligned} \vec{y}(x) &= \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} H(x, \alpha_n) \Omega_{\beta}^{-1}(\alpha_n) \int_0^a H(\xi, \alpha_n) \vec{f}(\xi) d\xi = \\ &= \int_0^a \left[\frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} H(x, \alpha_n) \Omega_{\beta}^{-1}(\alpha_n) H(\xi, \alpha_n) \right] \vec{f}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

З останньої формули випливає, що матриця-функція Гріна крайової задачі (2.16) має вигляд:

$$G(x, \xi) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} H(x, \alpha_n) \Omega_{\beta}^{-1}(\alpha_n) H(\xi, \alpha_n). \quad (2.19)$$

Подання (2.19) є білінійним розвиненням матриці-функції Гріна [162].

Для даної матриці-функції Гріна виконано всі властивості функції Гріна, зокрема, виконані граничні умови в (2.16):

$$V_0[G(x, \xi)] = 0, V_1[G(x, \xi)] = 0$$

Матриця Гріна має вигляд:

$$G(x, \xi) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -\frac{\sin(\alpha_n \xi) \sin(\alpha_n x) [(\kappa-1)\alpha_n^2 + (\kappa+1)\beta^2]}{(\kappa-1)(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} & \frac{2\alpha_n \beta \cos(\alpha_n \xi) \sin(\alpha_n x)}{(\kappa+1)(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} \\ \frac{2\alpha_n \beta \sin(\alpha_n \xi) \cos(\alpha_n x)}{(\kappa-1)(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} & -\frac{\cos(\alpha_n \xi) \cos(\alpha_n x) [(\kappa+1)\alpha_n^2 + (\kappa-1)\beta^2]}{(\kappa+1)(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} \end{pmatrix}$$

У додатку Б проведено спрощення матриці та остаточно наведено покомпонентне зображення матриці-функції Гріна.

Розв'язок крайової задачі (2.10) набуває вигляду:

$$\bar{y}_\beta(x) = Y_1(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_2(x) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} + \int_0^a G(x, \xi) \bar{f}(\xi) d\xi. \quad (2.20)$$

2.5. Побудова розв'язку вихідної задачі

Вирази для трансформант функцій переміщень (2.20) обернено за формулами (2.8). В результаті отримано подання для функцій переміщень, що залежить від невідомої функції $\chi(\xi)$ або $\chi'(\xi)$. Невідому функцію знаходимо за рахунок виконання умови по короткому торцю $\sigma_y|_{y=0} = p(x)$, $0 < x < a$. Але оскільки інтеграли, що входять до зображень функцій переміщень, є слабо-збіжними, спочатку потрібно відокремити їх слабо-збіжні частини, для чого використано методику, яка викладена у додатку В.

2.6. Методика розв'язання сингулярного інтегрального чи інтегро-диференціального рівняння

В залежності від умов по короткому торцю розв'язання задачі зводиться до розв'язання сингулярного інтегро-диференціального рівняння (СІДР) або сингулярного інтегрального рівняння (СІР) з однією чи двома нерухомими особливостями.

2.6.1. Розв'язання СІДР

У випадку, коли навантаження прикладене до середини короткого торця $y = 0$, $a_0 < x < a_1$:

$$\sigma_y \Big|_{y=0} = p(x), \quad \tau_{xy} \Big|_{y=0} = 0, \quad a_0 < x < a_1. \quad (2.21)$$

На ділянках $y = 0$, $0 < x < a_0$, $a_1 < x < a$, $y = 0$, $a_1 < x < a$ виконуються умови гладкого контакту:

$$v \Big|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy} \Big|_{y=0} = 0, \quad 0 < x < a_0, a_1 < x < a \quad (2.22)$$

розв'язання задачі зводиться до розв'язання СІДР:

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_{a_0}^{a_1} \chi(\xi^*) \ln \frac{1}{|\xi^* - x^*|} d\xi^* + \int_{a_0}^{a_1} \chi(\xi^*) f(\xi^*, x^*) d\xi^* = r(x^*), \quad a_0 < x^* < a_1 \quad (2.23)$$

де $r(x)$, $f(\xi, x)$ – відомі регулярні функції при $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq a$.

Виконується заміна змінних $\xi = \frac{2\xi^* - (a_0 + a_1)}{a_1 - a_0}$, $x = \frac{2x^* - (a_0 + a_1)}{a_1 - a_0}$ для переходу до інтервалу інтегрування $[-1; 1]$. У результаті інтегро-диференціальне рівняння (2.23) приймає наступний вигляд:

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \tilde{\chi}(\xi) \ln \frac{1}{|\xi - x|} d\xi + \int_{-1}^1 \tilde{\chi}(\xi) \tilde{f}(\xi, x) d\xi = \tilde{r}(x), \quad -1 < x < 1, \quad (2.24)$$

$$\text{тут} \quad \tilde{\chi}(\xi) = \chi\left(\frac{(a_1 - a_0)\xi + (a_0 + a_1)}{2}\right), \quad \tilde{r}(x) = \frac{(a_1 - a_0)}{2} r\left(\frac{(a_1 - a_0)\xi + (a_0 + a_1)}{2}\right),$$

$\tilde{f}(\xi, x) = \frac{(a_1 - a_0)^2}{4} f\left(\frac{(a_1 - a_0)\xi + (a_0 + a_1)}{2}, \frac{(a_1 - a_0)x + (a_0 + a_1)}{2}\right)$. Інтегральне рівняння (2.24) розв'язується методом ортогональних поліномів [46], що дозволяє враховувати дійсний порядок особливості розв'язку на кінцях інтервалу інтегрування. Згідно з методом, функцію $\tilde{\chi}(\xi)$ розвинуто в ряд за поліномами Чебишева другого роду:

$$\tilde{\chi}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \sqrt{1 - \xi^2} U_n(\xi), \quad \xi \in [-1; 1], \quad (2.25)$$

де $U_n(x)$ поліноми Чебишева другого роду. Вираз (2.25) підставлено до СІДР (2.24), та враховано наявність спектрального співвідношення [46]:

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \ln|x-y| \sqrt{1-y^2} U_n(y) dy = -\pi(n+1) U_n(x), \quad -1 < x < 1. \quad (2.26)$$

Застосування стандартної схеми методу ортогональних поліномів зводить розв'язання СІДР до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $s_n, n = 0, 1, \dots$

$$s_m + \sum_{n=0}^{\infty} s_n D_{m,n} = f_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.27)$$

$$\text{де} \quad D_{m,n} = -\frac{1}{\pi(m+1)\|U_m\|^2} \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 U_n(\xi) U_m(x) \sqrt{1-\xi^2} \sqrt{1-x^2} \tilde{f}(\xi, x) d\xi,$$

$$f_m = -\frac{1}{\pi(m+1)\|U_m\|^2} \int_{-1}^1 \tilde{r}(x) U_m(x) \sqrt{1-x^2} dx.$$

Систему (2.27) розв'язано методом редукції, справедливості якої доведено за схемою, викладеною у [46].

2.6.2. Розв'язання СІР у випадку наявності однієї нерухомої особливості

У випадку, коли навантаження прикладене з лівого краю короткого торця $y = 0$, $0 < x < a_1$, $a_1 \neq a$:

$$\sigma_y \Big|_{y=0} = p(x), \quad \tau_{xy} \Big|_{y=0} = 0, \quad 0 < x < a_1. \quad (2.28)$$

На лінії $y = 0$, $a_1 < x < a$ виконуються умови гладкого контакту:

$$v \Big|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy} \Big|_{y=0} = 0, \quad a_1 < x < a. \quad (2.29)$$

Розв'язання задачі зводиться до розв'язання СІР з однією нерухомою особливістю:

$$\int_0^{a_1} \chi'(\xi^*) \left[\frac{1}{\xi^* - x^*} + f(\xi^*, x^*) \right] d\xi^* = r(x^*), \quad 0 < x^* < a_1, \quad (2.30)$$

де $r(x)$ – відома регулярна функція при $a_1 \neq a$. Функція $f(\xi, x)$ містить нерухому особливість на лівому кінці інтервалу інтегрування.

Виконується заміна змінних $\xi = \frac{\xi^*}{a_1}$, $x = \frac{x^*}{a_1}$ для переходу до інтервалу інтегрування $[0;1]$. У результаті СІР (2.30) переписано у формі СІР:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{\chi}(\xi)}{\xi - x} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{\chi}(\xi) \left[\frac{h_1}{\xi + x + 2} + \frac{h_2(x+1)}{(\xi + x + 2)^2} + \frac{h_3(\xi+1)(x+1)}{(\xi + x + 2)^3} \right] d\xi + \\ & + \int_{-1}^1 \tilde{\chi}(\xi) K(x, \xi) d\xi = \tilde{r}(x), \quad -1 < x < 1, \end{aligned} \quad (2.31)$$

де $\tilde{\chi}(\xi) = \chi' \left(\frac{a_1(\xi+1)}{2} \right)$, $K(x, \xi), \tilde{r}(x)$ – відомі регулярні функції,

$h_1 = -\frac{\kappa^2 - 3}{2\kappa}$, $h_2 = -\frac{2}{\kappa}$, $h_3 = \frac{4}{\kappa}$. Тут, як бачимо, при $\xi = -1$ присутня нерухома особливість на лівому кінці інтервалу інтегрування.

Для існування єдиного розв'язку СІР (2.31) у класах функцій з інтегрованими особливостями на кінцях, функція $\tilde{\chi}(\xi)$ повинна задовольняти додатковій умові:

$$\int_{-1}^1 \tilde{\chi}(\xi) d\xi = 0 \quad (2.32)$$

Асимптотичні властивості розв'язку СІР (2.31) будуть визначені розв'язком відповідного характеристичного рівняння:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \hat{\chi}(\xi) \left[\frac{1}{1 - \frac{x}{\xi}} + \frac{h_1}{1 + \frac{x}{\xi}} + \frac{h_2 \frac{x}{\xi}}{\left(1 + \frac{x}{\xi}\right)^2} + \frac{h_3 \frac{x}{\xi}}{\left(1 + \frac{x}{\xi}\right)^3} \right] \frac{d\xi}{\xi} = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2.33)$$

де $\hat{\chi}(\xi) = \chi'(a_1 \xi)$.

До рівняння (2.33) застосуємо асимптотичний метод [117], [118]. Отримаємо трансцендентне рівняння для визначення показника особливості розв'язку:

$$\frac{1}{\sin(\pi s)} \left[\cos(\pi s) + h_1 + h_2 s + h_3 \frac{s(1-s)}{2} \right] = 0$$

Переформулюємо це рівняння:

$$\cos(\lambda \pi) + \frac{2}{3-4\mu} \lambda^2 - \frac{4}{3-4\mu} \lambda - \frac{8\mu^2 - 12\mu + 3}{3-4\mu} = 0 \quad (2.34)$$

Знайдемо його корені λ_k (табл. 1).

Відмітимо, що рівняння (2.34) співпадає з рівнянням Уфлянда для задачі для клину з кутом розкриття $\pi/2$ з урахуванням $p = \lambda - 1$.

Для розв'язання СІР (2.31) застосовується спеціальна методика [118], збіжність якої доведено у [36], що дозволяє враховувати нерухомі особливості невідомої функції. Згідно з нею невідома функція $\tilde{\chi}(\xi)$ подається у вигляді суми на інтервалі [128]:

$$\tilde{\chi}(\xi) = \sum_{k=0}^{N-1} [s_k \rho_k^-(\xi) + s_{k+N} \rho_k^+(\xi)], \quad \xi \in [-1; 1], \quad (2.35)$$

де $\rho_{2k}^{-}(\xi) = (1 + \xi)^{\operatorname{Re} \lambda_k} \cdot \cos(\operatorname{Im} \lambda_k \ln(1 + \xi))$, $\rho_{2k+1}^{-}(\xi) = (1 + \xi)^{\operatorname{Re} \lambda_k} \cdot \sin(\operatorname{Im} \lambda_k \ln(1 + \xi))$,
 $k = \overline{0, N-1}$, $\rho_k^{+}(\xi) = \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}}$, $k = \overline{0, N-1}$.

Таблиця 1

Корені рівняння (2.34)

$\operatorname{Re} \lambda_k$	$\operatorname{Im} \lambda_k$
-0.711876621391612	0.578740005664639
0.307935318489597	0
1.692064681510401	0
2.711876621391613	0.578740005664639
4.803618603148355	1.137450986802122
6.845283759060861	1.410612909436295
8.870599399499873	1.598048762673253

Сегмент $[-1; 1]$ ділиться на $2N$ відрізків точками $x_i : P_{2N-1}^{\lambda_0, -0.5}(x_i) = 0, i = \overline{0, 2N-1}$. СІР (2.31) розглядається при $x = x_i, i = \overline{0, 2N-1}$.

Після підстановки виразу для невідомої функції (2.35) до СІР (2.31) з урахуванням умови (2.32) отримуємо систему $2N$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих сталих $s_k, k = \overline{0, 2N-1}$:

$$\sum_{k=0}^{N-1} [s_k d_{ki}^{-} + s_{k+N} d_{ki}^{+}] d\xi = \tilde{r}(x_i), i = \overline{0, 2N-1}, \quad (2.36)$$

де $d_{ki}^{\pm} = \int_{-1}^1 \rho_k^{\pm}(\xi) \left[\frac{1}{\xi - x_i} + \frac{h_1}{\xi + x_i - 2} + \frac{h_2(x_i - 1)}{(\xi + x_i - 2)^2} + \frac{h_3(\xi - 1)(x_i - 1)}{(\xi + x_i - 2)^3} + K(x_i, \xi) \right] d\xi$,

$$k = \overline{0, N-1}, i = \overline{0, 2N-1}.$$

2.6.3. Розв'язання СІР у випадку наявності двох нерухомих особливостей

У випадку, коли навантаження прикладено по всьому короткому торцю (2.1), розв'язання задачі зводиться до розв'язання СІР з двома нерухомими особливостями:

$$\int_0^a \chi'(\xi^*) \left[\frac{1}{\xi^* - x^*} + f(\xi^*, x^*) \right] d\xi^* = r(x^*), \quad 0 < x^* < a, \quad (2.37)$$

де $r(x)$ – відома регулярна функція. Функція $f(\xi, x)$ містить нерухомі особливості на обох кінцях інтервалу інтегрування.

Виконується заміна змінних $\xi = \frac{2\xi^* - a}{a}, x = \frac{2x^* - a}{a}$ для переходу до інтервалу інтегрування $[-1; 1]$. У результаті СІР (2.37) записується у формі:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{\chi}(\xi)}{\xi - x} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{\chi}(\xi) \left[h_1 \left(\frac{1}{\xi + x - 2} + \frac{1}{\xi + x + 2} \right) + \right. \\ & \left. + h_2 \left(\frac{x - 1}{(\xi + x - 2)^2} + \frac{x + 1}{(\xi + x + 2)^2} \right) + h_3 \left(\frac{(\xi - 1)(x - 1)}{(\xi + x - 2)^3} + \frac{(\xi + 1)(x + 1)}{(\xi + x + 2)^3} \right) \right] d\xi + \\ & \left. + \int_{-1}^1 \tilde{\chi}(\xi) K(x, \xi) d\xi = \tilde{r}(x), \quad -1 < x < 1 \end{aligned} \quad (2.38)$$

тут $\tilde{\chi}(\xi) = \chi' \left(\frac{a(\xi + 1)}{2} \right)$, $K(x, \xi), \tilde{r}(x)$ – відомі регулярні функції, $h_1 = -\frac{\kappa^2 - 3}{2\kappa}, h_2 = -\frac{2}{\kappa}, h_3 = \frac{4}{\kappa}$. Як видно, тут при $\xi = \pm 1$ присутні нерухомі особливості на кінцях інтервалу інтегрування.

Трансцендентне рівняння для визначення показника особливості розв'язку (2.38) співпадає з трансцендентним рівнянням для (2.33).

Згідно зі схемою, викладеною в главі 2.6.2, невідому функцію $\tilde{\chi}(\xi)$ розвиваємо в суму [161]:

$$\tilde{\chi}(\xi) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[s_k \rho_k^-(\xi) + s_{k+N} \rho_k^+(\xi) \right], \quad \xi \in [-1; 1], \quad (2.39)$$

де $\rho_{2k}^\mp(\xi) = (1 \pm \xi)^{\operatorname{Re} \lambda_k} \cdot \cos(\operatorname{Im} \lambda_k \ln(1 \pm \xi))$, $\rho_{2k+1}^\mp(\xi) = (1 \pm \xi)^{\operatorname{Re} \lambda_k} \cdot \sin(\operatorname{Im} \lambda_k \ln(1 \pm \xi))$, $k = \overline{0, N-1}$.

Сегмент $[-1;1]$ ділиться на $2N$ відрізків точками $x_i : P_{2N-1}^{\lambda_0, \lambda_0}(x_i) = 0, i = \overline{0, 2N-1}$. СІР (2.38) розглядається при $x = x_i, i = \overline{0, 2N-1}$.

Підстановка виразу для невідомої функції (2.39) до СІР (2.38) з урахуванням умови (2.32) приводить до системи $2N$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих сталих $s_k, k = \overline{0, 2N-1}$:

$$\sum_{k=0}^{N-1} [s_k d_{ki}^- + s_{k+N} d_{ki}^+] = \tilde{r}(x_i), i = \overline{0, 2N-1} \quad (2.40)$$

$$\text{де } d_{ki}^{\pm} = \int_{-1}^1 \rho_k^{\pm}(\xi) \left[\frac{1}{\xi - x_i} + h_1 \left(\frac{1}{\xi + x_i - 2} + \frac{1}{\xi + x_i + 2} \right) + h_2 \left(\frac{x_i - 1}{(\xi + x_i - 2)^2} + \frac{x_i + 1}{(\xi + x_i + 2)^2} \right) + \right. \\ \left. + h_3 \left(\frac{(\xi - 1)(x_i - 1)}{(\xi + x_i - 2)^3} + \frac{(\xi + 1)(x_i + 1)}{(\xi + x_i + 2)^3} \right) + K(x_i, \xi) \right] d\xi, k = \overline{0, N-1}, i = \overline{0, 2N-1}.$$

2.7. Висновки до другого розділу

Інтегральні перетворення застосовано безпосередньо до рівнянь рівноваги Ляме та крайових умов плоскої задачі теорії пружності для півсмуги, що дозволило уникнути застосування допоміжних гармонічних або бігармонічних функцій. У просторі трансформант вихідну задачу зведено до одновимірної векторної крайової задачі, яку розв'язано методами диференціального матричного числення. Для цього побудовані фундаментальна матрична система розв'язків однорідного матричного рівняння та матрицю-функцію Гріна для диференціального векторного рівняння другого порядку. Розв'язок зведено до СІДР або СІР, яке може в залежності від постановки задачі мати одну або дві нерухомі особливості. Запропоновано застосування спеціальної числової методики, що дозволило врахувати наявність нерухомих особливостей.

РОЗДІЛ 3

МІШАНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВСМУГИ

У розділі досліджено плоскі мішані задачі теорії пружності для півсмуги, що зчеплена по бічних півнескінченних гранях, та трьох конфігурацій прикладеного навантаження по короткому торцю.

Розв'язок задач для півсмуги зведено до розв'язання інтегродиференціального або інтегрального рівнянь в залежності від конфігурації прикладеного навантаження. Розв'язки інтегральних рівнянь отримано з урахуванням нерухомих особливостей шуканої функції на кінцях проміжку інтегрування.

Проведено числовий аналіз розподілу напружень на бічних гранях та у середині півсмуги у залежності від конфігурації прикладеного навантаження.

3.1. Мішана задача теорії пружності для півсмуги при виконанні умов другої основної задачі теорії пружності

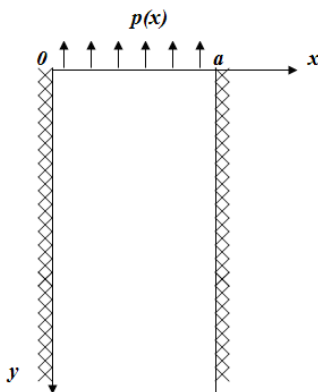


Рис. 3.1. Геометрія та координатна система півсмуги
для умов зчеплення

Розглядається пружна півсмуга (рис. 3.1), яка займає область, що описується в декартовій системі координат співвідношеннями $0 < x < a, 0 < y < \infty$. Півсмуга навантажена по торцю $y = 0, 0 < x < a$ (2.5-2.6). Переміщення у півсмугі задовольняють рівняння рівноваги (2.4). Об'ємними силами будемо нехтувати $X_1(x, y) = 0, X_2(x, y) = 0$.

Деталізуємо граничні умови на бічних півнескінченних гранях (2.2): бічні грані $x = 0, x = a, 0 < y < \infty$:

$$u(0, y) = 0, \quad v(0, y) = 0, \quad 0 < y < \infty, \quad (3.1)$$

$$u(a, y) = 0, \quad v(a, y) = 0, \quad 0 < y < \infty, \quad (3.2)$$

або за допомогою крайових функціоналів запишемо у векторному поданні:

$$U_0 \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0, y) \\ v(0, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, U_1 \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(a, y) \\ v(a, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Потрібно відшукати поле переміщень та напружень усередині півсмуги та на її гранях.

Відповідно до побудованого розв'язку (2.20) формули для функцій переміщень мають наступне зображення [7, 25, 26]:

$$u_\beta(x) = Y_1^{11}(x)c_1 + Y_1^{12}(x)c_2 + Y_2^{11}(x)c_3 + Y_2^{12}(x)c_4 + \\ + \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a G_{11}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi - \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a G_{12}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi, \quad (3.4)$$

$$v_\beta(x) = Y_1^{21}(x)c_1 + Y_1^{22}(x)c_2 + Y_2^{21}(x)c_3 + Y_2^{22}(x)c_4 + \\ + \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a G_{21}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi - \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a G_{22}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi. \quad (3.5)$$

Для знаходження коефіцієнтів $c_i, i=1,4$ скористаємося граничними умовами (3.3) (грані $x = 0$ та $x = a$) у просторі трансформант:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\beta(0) \\ v_\beta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\beta(a) \\ v_\beta(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді має місце наступна матрична система [24]:

$$\begin{cases} Y_1(0) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_2(0) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = -\bar{y}_\beta^1(0), \\ Y_1(a) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_2(a) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = -\bar{y}_\beta^1(a). \end{cases} \quad (3.6)$$

Розв'язок системи (3.6) наведено у додатку В.

3.2. Навантаження по середині короткого торця (випадок 1)

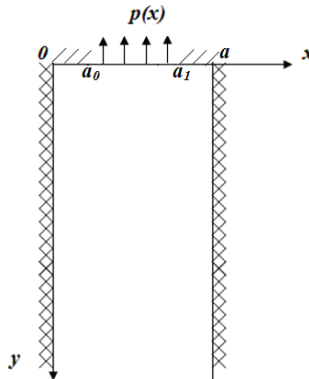


Рис. 3.2. Геометрія та координатна система півсмуги для умов зчеплення для випадку 1

Розглянемо півсмугу, що навантажена по середині короткого торця $y=0, a_0 < x < a_1$, $a_0 \neq 0, a_1 \neq a$ (рис. 3.2).

Півсмугу навантажено по торцю $y=0$, $a_0 < x < a_1$:

$$\sigma_y|_{y=0} = p(x), \quad \tau_{xy}|_{y=0} = 0, \quad a_0 < x < a_1 \quad (3.7)$$

На ділянках $y=0$, $0 < x < a_0$, $a_1 < x < a$, $y=0$, $a_1 < x < a$ виконуються умови гладкого контакту:

$$v|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}|_{y=0} = 0, \quad 0 < x < a_0, a_1 < x < a. \quad (3.8)$$

Граничні умови (3.7) та (3.8) мають вигляд:

$$2G\mu_0 \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{y=0} + (1-\mu) \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) = p(x), a_0 < x < a_1, \quad (3.9)$$

$$v|_{y=0} = 0, \quad 0 < x < a_0, a_1 < x < a, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{y=0} = 0, \quad 0 < x < a \quad (3.11)$$

Відповідно до схеми розділу 2 введемо невідому функцію $\chi(x) = v|_{y=0}$, $\chi'(x) = v'|_{y=0}$. З огляду на крайову умову (3.11) впевнімося, що $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\chi'(x)$ та умову (3.11) виконано автоматично.

Крайові умови на бічних півнескінченних гранях мають вигляд (3.3). Формули для функцій переміщень подано зображеннями (3.4-3.5).

Інтегральні доданки у (3.4) та (3.5) мають наступний вигляд:

$$\int_0^a G_{i1}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi, \int_0^a G_{i2}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi, i=1,2,$$

перший з інтегральних доданків можна перетворити до вигляду [163, 164]:

$$\begin{aligned} \int_0^a G_{i1}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi &= \int_{+0}^{a_0-0} G_{i1}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi + \int_{a_0+0}^{a_1-0} G_{i1}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi + \\ &+ \int_{a_1+0}^{a-0} G_{i1}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi = [G_{i1}(x, \xi) \chi(\xi)]_{+0}^{a_0-0} + [G_{i1}(x, \xi) \chi(\xi)]_{a_0+0}^{a_1-0} + \\ &+ [G_{i1}(x, \xi) \chi(\xi)]_{a_1+0}^{a-0} - \int_0^a \frac{\partial G_{i1}}{\partial \xi}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi = - \int_0^a \frac{\partial G_{i1}}{\partial \xi}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Тут $\chi(a_0-0) = 0$, $\chi(a_1+0) = 0$ у силу умови гладкого контакту (3.10), $\chi(+0) = 0$, $\chi(a-0) = 0$, оскільки виконуються умови зчеплення (3.1-

3.2) на бічних гранях півсмуги, $\chi(a_0+0)=0, \chi(a_1-0)=0$, так як розв'язок відшукується в класі неперервних функцій у силу механічного змісту невідомої функції $\chi(x)=v|_{y=0}$ як функції переміщень.

Як результат, співвідношення (3.4-3.5) записуються у формі:

$$\begin{aligned} u_\beta(x) &= Y_1^{11}(x)c_1 + Y_1^{12}(x)c_2 + Y_2^{11}(x)c_3 + Y_2^{12}(x)c_4 - \\ &- \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a \frac{\partial}{\partial \xi} G_{11}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi - \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a G_{12}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi, \\ v_\beta(x) &= Y_1^{21}(x)c_1 + Y_1^{22}(x)c_2 + Y_2^{21}(x)c_3 + Y_2^{22}(x)c_4 - \\ &- \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a \frac{\partial}{\partial \xi} G_{21}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi - \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a G_{22}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Згідно з формулами (2.8), отримаємо наступні вирази для функцій переміщень вигляду:

$$u(x, y) = \int_0^\infty \int_0^a f(x, \xi, \beta) \cos(\beta y) \chi(\xi) d\xi d\beta, \quad (3.13)$$

$$v(x, y) = \int_0^\infty \int_0^a g(x, \xi, \beta) \sin(\beta y) \chi(\xi) d\xi d\beta. \quad (3.14)$$

Формули (3.13-3.14) остаточно визначають переміщення, якщо буде відомо функцію $\chi(x)=v|_{y=0}$. Для її знаходження необхідно задовольнити умовам (3.9-3.10), які залишились поки що невиконаними. Виконати умову (3.9) шляхом безпосередньої підстановки в неї співвідношень (3.13-3.14) неможливо, бо інтеграли у виразах для переміщень є слабо-збіжними. Тому для відокремлення їх слабо-збіжних частин використовується методика [162], що викладена у додатку Г. З умови (3.10) випливає, що:

$$\chi(\xi) = 0, \quad 0 < \xi < a_0, a_1 < \xi < a. \quad (3.15)$$

Послідуюча підстановка формул переміщень у крайову умову (3.9) приводить до СІДР (2.23), розв'язання якого описано в главі 2.6.1. Підстановка знайдених сталих $s_n, n=0,1,\dots$ у формули (3.13-3.14) завершує побудову розв'язку задачі.

Для півсмуги з параметрами $\sigma_x(0,y), \sigma_y(0,y)$ при $G=61.2781955 \cdot 10^9$ Па, $\mu=0.33$, $p(x)=1$ Па, $a=10$ м проаналізовано значення нормальних напружень на бічних гранях півсмуги при $0 \leq y \leq 10$ в залежності від розміру області прикладення механічного навантаження по короткому торцю. Позначимо через ϖ довжину зон гладкого контакту по короткому торцю ($\varpi = a_0 = a - a_1$).

На рисунках 3.3, 3.4 тут і далі суцільна, штрих-пунктирна та пунктирна лінії описують відповідно значення $\varpi = 40\%a$, $\varpi = 10\%a$ та $\varpi = 0.5\%a$.

Напруження $\sigma_x(0,y)$ майже у два рази більші за напруження $\sigma_y(0,y)$.

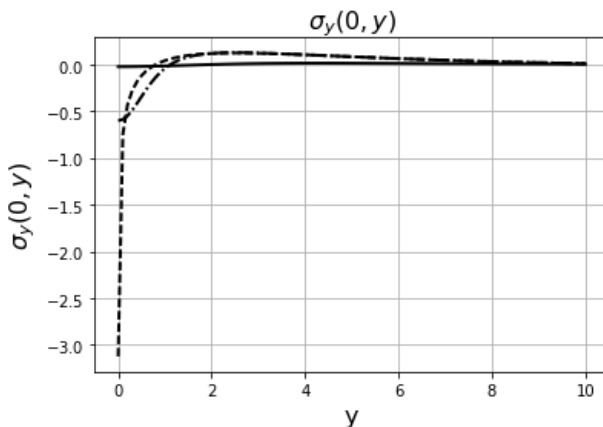


Рис. 3.3. Нормальні напруження $\sigma_y(0,y), 0 < y < a$ при різних значеннях a_0, a_1

Як видно з графіків, нормальні напруження на бічних гранях є стискальними при $0 < y < y_1$, далі вони стають розтягувальними та при подальшому збільшенні y спадають до нуля. Причому $y_1 = 2.4$ при $\sigma = 40\%a$, $y_1 = 1.2$ при $\sigma = 10\%a$, $y_1 = 1.0$ при $\sigma = 0.5\%a$. Тобто, зі збільшенням зони прикладеного навантаження область стискальних напружень на бічних гранях біля торця повільно зменшується.

Абсолютні значення нормальних напружень збільшуються зі збільшенням розміру зони прикладеного навантаження. При значенні параметру $\sigma < 0.5\%a$ розрахунки перестають бути стабільними у зв'язку з тим, що починається вплив нерухомих особливостей ядра рівняння. Щоб наблизити розрахунки до бічних граней виникає необхідність враховувати нерухомі особливості.

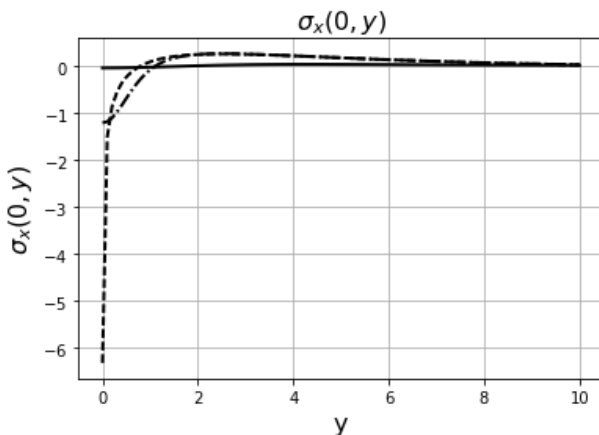
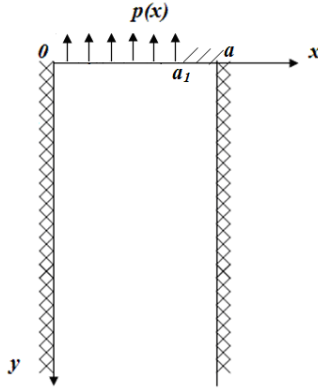


Рис. 3.4. Нормальні напруження $\sigma_x(0, y)$, $0 < y < a$
при різних значеннях a_0, a_1

3.3. Навантаження з лівого краю короткого торця (випадок 2)



**Рис. 3.5. Геометрія та координатна система півсмуги
для умов зчеплення для випадку 2**

Розглянемо півсмугу, що навантажена по торцю $y = 0$, $0 < x < a_1$, $a_1 \neq a$ (рис. 3.5)

$$\sigma_y|_{y=0} = p(x), \quad \tau_{xy}|_{y=0} = 0, \quad 0 < x < a_1 \quad (3.16)$$

На лінії $y = 0$, $a_1 < x < a$ виконуються умови гладкого контакту:

$$v|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}|_{y=0} = 0, \quad a_1 < x < a. \quad (3.17)$$

Граничні умови (3.7) та (3.8) можна переписати у термінах переміщень

$$2G\mu_0 \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{y=0} + (1-\mu) \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) = p(x), \quad 0 < x < a_1, \quad (3.18)$$

$$v|_{y=0} = 0, \quad a_1 < x < a, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{y=0} = 0, \quad 0 < x < a \quad (3.20)$$

Відповідно до схеми розділу 2, розв'яжемо крайову задачу (2.4, 3.18-3.20) при $a_1 \neq a$ для пружної півсмуги, що зчеплена по бічних гранях, з умовами на бічних гранях (3.3).

Формули для функцій переміщень мають вигляд (3.4-3.5). Інтегральні доданки у (3.4) та (3.5) мають наступний вигляд:

$$\int_0^a G^{i1}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi, \int_0^a G^{i2}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi, i = 1, 2,$$

причому другий з них з урахуванням розривних властивостей функції Гріна подано формулою:

$$\begin{aligned} \int_0^a G^{i2}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi &= \int_0^{x-0} G^{i2}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi + \int_{x+0}^a G^{i2}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi = \\ &= \mathfrak{I}^{i2}(x, x-0) \chi(x) - \mathfrak{I}^{i2}(x, 0) \chi(0) - \int_0^{x-0} \mathfrak{I}^{i2}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi + \\ &+ \mathfrak{I}^{i2}(x, a) \chi(a) - \mathfrak{I}^{i2}(x, x+0) \chi(x) - \int_{x+0}^a \mathfrak{I}^{i2}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi = \\ &= \langle \mathfrak{I}^{i2}(x, x) \rangle \chi(x) - \int_0^a \mathfrak{I}^{i2}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi, i = 1, 2, \end{aligned}$$

де $\mathfrak{I}^{i2}(x, \xi)$ — первісна функції $G^{i2}(x, \xi)$,
 $\langle \mathfrak{I}^{12}(x, x) \rangle = 0, \langle \mathfrak{I}^{22}(x, x) \rangle = -\frac{\kappa-1}{\beta^2(\kappa+1)}, \chi(0) = \chi(a) = 0.$

В результаті співвідношення (3.4-3.5) приймуть вигляд [161, 166]:

$$\begin{aligned} u_\beta(x) &= Y_1^{11}(x) c_1 + Y_1^{12}(x) c_2 + Y_2^{11}(x) c_3 + Y_2^{12}(x) c_4 + \\ &+ \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a G^{11}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a \mathfrak{I}^{12}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi, \\ v_\beta(x) &= Y_1^{21}(x) c_1 + Y_1^{22}(x) c_2 + Y_2^{21}(x) c_3 + Y_2^{22}(x) c_4 + \\ &+ \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a G^{21}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a \mathfrak{I}^{22}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi - \frac{\kappa-1}{\beta^2(\kappa+1)} \chi(x). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Після підстановки отриманих раніше $Y_1(x), Y_2(x), c_i, i = \overline{1,4}$ у формули (3.21) та обернення отриманих трансформанти згідно з формулами (2.8), отримаємо наступні вирази для функцій переміщень вигляду:

$$u(x, y) = \int_0^\infty \int_0^a f(x, \xi, \beta) \cos(\beta y) \chi'(\xi) d\xi d\beta, \quad (3.22)$$

$$v(x, y) = \int_0^\infty \int_0^a g(x, \xi, \beta) \sin(\beta y) \chi'(\xi) d\xi d\beta + \int_0^x \chi'(\xi) d\xi. \quad (3.23)$$

Переміщення у півсмузі остаточно визначаються формулами (3.22-3.23), якщо буде відома функція $\chi'(x) = v'|_{y=0}$. Для її знаходження необхідно задовольнити поки що невиконаним умовам (3.18-3.19). Слабо-збіжні інтеграли у виразах для переміщень проумовано за методикою, що наведено у додатку Г.

З умови (3.19) випливає:

$$\chi(\xi) = 0, a_1 < \xi < a \Rightarrow \chi'(\xi) = 0, a_1 < \xi < a. \quad (3.24)$$

Підстановка формул переміщень у крайову умову (3.18) приводить до СІР (2.30), розв'язання якого описано у главі 2.6.2. Підстановка у формули (3.22-3.23) знайдених сталих $s_n, n = \overline{0, 2N-1}$ завершує побудову розв'язку задачі.

На рисунках 3.6-3.9 представлені графіки нормальних напружень $\sigma_x(0, y), \sigma_y(0, y), \sigma_x(a, y), \sigma_y(a, y)$ при $G = 61.2781955 \cdot 10^9$ Па, $\mu = 0.33$, $p(x) = 1$ Па, $a = 10$ м, $\varpi = 40\%a$, $\varpi = 10\%a$ та $\varpi = 0.5\%a$.

Як видно, нормальні напруження на правій бічній грані більші за абсолютними значеннями за нормальні напруження на лівій бічній грані.

Як видно з графіків, нормальні напруження на лівій бічній грані є розтягувальними при $0 < y < y_1$, далі вони стають стискальними

та при подальшому збільшенні y спадають до нуля. Нормальні напруження на правій бічній грані є стискальними при $0 < y < y_2$, далі вони стають розтягувальними та при подальшому збільшенні y спадають до нуля. Причому $y_1 = 2.1, y_2 = 6.4$ при $\varpi = 40\%a$, $y_1 = 3.0, y_2 = 4.3$ при $\varpi = 10\%a$, $y_1 = 3.3, y_2 = 3.8$ при $\varpi = 0.5\%a$. Тобто, зі збільшенням зони прикладеного навантаження область розтягувальних напружень на лівій бічній грані біля торця повільно збільшується, а область стискальних напружень на правій бічній грані біля торця зменшується, причому більш ніж у два рази швидше за збільшення зони розтягувальних напружень на лівій бічній грані біля торця.

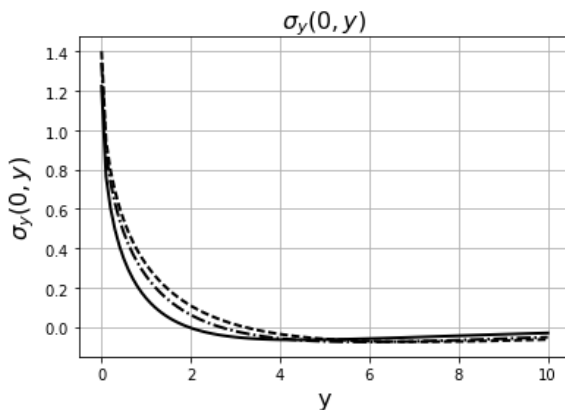


Рис. 3.6. Нормальні напруження $\sigma_y(0, y), 0 < y < a$ при різних значеннях a_1

Врахування нерухомої особливості в точці $x = 0, y = 0$ дозволило отримати стабільні розрахунки безпосередньо біля даної точки. Збільшення зони прикладеного навантаження за рахунок наближення до точки $x = a, y = 0$ привело до збільшення абсолютних значень нормальних напружень на бічній грані $x = a$ (рис. 3.7, 3.9) та слабо вплинуло на зміну нормальних напружень на бічній грані

$x=0$ (рис. 3.6, 3.8). При значенні параметру $\varpi < 0.5\%a$ починається вплив нерухої особливості ядра рівняння у точці $x=a, y=0$, і розрахунки в околі даної точки перестають бути стабільними.

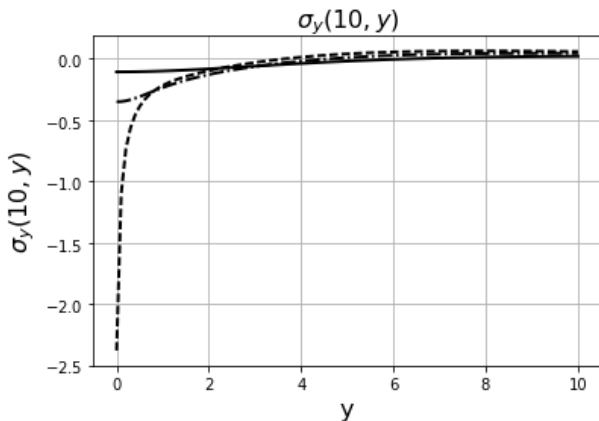


Рис. 3.7. Нормальні напруження $\sigma_y(a, y), 0 < y < a$ при різних значеннях a_1

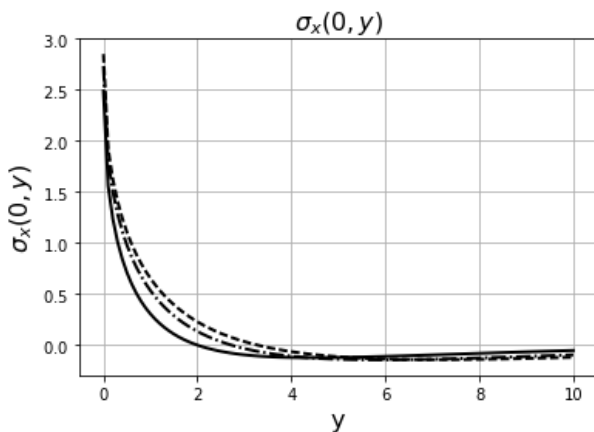


Рис. 3.8 Нормальні напруження $\sigma_x(0, y), 0 < y < a$ при різних значеннях a_1

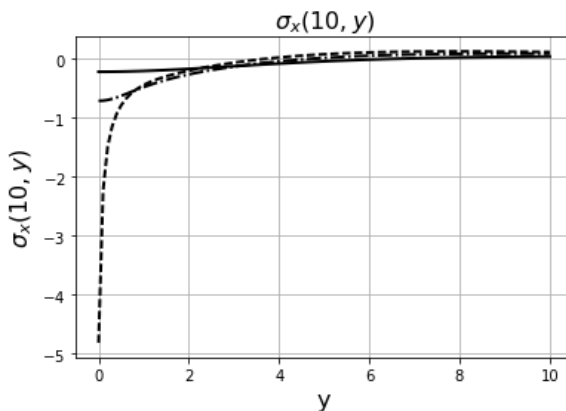


Рис. 3.9. Нормальні напруження $\sigma_x(a, y), 0 < y < a$ при різних значеннях a_1

3.4. Навантаження по всьому короткому торцю (випадок 3)

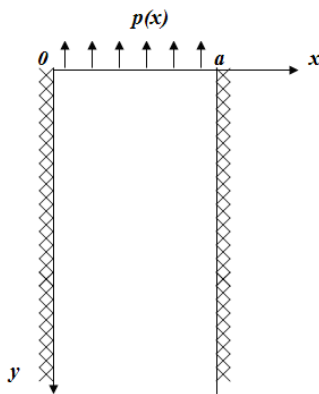


Рис. 3.10. Геометрія та координатна система півсмуги для умов зчеплення для випадку 3

Розглянемо півсмугу, що навантажена по всьому торцю (рис. 3.10). Розв'яжемо крайову задачу (2.4-2.6) для пружної півсмуги з умовами (2.2) на бічних гранях вигляду (3.1-3.2) або (3.3).

Вирази для функцій переміщень мають вигляд (3.22-3.23). Ці формули остаточно визначають переміщення, якщо буде відома функція $\chi'(\xi)$. Її знаходимо за рахунок задоволення умові (2.5), яка залишилась поки що невиконаною. Виконати цю умову шляхом безпосередньої підстановки в неї співвідношень (3.22-3.23) неможливо, бо інтеграли у виразах для переміщень є слабо-збіжними. Тому для відокремлення їх слабо-збіжних частин використовується методика, що викладена в додатку Г.

Послідуоча підстановка формул переміщень у крайову умову (2.5) приводить до СІР (2.37). Побудова розв'язку задачі завершується підстановкою знайдених сталих $s_n, n = \overline{0, 2N-1}$ у формули (3.22-3.23).

На рисунках 3.11-3.12 представлені графіки нормальних напружень $\sigma_x(0, y), \sigma_y(0, y)$ при $G = 61.2781955 \cdot 10^9$ Па, $\mu = 0.33$, $p(x) = 1$ Па, $a = 10$ м. Як видно, нормальні напруження на бічних гранях є розтягувальними при $0 < y < 1.1$, далі вони стають стискальними та при подальшому збільшенні y спадають до нуля.

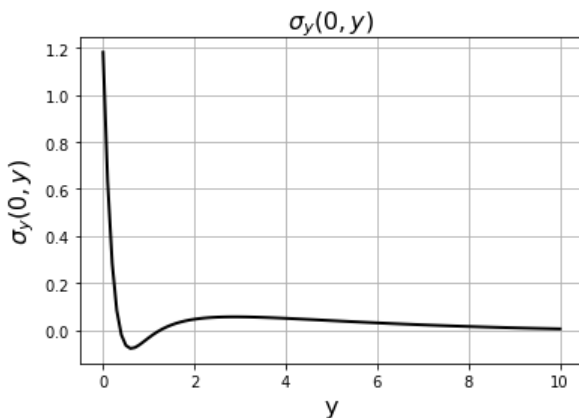


Рис. 3.11. Нормальні напруження $\sigma_y(0, y), \sigma_y(a, y), 0 < y < a$

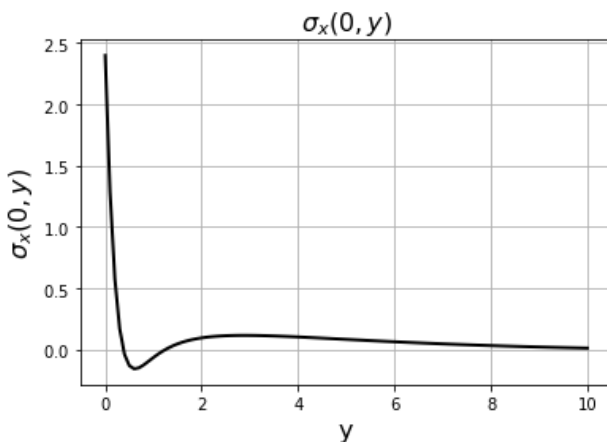


Рис. 3.12. Нормальні напруження $\sigma_x(0, y), \sigma_x(a, y), 0 < y < a$

Врахування обох нерухомих особливостей дозволило отримати стабільні розрахунки на всьому короткому торцю півсмуги.

3.5. Висновки до третього розділу

Отримано розв'язки плоских задач теорії пружності для півсмуги, що зчеплена по двом півнескінченим бічним граням для трьох конфігурацій прикладеного навантаження по торцю.

Врахування нерухомих особливостей у кутових точках півсмуги дозволило провести розрахунки безпосередньо біля цих точок, що на $0.5\%a$ ближче, ніж без їхнього врахування. Тобто, встановлено межі ефективного застосування методу ортогональних поліномів для розв'язання сингулярного інтегрального рівняння. Також відмічено, що найбільші нормальні напруження виникають на бічних гранях, коли навантаження прикладене до середини короткого торця.

Встановлено зони розтягувальних напружень при різних конфігураціях навантаження.

РОЗДІЛ 4

ЗАДАЧІ НЕЗВ'ЯЗНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВСМУГИ

У розділі досліджено плоскі мішані задачі термопружності для півсмуги з защемленими півнескінченими гранями для трьох різних конфігурацій навантаження по короткому торцю. Розв'язано задачу стаціонарної теплопровідності для півнескінченної смуги, знайдене температурне поле використовується в подальшому при розв'язанні задачі незв'язної термопружності для півнескінченної смуги.

Проведено числовий аналіз розподілу напружень на бічних гранях та в середині півсмуги в залежності від параметрів ділянки розподілення навантаження та температури.

4.1. Задача стаціонарної теплопровідності для півсмуги

Розглянуто пружну півсмугу, бічні грані $x = 0, 0 < y < \infty$, $x = a, 0 < y < \infty$ якої теплоізолювані, а на короткий торець $0 < x < a, y = 0$ діє теплове навантаження. Потрібно визначити температуру півсмуги, що задовольняє крайовій задачі:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= 0, \quad 0 < x < a, 0 < y < \infty \\ T(x, 0) &= f_T(x), \quad 0 < x < a \\ \frac{\partial T}{\partial x}(0, y) &= 0, \frac{\partial T}{\partial x}(a, y) = 0, \quad 0 < y < \infty\end{aligned}\tag{4.1}$$

Для зведення задачі (4.1) до одновимірної крайової задачі застосовано скінченне cos-перетворення Фур'є за змінною x :

$$T_{\alpha}(y) = \int_0^a T(x, y) \cos \alpha x dx$$

з формулою обернення:

$$T(x, y) = \frac{1}{a} \left[T_0(y) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} T_{\alpha}(y) \cos \alpha x \right], \alpha = \frac{\pi k}{a} \quad (4.2)$$

Отримано одновимірну крайову задачу:

$$\begin{cases} T_{\alpha}''(y) - \alpha^2 T_{\alpha}(y) = 0, \\ T_{\alpha}(0) = f_{\alpha}, T_{\alpha}(y), \frac{dT_{\alpha}}{dy} \rightarrow 0, y \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\text{де } f_{\alpha} = \int_0^a f_T(x) \cos \alpha x dx.$$

До задачі (4.3) застосовано півнескінченне \sin -перетворення Фур'є за змінною y :

$$T_{\alpha\beta} = \int_0^{\infty} T_{\alpha}(y) \sin \beta y dy$$

з формулою обернення:

$$T_{\alpha}(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} T_{\alpha\beta} \sin \beta y d\beta. \quad (4.4)$$

Отримано та розв'язано алгебраїчне рівняння у трансформантах відносно трансформант переміщень:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} f_{\alpha}. \quad (4.5)$$

Обертаємо (4.5) згідно з (4.4) та використаємо формулу 3.723(3) [16]. Отримаємо $T_{\alpha}(y) = f_{\alpha} e^{-\alpha y}$.

Знайдений вираз обернемо за формулою (4.2):

$$T(x, y) = \frac{1}{a} \left[\int_0^a f_T(\xi) d\xi + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^a f(\xi) \cos \alpha \xi d\xi e^{-\alpha y} \cos \alpha x \right]. \quad (4.6)$$

Розглянемо окремо 2 випадки.

Перший випадок $y > 0$.

З урахуванням формули для підсумовування ряду 1.461(2) [16], вираз (4.6) прийме вигляд:

$$T(x, y) = \frac{1}{2a} \int_0^a f_T(\xi) \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi(x+\xi)}{a}} + \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi(x-\xi)}{a}} \right] d\xi.$$

Розв'язок задачі (4.1) у випадку $y > 0$ запишемо формулою:

$$T(x, y) = \frac{1 - e^{-\frac{2\pi y}{a}}}{2a} \int_0^a f_T(\xi) [\delta^+(y, x, \xi) + \delta^-(y, x, \xi)] d\xi, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 < y < \infty, \quad (4.7)$$

$$\text{де } \delta^\pm(y, x, \xi) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{2\pi y}{a}} - 2e^{-\frac{\pi y}{a}} \cos \frac{\pi(x \pm \xi)}{a}}.$$

Другий випадок $y = 0$.

У даному випадку вираз (4.6) прийме подання:

$$T(x, 0) = \frac{1}{a} \int_0^a f_T(\xi) d\xi + \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^a f_T(\xi) \cos \frac{\pi k \xi}{a} d\xi \cos \frac{\pi k x}{a}. \quad (4.8)$$

Продовжимо функцію $f(x)$ парно на проміжок $[-a, 0]$ і запишемо розвинення функції $f(x)$ в ряд Фур'є:

$$f_T(x) \sim \frac{1}{a} \int_0^a f_T(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{a} \int_0^a f_T(\xi) \cos \frac{\pi k \xi}{a} d\xi \cos \frac{\pi k x}{a}, \quad (4.9)$$

де

$$a_0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f_T(\xi) d\xi = \frac{1}{a} \int_0^a f_T(\xi) d\xi, \quad a_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f_T(\xi) \cos \frac{\pi k \xi}{a} d\xi = \frac{2}{a} \int_0^a f_T(\xi) \cos \frac{\pi k \xi}{a} d\xi.$$

Як видно, праві частини у (4.8) та (4.9) співпадають, тобто функція $T(x, 0)$ представляє собою ряд Фур'є для функції $f_T(x)$.

З ознаки Ліпшиця слідує, що для гьольдерової у точці x_0 функції $f_T(x)$ її ряд Фур'є збігається в цій точці до суми $f_T(x_0)$, якщо в даній точці функція $f_T(x)$ неперервна. В даному випадку гранична

умова $T(x, 0) = f_T(x)$, $0 < x < a$ буде виконана на проміжку $0 < x < a$, якщо функція $f_T(x)$ на цьому проміжку неперервна та задовольняє умові Гьольдера.

Використання формул (4.7) та (4.8) дозволяє отримати розв'язок задачі (4.1) за умов неперервності та гьольдеровості функції $f_T(x)$ на проміжку $0 < x < a$ [162]

$$T(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-\frac{2\pi y}{a}}}{2a} \int_0^a f_T(\xi) [\delta^+(y, x, \xi) + \delta^-(y, x, \xi)] d\xi, & 0 \leq x \leq a, 0 < y < \infty \\ \frac{1}{a} \int_0^a f_T(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{a} \int_0^a f_T(\xi) \cos \frac{\pi k \xi}{a} d\xi \cos \frac{\pi k x}{a}, & 0 \leq x \leq a, y = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

4.2. Мішана задача термопружності для півсмуги при виконанні умов другої основної задачі теорії пружності на півнескінчених гранях

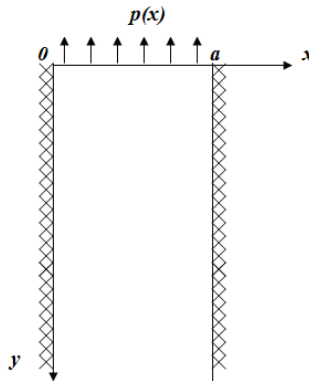


Рис. 4.1. Геометрія та координатна система півсмуги для умов зчеплення у випадку температурного навантаження

Розглядається пружна півсмуга (рис. 4.1), яка займає область, що описується у декартовій системі координат співвідношеннями

$0 < x < a, 0 < y < \infty$. Півсмугу навантажено по короткому торцю $y = 0, 0 < x < a$ механічними та тепловими зусиллями (2.5-2.6).

Переміщення у півсмузі задовольняють рівняння рівноваги Ляме (2.4). Узагальнені граничні умови на бічних гранях (2.2) обираються у вигляді (3.3). Потрібно відшукати поле переміщень та напружень усередині півсмуги та на її гранях.

Рівняння рівноваги Ляме (2.4) з урахуванням вигляду об'ємних сил мають подання:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \frac{2}{\kappa + 1} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \rho \frac{\partial T}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} + \frac{2}{\kappa - 1} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = \rho \frac{\partial T}{\partial y}, \end{cases} \quad (4.11)$$

де $\rho = 2 \frac{\mu + 1}{1 - 2\mu} \alpha_i$, α_i є коефіцієнт лінійного розширення, $T(x, y)$ подано зображенням (4.10).

Застосуємо до (4.11) інтегральне перетворення Фур'є за змінною y та отримаємо наступну систему рівнянь у просторі трансформант [5, 173]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_\beta(x)}{dx^2} - \frac{\beta^2(\kappa - 1)}{\kappa + 1} u_\beta(x) + \frac{2\beta}{\kappa + 1} \frac{dv_\beta(x)}{dx} &= \frac{3 - \kappa}{\kappa + 1} \chi'(x) + \tilde{\rho} \frac{dT_\beta}{dx}(x), \\ \frac{d^2 v_\beta(x)}{dx^2} - \frac{\beta^2(\kappa + 1)}{\kappa - 1} v_\beta(x) - \frac{2\beta}{\kappa - 1} \frac{du_\beta(x)}{dx} &= -\beta \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \chi(x) - \beta \rho T_\beta(x), \end{aligned} \quad (4.12)$$

тут $T_\beta(x) = \int_0^\infty T(x, y) \cos \beta y dy$, $\tilde{\rho} = \rho \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}$, $\chi(x) = v|_{y=0}$, $\chi'(x) = v'|_{y=0}$.

Тоді за схемою параграфа 2 побудуємо відповідну векторну одновимірну крайову задачу структури формули (2.10), де права

частина записується вектором $\tilde{f}(x) = \begin{pmatrix} \frac{3 - \kappa}{\kappa + 1} \chi'(x) + \tilde{\rho} \frac{dT_\beta}{dx}(x) \\ -\beta \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \chi(x) - \beta \rho T_\beta(x) \end{pmatrix}$. Відпові-

дно до побудованого розв'язку (2.20) формули для функцій переміщень мають наступне зображення [8, 9]:

$$\begin{aligned}
u_{\beta}(x) = & Y_1^{11}(x)c_1 + Y_1^{12}(x)c_2 + Y_2^{11}(x)c_3 + Y_2^{12}(x)c_4 + \\
& + \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a G^{11}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi + \tilde{\rho} \int_0^a G^{11}(x, \xi) \frac{dT_{\beta}}{d\xi}(\xi) d\xi - \\
& - \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a G^{12}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi - \beta \rho \int_0^a G^{12}(x, \xi) T_{\beta}(\xi) d\xi,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
v_{\beta}(x) = & Y_1^{21}(x)c_1 + Y_1^{22}(x)c_2 + Y_2^{21}(x)c_3 + Y_2^{22}(x)c_4 + \\
& + \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a G^{21}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi + \tilde{\rho} \int_0^a G^{21}(x, \xi) \frac{dT_{\beta}}{d\xi}(\xi) d\xi - \\
& - \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a G^{22}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi - \beta \rho \int_0^a G^{22}(x, \xi) T_{\beta}(\xi) d\xi,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

де $G^{i,j}(x, \xi)$ – елемент матриці-функції Гріна у i -ій строчці та j -тому стовбці.

Коефіцієнти $c_i, i = \overline{1,4}$ знайдено у додатку В. Вони мають вигляд (В.2).

Подальший розв'язок залежить від конфігурації навантаження по короткому торцю.

4.3. Навантаження по середині короткого торця (випадок 1)

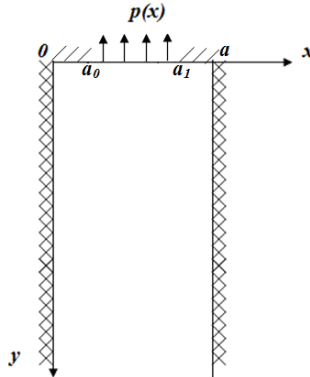


Рис. 4.2. Геометрія та координатна система півсмуги для умов зчеплення у випадку температурного навантаження для випадку 1

Розглянемо півсмугу, що навантажена лише по середині торця (рис. 4.2). Розв'яжемо крайову задачу (2.4, 3.9-3.11) при $a_0 \neq 0, a_1 \neq a$ для пружної півсмуги з умовами (3.3) на півнескінчених бічних гранях. Температура $T(x, y)$ діє як і механічне навантаження на проміжку $x \in [a_0; a_1]$, тобто $f_T(x, 0) = 0, 0 < x < a_0, a_1 < x < a$.

Формули для функцій переміщень мають вигляд (4.13-4.14). Інтегральні доданки у (4.13) та (4.14) запишемо у зображеннях:

$$\begin{aligned} & \int_0^a G^{i1}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi, \int_0^a G^{i2}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi, \\ & \int_0^a G^{i1}(x, \xi) \frac{dT_\beta}{d\xi}(\xi) d\xi, \int_0^a G^{i2}(x, \xi) T_\beta(\xi) d\xi, i = 1, 2. \end{aligned}$$

Третій з них можна перетворити до вигляду:

$$\int_0^a G^{i1}(x, \xi) \frac{dT_\beta}{d\xi}(\xi) d\xi = - \int_0^a \frac{\partial G^{i1}}{\partial \xi} T_\beta(\xi) d\xi \text{ так як } G^{i1}(x, a) = G^{i1}(x, 0) = 0, i = 1, 2.$$

В результаті співвідношення (4.13-4.14) подано за формулами:

$$\begin{aligned} u_\beta(x) &= Y_1^{11}(x) c_1 + Y_1^{12}(x) c_2 + Y_2^{11}(x) c_3 + Y_2^{12}(x) c_4 - \\ & - \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a \frac{\partial}{\partial \xi} G^{11}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi - \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a G^{12}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi - \\ & - \tilde{\rho} \int_0^a \frac{\partial G^{11}(x, \xi)}{\partial \xi} T_\beta(\xi) d\xi - \beta \rho \int_0^a G^{12}(x, \xi) T_\beta(\xi) d\xi, \\ v_\beta(x) &= Y_1^{21}(x) c_1 + Y_1^{22}(x) c_2 + Y_2^{21}(x) c_3 + Y_2^{22}(x) c_4 - \\ & - \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a \frac{\partial}{\partial \xi} G^{21}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi - \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a G^{22}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi - \\ & - \tilde{\rho} \int_0^a \frac{\partial G^{21}(x, \xi)}{\partial \xi} T_\beta(\xi) d\xi - \beta \rho \int_0^a G^{22}(x, \xi) T_\beta(\xi) d\xi. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Підставимо у вирази (4.15) отримані раніше подання системи фундаментальних матричних розв'язків $Y_1(x), Y_2(x), c_i, i = \overline{1,4}$ та обер-

немо отримані трансформанти згідно з формулами (2.8). Врахуємо, що для температури потрібно використати формулу обернення:

$$T(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} T_{\beta}(x) \cos \beta y d\beta \quad (4.16)$$

Таким чином, для переміщень формули набувають вигляду:

$$u(x, y) = \int_0^{\infty} \int_0^a \left[f_1(x, \xi, \beta) \chi(\xi) + f_2(x, \xi, \beta) \int_0^{\infty} T(\xi, \eta) \cos \beta \eta d\eta \right] \cos(\beta y) d\xi d\beta, \quad (4.17)$$

$$v(x, y) = \int_0^{\infty} \int_0^a \left[g_1(x, \xi, \beta) \chi(\xi) + g_2(x, \xi, \beta) \int_0^{\infty} T(\xi, \eta) \cos \beta \eta d\eta \right] \sin(\beta y) d\xi d\beta. \quad (4.18)$$

Подання (4.17-4.18) остаточно визначають переміщення, якщо буде відома функція $\chi(x) = v|_{y=0}$. Для її знаходження необхідно задовольнити умовам (3.9-3.10) по короткому торцю, які залишилися поки що невиконаними. Для відокремлення слабо-збіжних частин у співвідношеннях (4.17-4.18) використано методику, що описано у додатку Г.

Після того проведено підстановку формул переміщень у крайову умову (3.9), що привело до СІДР вигляду (2.23), розв'язання якої описано у пункті 2.6.1. Підстановка знайдених сталих $s_n, n=0,1,\dots$ у формули (4.17-4.18) завершує побудову розв'язку задачі.

Динаміку зміни напружень $\sigma_y(x, y), \sigma_x(x, y), \tau_{xy}(x, y)$ при $G = 61.2781955 \cdot 10^9$ Па, $\mu = 0.33$, $\alpha_t = 1.1 \times 10^{-5}$, $a = 10$ м, $a_0 = a - a_1 = a/10$ для різних температур та величин механічного навантаження представлено на рис. 4.3- 4.10. На рис. 4.3-4.6 суцільна, штрих-пунктирна та пунктирна лінії відповідають значенням температурного навантаження $T(x, 0) = 0.1$, $T(x, 0) = 1$ та $T(x, 0) = 10$ відповідно при сталому механічному навантаженні $p(x) = 1$. На рис. 4.7-4.10 суцільна та пунктирна лінії відповідають значенням механічного навантаження

$p(x)=1$ та $p(x)=10$ відповідно при сталому температурному навантаженні $T(x,0)=1$.

Як видно з графіків, нормальні напруження при фіксованому механічному навантаженні та збільшенні температур (рис. 4.3-4.6) суттєво збільшуються за абсолютними значеннями. При фіксованій прикладеній температурі та збільшенні механічного навантаження (рис. 4.7-4.10) нормальні напруження змінюються набагато менше. Отже, вплив теплового навантаження на напружений стан півсмуги є суттєвим.

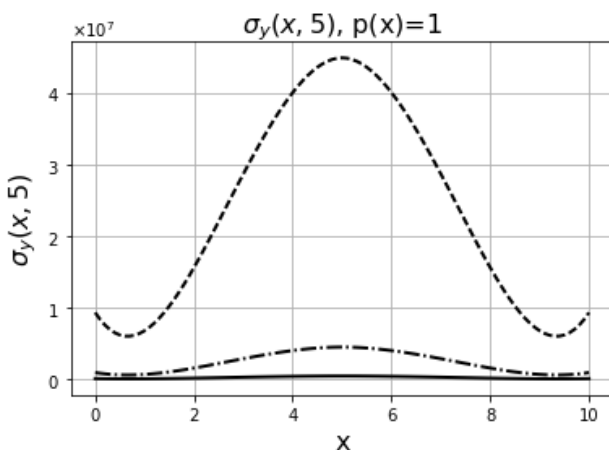


Рис. 4.3. Нормальні напруження $\sigma_y(x, 5)$, $0 < x < a$ при незмінному механічному навантаженні та зміні температурного навантаження

Нормальні напруження на бічних гранях є стискальними при $0 < y < 1.1$ як при фіксованому механічному навантаженні та збільшенні температури, так і при фіксованій прикладеній температурі та збільшенні механічного навантаження. Далі вони стають розтягувальними та при подальшому збільшенні у спадають до нуля.

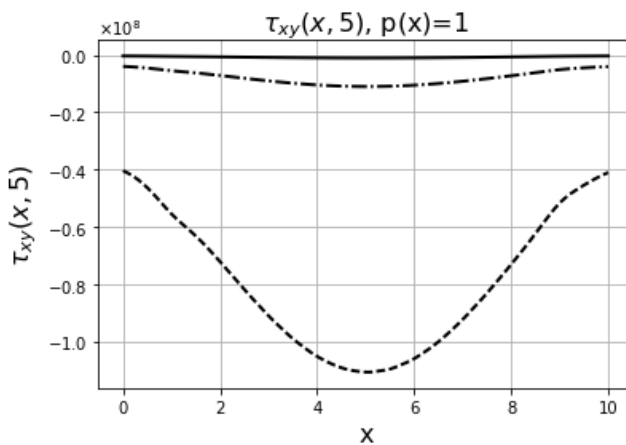


Рис. 4.4. Дотичні напруження $\tau_{xy}(x, 5), 0 < x < a$ при незмінному механічному навантаженні та зміні температурного навантаження

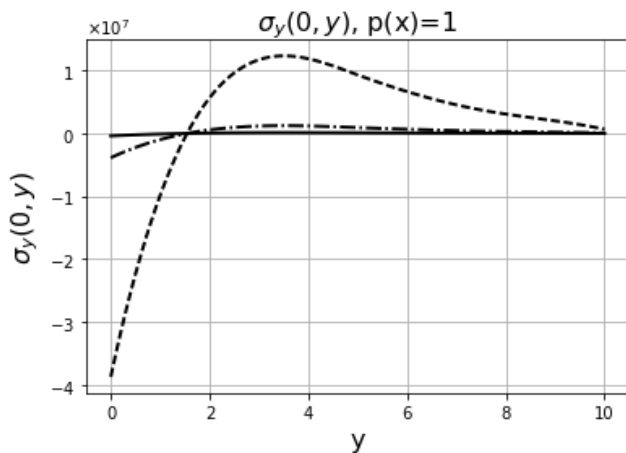


Рис. 4.5. Нормальні напруження $\sigma_y(0, y), 0 < y < 10$ при незмінному механічному навантаженні та зміні температурного навантаження

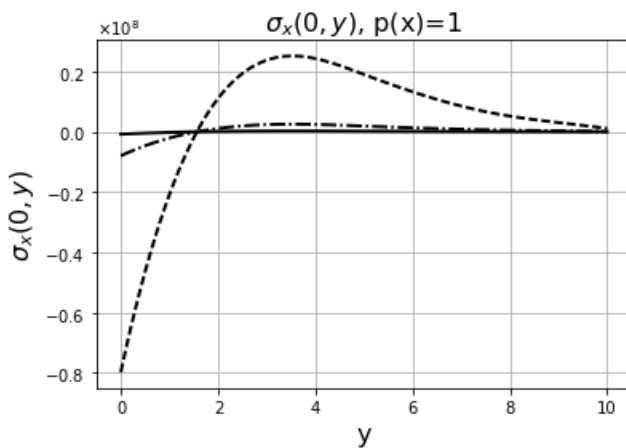


Рис. 4.6. Нормальні напруження $\sigma_x(0, y), 0 < y < 10$ при незмінному механічному навантаженні та зміні температурного навантаження

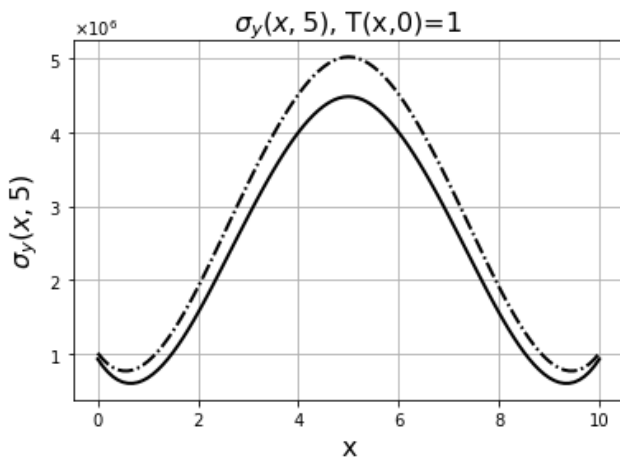


Рис. 4.7. Нормальні напруження $\sigma_y(x, 5), 0 < x < a$ при незмінному температурному навантаженні та зміні механічного навантаження

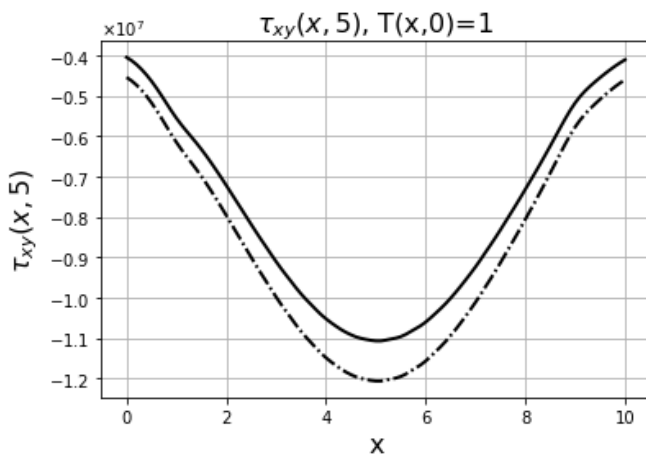


Рис. 4.8. Дотичні напруження $\tau_{xy}(x, 4)$, $0 < x < a$ при незмінному температурному навантаженні та зміні механічного навантаження

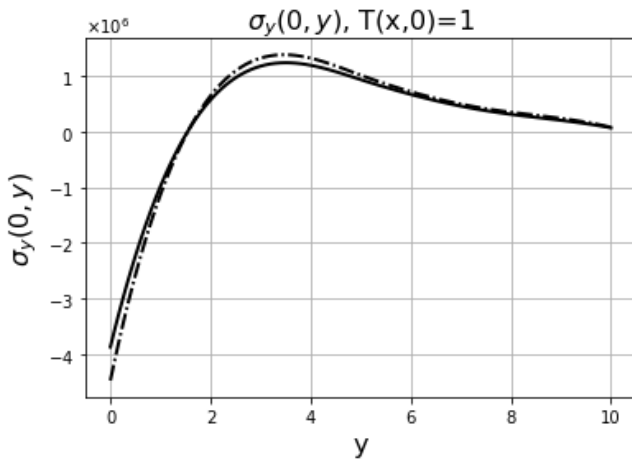


Рис. 4.9. Нормальні напруження $\sigma_y(0, y)$, $0 < y < 10$ при незмінному температурному навантаженні та зміні механічного навантаження

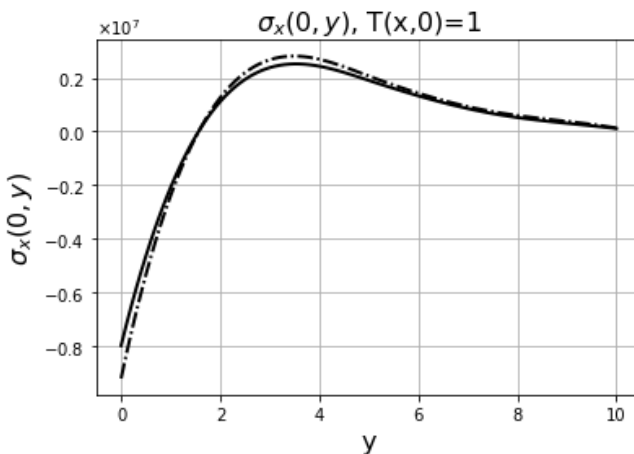


Рис. 4.10. Нормальні напруження $\sigma_x(0, y)$, $0 < y < 10$ при незмінному температурному навантаженні та зміні механічного навантаження

Тобто, можна зробити висновок, що величина температурного навантаження не впливає на розмір зони стискальних напружень на бічних гранях біля торця. Величина механічного навантаження у даному випадку мало впливає на зміну нормальних напружень, тому і зона стискальних напружень при зміні механічного навантаження залишається незмінною.

4.4. Навантаження з лівого краю короткого торця (випадок 2)

Розглянемо півсмугу, що навантажена з лівого краю короткого торця (рис. 4.11). Розв'яжемо крайову задачу (3.18-3.20) при $a_1 \neq a$ для пружної півсмуги з умовами (3.3) на бічних гранях. Температура $T(x, y)$ діє як і механічне навантаження на проміжку $x \in [0; a_1]$.

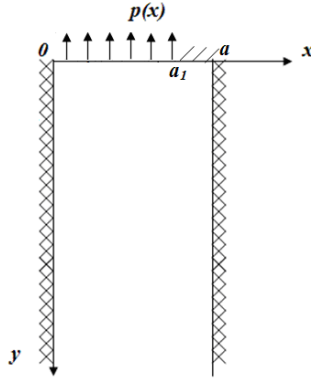


Рис. 4.11. Геометрія та координатна система півсмуги для умов зчеплення у випадку температурного навантаження для випадку 2

Формули для функцій переміщень мають вигляд (4.13-4.14). З урахуванням (3.21) та (4.15) вирази для функцій переміщень записано формулами:

$$\begin{aligned}
 u_{\beta}(x) = & Y_1^{11}(x)c_1 + Y_1^{12}(x)c_2 + Y_2^{11}(x)c_3 + Y_2^{12}(x)c_4 + \\
 & + \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a G^{11}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a \mathfrak{I}^{12}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi - \\
 & - \tilde{\rho} \int_0^a \frac{\partial G^{11}(x, \xi)}{\partial \xi} T_{\beta}(\xi) d\xi - \beta \rho \int_0^a G^{12}(x, \xi) T_{\beta}(\xi) d\xi, \\
 v_{\beta}(x) = & Y_1^{21}(x)c_1 + Y_1^{22}(x)c_2 + Y_2^{21}(x)c_3 + Y_2^{22}(x)c_4 + \\
 & + \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a G^{21}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a \mathfrak{I}^{22}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi - \frac{\kappa-1}{\beta^2(\kappa+1)} \chi(x) - \\
 & - \tilde{\rho} \int_0^a \frac{\partial G^{21}(x, \xi)}{\partial \xi} T_{\beta}(\xi) d\xi - \beta \rho \int_0^a G^{22}(x, \xi) T_{\beta}(\xi) d\xi.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

У вирази (4.19) підставимо фундаментальну систему матричних розв'язків та обернемо отримані трансформанти згідно з формулами (2.8, 4.16):

$$u(x, y) = \int_0^{\infty} \int_0^a \left[f_1(x, \xi, \beta) \chi'(\xi) + f_2(x, \xi, \beta) \int_0^{\infty} T(\xi, \eta) \cos \beta \eta d\eta \right] \cos(\beta y) d\xi d\beta, \quad (4.20)$$

$$v(x, y) = \int_0^{\infty} \int_0^a \left[g_1(x, \xi, \beta) \chi'(\xi) + g_2(x, \xi, \beta) \int_0^{\infty} T(\xi, \eta) \cos \beta \eta d\eta \right] \sin(\beta y) d\xi d\beta + \int_0^x \chi'(\xi) d\xi. \quad (4.21)$$

Формули (4.20-4.21) остаточно визначають переміщення, якщо буде відома функція $\chi'(x) = v'|_{y=0}$. За методикою попереднього розділу отримано СІР вигляду (2.31), що містить нерухому особливість у ядрі. Методику розв'язку цього рівняння ретельно описано у параграфі 2.6.2 та зведено до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (2.36). Підстановка знайдених сталих $s_n, n = \overline{0, 2N-1}$ у формули (4.20-4.21) завершує побудову розв'язку задачі.

На рис. 4.12-4.23 показано динаміку зміни напружень $\sigma_y(x, y), \sigma_x(x, y), \tau_{xy}(x, y)$ при $G = 61.2781955 \cdot 10^9$ Па, $\mu = 0.33$, $\alpha_t = 1.1 \times 10^{-5}$, $a = 10$ м, $a - a_1 = a/10$ для різних температур та величин механічного навантаження. На рис. 4.12-4.17 суцільна, штрих-пунктирна та пунктирна лінії відповідають значенням температурного навантаження $T(x, 0) = 0.1$, $T(x, 0) = 1$ та $T(x, 0) = 10$ відповідно при сталому механічному навантаженні $p(x) = 1$. На рис. 4.18-4.23 суцільна та пунктирна лінії відповідають значенням механічного навантаження $p(x) = 1$ та $p(x) = 10$ відповідно при сталому температурному навантаженні $T(x, 0) = 1$.

Нормальні напруження при фіксованому механічному навантаженні та збільшенні температури (рис. 4.12-4.17) суттєво збільшуються за абсолютними значеннями. У випадку фіксованої прикладеної температури та збільшенні механічного навантаження (рис.

4.18-4.23) нормальні напруження змінюються набагато менше. Тобто, і у даному випадку вплив теплового навантаження є суттєвим.

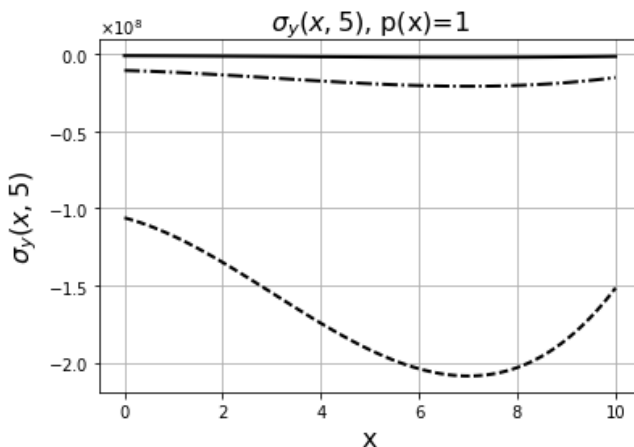


Рис. 4.12. Нормальні напруження $\sigma_y(x, 5)$, $0 < x < a$ при незмінному механічному навантаженні та зміні температурного навантаження

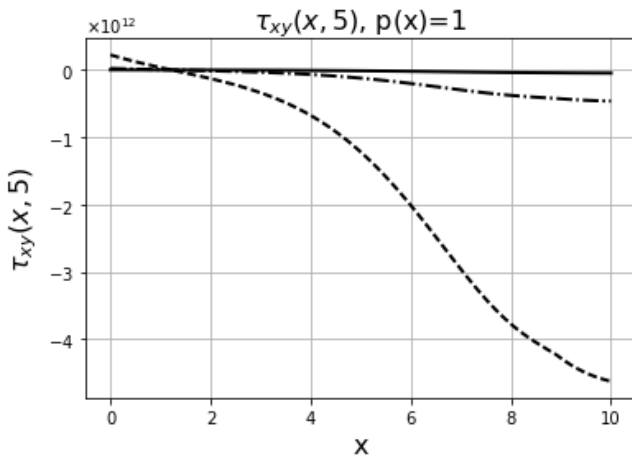


Рис. 4.13. Дотичні напруження $\tau_{xy}(x, 5)$, $0 < x < a$ при незмінному механічному навантаженні та зміні температурного навантаження

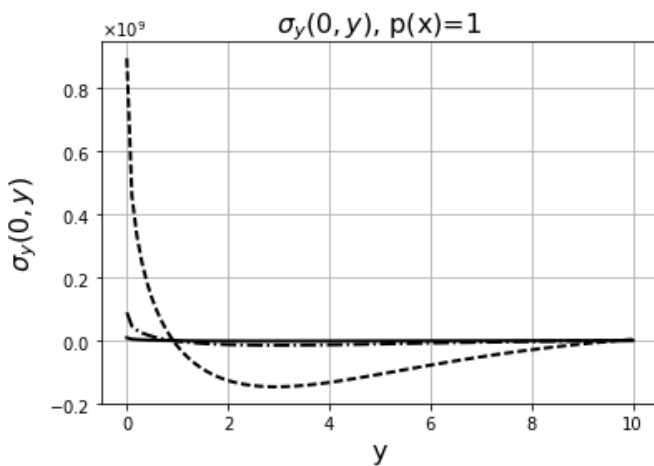


Рис. 4.14. Нормальні напруження $\sigma_y(0, y), 0 < y < 10$ при незмінному механічному навантаженні та зміні температурного навантаження

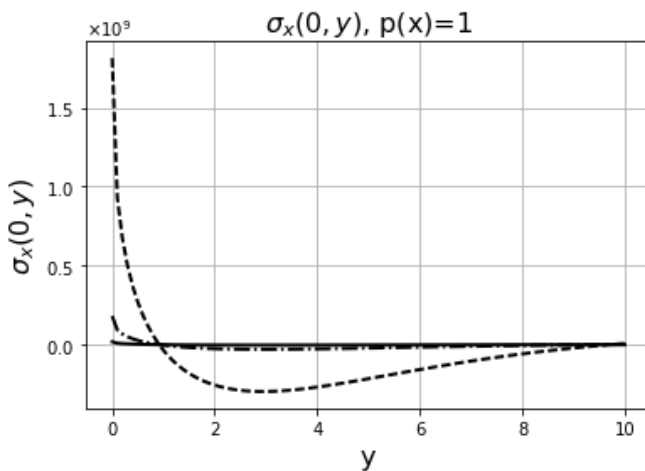


Рис. 4.15. Нормальні напруження $\sigma_x(0, y), 0 < y < 10$ при незмінному механічному навантаженні та зміні температурного навантаження

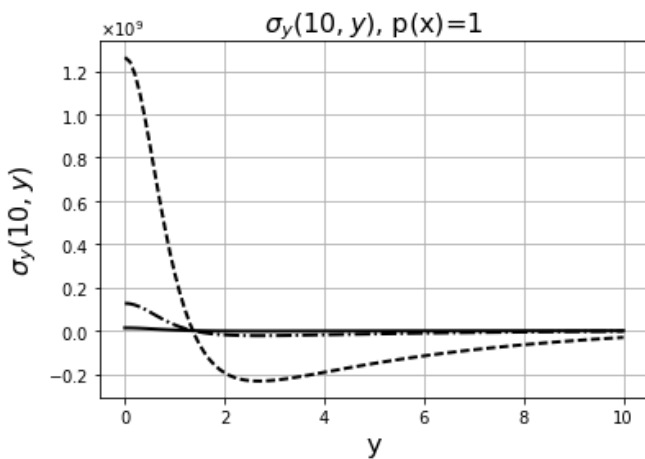


Рис. 4.16. Нормальні напруження $\sigma_y(a, y), 0 < y < 10$ при незмінному механічному навантаженні та зміні температурного навантаження

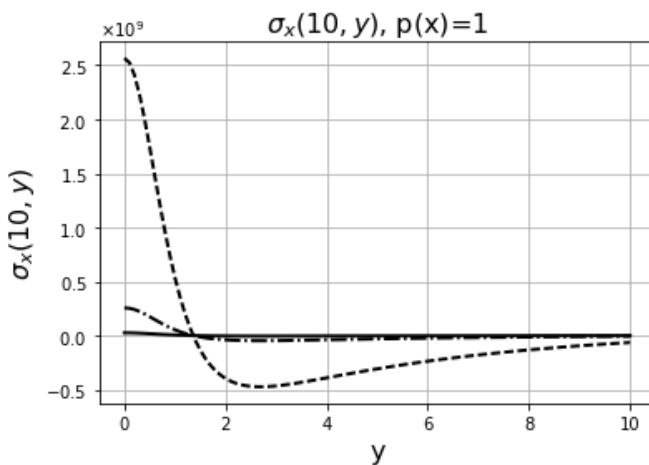


Рис. 4.17. Нормальні напруження $\sigma_x(a, y), 0 < y < 10$ при незмінному механічному навантаженні та зміні температурного навантаження

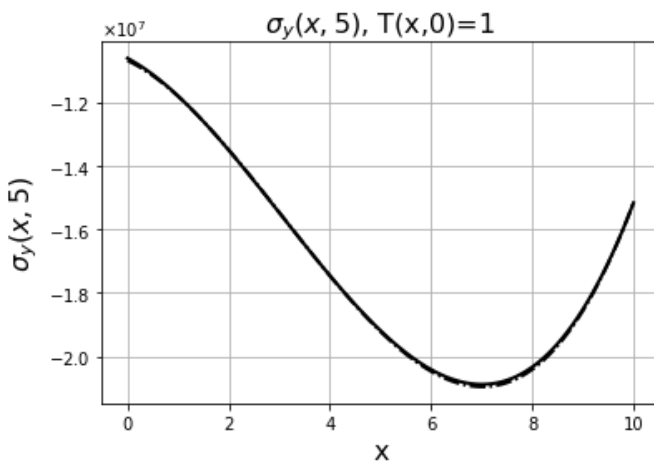


Рис. 4.18. Нормальні напруження $\sigma_y(x, 5), 0 < x < a$ при незмінному температурному навантаженні та зміні механічного навантаження

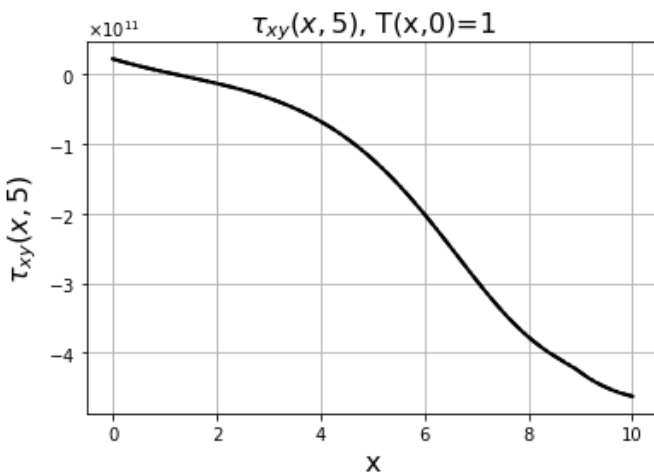


Рис. 4.19. Дотичні напруження $\tau_{xy}(x, 5), 0 < x < a$ при незмінному температурному навантаженні та зміні механічного навантаження

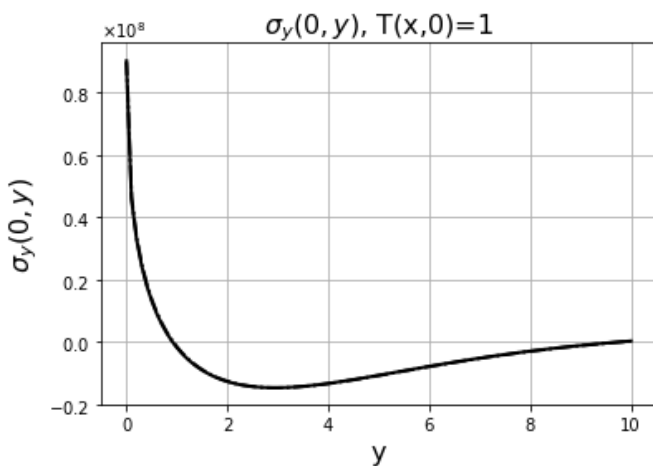


Рис. 4.20. Нормальні напруження $\sigma_y(0, y)$, $0 < y < 10$ при незмінному температурному навантаженні та зміні механічного навантаження

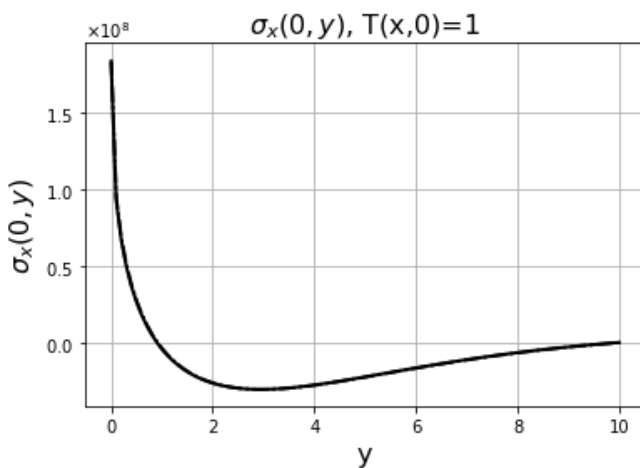


Рис. 4.21. Нормальні напруження $\sigma_x(0, y)$, $0 < y < 10$ при незмінному температурному навантаженні та зміні механічного навантаження

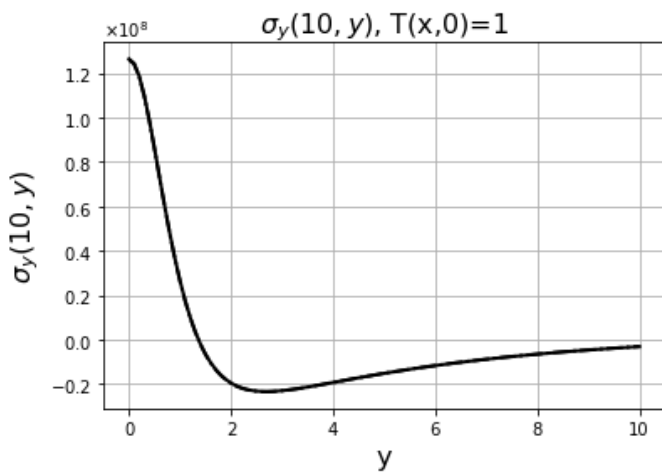


Рис. 4.22. Нормальні напруження $\sigma_y(a, y), 0 < y < 10$ при незмінному температурному навантаженні та зміні механічного навантаження

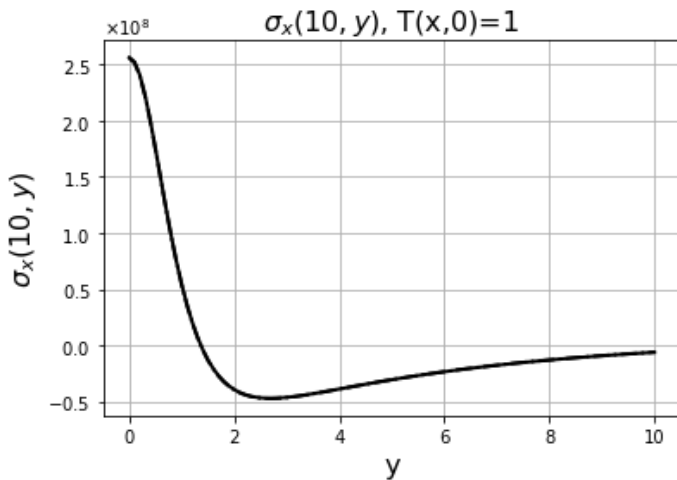


Рис. 4.23. Нормальні напруження $\sigma_x(a, y), 0 < y < 10$ при незмінному температурному навантаженні та зміні механічного навантаження

4.5. Навантаження по всьому короткому торцю (випадок 3)

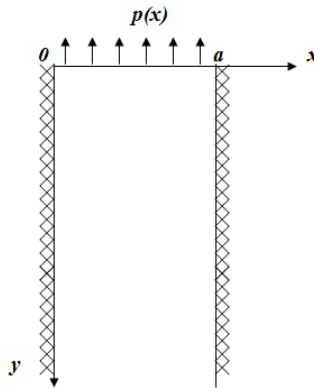


Рис. 4.24. Геометрія та координатна система півсмуги для умов зчеплення у випадку температурного навантаження для випадку 3

Нормальні напруження на лівій бічній грані є розтягувальними при $0 < y < 1.1$, на правій – при $0 < y < 1.5$ як при фіксованому механічному навантаженні та збільшенні температури, так і при фіксованій прикладеній температурі та збільшенні механічного навантаження, далі вони стають стискальними та при подальшому збільшенні y спадають до нуля. Отже, як видно, величина температурного навантаження не впливає на розмір зони розтягувальних напружень на бічних гранях біля торця. У даному випадку величина механічного навантаження мало впливає на зміну нормальних напружень, тому і зона розтягувальних напружень при зміні механічного навантаження не змінюється.

Розглянемо півсмугу, що навантажена по всьому торцю (рис. 4.24). Розв'яжемо крайову задачу (2.4-2.6) для пружної півсмуги з умовами (3.3). Температура $T(x, y)$ діє по тій самій ділянці, по

якій діє механічне навантаження, а саме – на всьому проміжку $x \in [0; a]$.

Вирази для функцій переміщень мають вигляд (4.20-4.21). Ці формули остаточно визначають переміщення, якщо буде відома функція $\chi'(\xi)$. За методикою попереднього розділу для неї отримано СІР (2.37) з двома нерухомими особливостями, розв'язання якого наведено у пункті 2.6.3. Підстановка знайдених сталих $s_n, n = \overline{0, 2N-1}$ у формули (4.20-4.21) завершує побудову розв'язку задачі.

Динаміку зміни напружень $\sigma_y(x, y), \sigma_x(x, y), \tau_{xy}(x, y)$ показано на рис. 4.25-4.32 при $G = 61.2781955 \cdot 10^9$ Па, $\mu = 0.33$, $\alpha_t = 1.1 \times 10^{-5}$, $a = 10$ м для різних температур та величин механічного навантаження. На рис. 4.25-5.18 суцільна, штрих-пунктирна та пунктирна лінії відповідають значенням температурного навантаження $T(x, 0) = 0.1$, $T(x, 0) = 1$ та $T(x, 0) = 10$ відповідно при сталому механічному навантаженні $p(x) = 1$. На рис. 4.29-4.32 суцільна та пунктирна лінії відповідають значенням механічного навантаження $p(x) = 1$ та $p(x) = 10$ відповідно при сталому температурному навантаженні $T(x, 0) = 1$.

Аналіз графіків показує, що нормальні напруження при фіксованому механічному навантаженні та збільшенні температури суттєво збільшуються за абсолютними значеннями. При фіксованій прикладеній температурі та збільшенні механічного навантаження нормальні напруження змінюються дуже мало. Тобто, як і в попередніх двох випадках, у даному випадку вплив теплового навантаження є суттєвим.

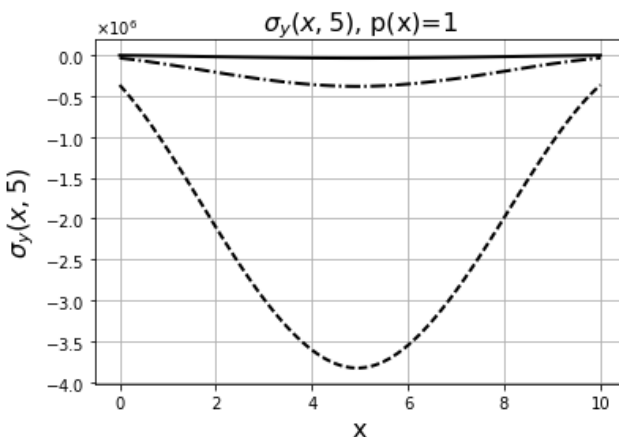


Рис. 4.25. Нормальні напруження $\sigma_y(x, 5)$, $0 < x < a$ при незмінному механічному навантаженні та зміні температурного навантаження

Нормальні напруження на бічних гранях при фіксованому механічному навантаженні та збільшенні температури є розтягувальними при $0 < y < 0.7$, далі вони стають стискальними та при подальшому збільшенні y спадають до нуля. Нормальні напруження на бічних гранях при фіксованій прикладеній температурі та збільшенні механічного навантаження є розтягувальними при $0 < y < y_1$, далі вони стають стискальними та при подальшому збільшенні y спадають до нуля. Причому $y_1 = 0.7$ при $p(x) = 1$, $y_1 = 0.4$ при $p(x) = 10$. Тобто, можна зробити висновок, що величина температурного навантаження на відміну від величини механічного навантаження не впливає на розмір зони стискальних напружень на бічних гранях біля торця.

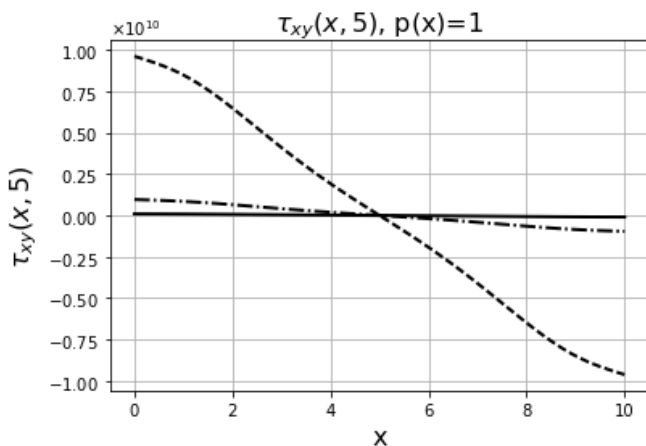


Рис. 4.26. Дотичні напруження $\tau_{xy}(x, 5), 0 < x < a$ при незмінному механічному навантаженні та зміні температурного навантаження

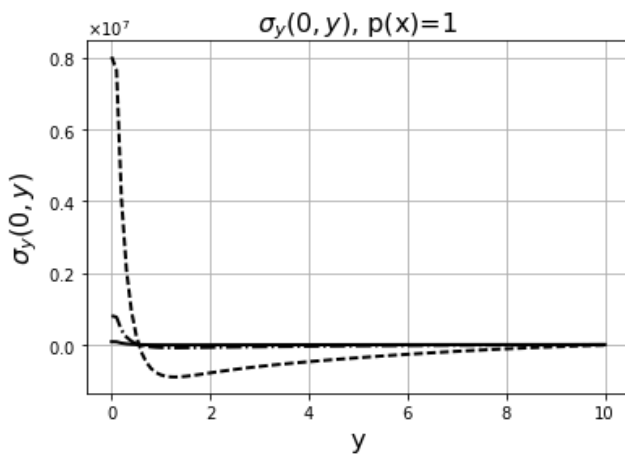


Рис. 4.27. Нормальні напруження $\sigma_y(0, y), 0 < y < 10$ при незмінному механічному навантаженні та зміні температурного навантаження

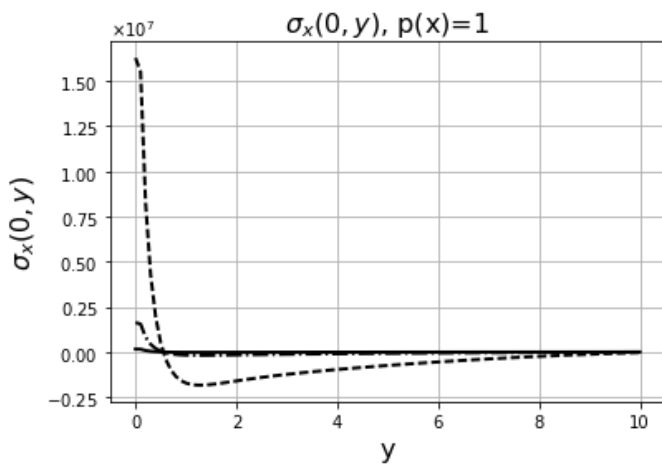


Рис. 4.28. Нормальні напруження $\sigma_x(0, y), 0 < y < 10$ при незмінному механічному навантаженні та зміні температурного навантаження

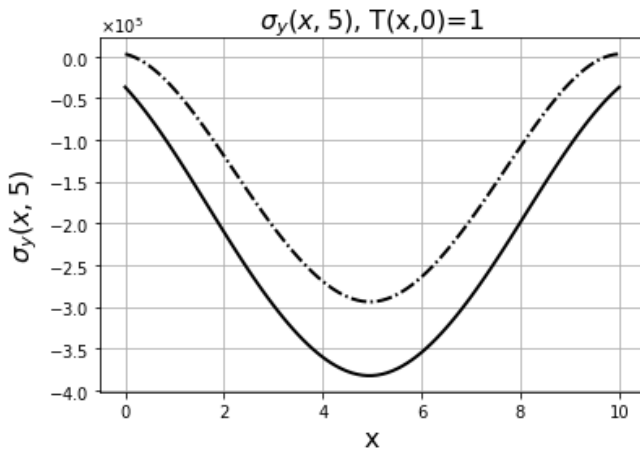


Рис. 4.29. Нормальні напруження $\sigma_y(x, 5), 0 < x < a$ при незмінному температурному навантаженні та зміні механічного навантаження

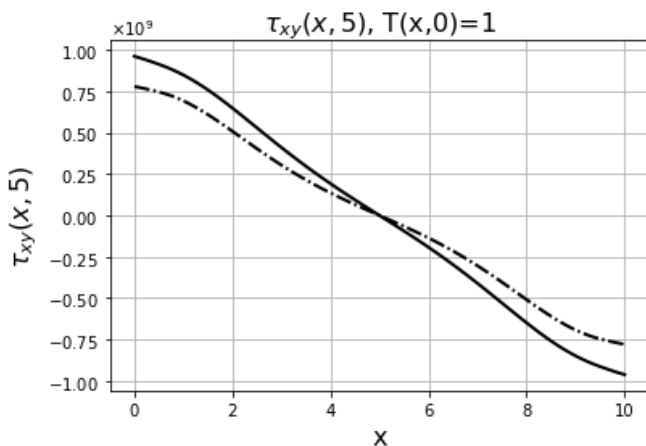


Рис. 4.30. Дотичні напруження $\tau_{xy}(x, 5), 0 < x < a$ при незмінному температурному навантаженні та зміні механічного навантаження

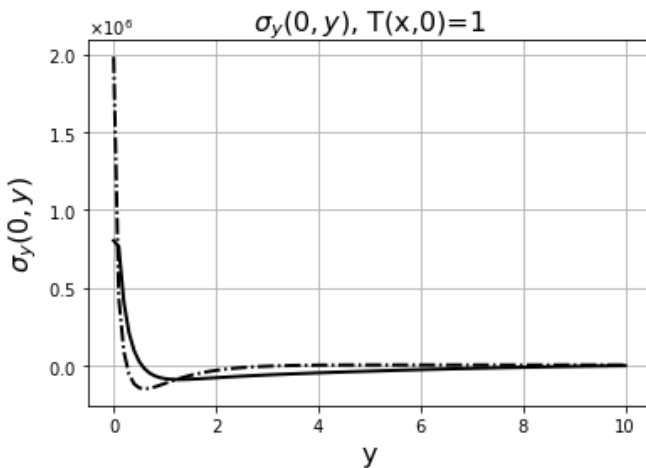


Рис. 4.31. Нормальні напруження $\sigma_y(0, y), 0 < y < 10$ при незмінному температурному навантаженні та зміні механічного навантаження

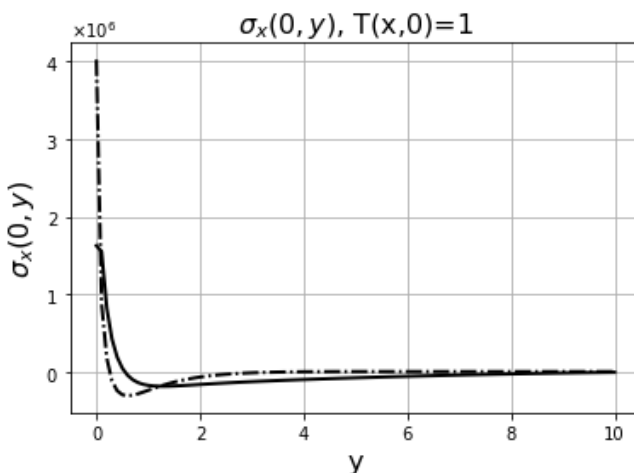


Рис. 4.32. Нормальні напруження $\sigma_x(0, y)$, $0 < y < 10$ при незмінному температурному навантаженні та зміні механічного навантаження

4.6. Висновки до четвертого розділу

Отримано точний розв'язок задачі стаціонарної теплопровідності для півсмуги, який було використано при розв'язанні задачі незв'язної термопружності.

Встановлено характер температурного впливу на величину нормальних напружень на бічних гранях та усередині півнескінченної смуги. Найбільш суттєво на напружений стан півсмуги впливає теплове навантаження. Найбільші напруження спостерігаються на бічних гранях у випадку, коли навантаження прикладене по середині півсмуги. Величина температурного навантаження на відміну від величини механічного навантаження не впливає на розмір зони стискальних напружень на бічних гранях біля торця.

РОЗДІЛ 5

ЗАДАЧІ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ ДЛЯ ПІВСМУГИ З ТРАНСВЕРСАЛЬНОЮ ТРІЩИНОЮ

У розділі досліджено плоскі мішані задачі теорії пружності для півсмуги, що защемлена по бічних гранях з трансверсальною тріщиною для трьох конфігурацій прикладеного навантаження по торцю.

Розв'язок задач для півсмуги з трансверсальною тріщиною зведено до розв'язання системи інтегро-диференціальних та інтегральних рівнянь в залежності від конфігурації навантаження по короткому торцю. Розв'язки інтегральних рівнянь отримано з врахуванням нерухомих особливостей розв'язків на кінцях проміжків інтегрування.

Проведено числовий аналіз коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) в залежності від довжини тріщини.

5.1. Задача концентрації напружень для півсмуги з поперечною тріщиною

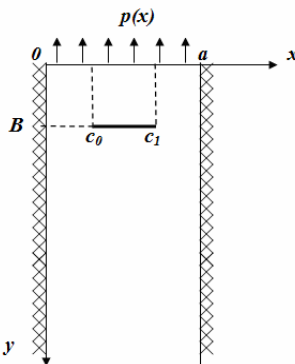


Рис. 5.1. Геометрія та координатна система півсмуги з трансверсальною тріщиною

Розглянуто пружну півсмугу (рис. 5.1), яка займає область, що описується у декартовій системі координат співвідношеннями $0 < x < a, 0 < y < \infty$. Півсмугу навантажено по короткому торцю $y = 0, 0 < x < a$ (2.5-2.6) нормальним навантаженням $p(x)$.

Переміщення у півсмузі задовольняють рівняння рівноваги (2.4). Граничні умови на півнескінченних бічних гранях деталізовано у вигляді (3.3). Потрібно відшукати КІН в околі тріщини при відсутності об'ємних сил, що діють на півсмугу.

Вважається, що усередині півсмуги на лінії $c_0 < x < c_1, y = B$ розташовано трансверсальну тріщину:

$$\begin{aligned} u(x, B-0) - u(x, B+0) &= \langle u(x, B) \rangle = \psi_1(x) \neq 0, \quad c_0 < x < c_1, \\ v(x, B-0) - v(x, B+0) &= \langle v(x, B) \rangle = \psi_2(x) \neq 0, \quad c_0 < x < c_1, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, B-0) - \tau_{xy}(x, B+0) &= \langle \tau_{xy}(x, B) \rangle = 0, \quad c_0 < x < c_1, \\ \sigma_y(x, B-0) - \sigma_y(x, B+0) &= \langle \sigma_y(x, B) \rangle = 0, \quad c_0 < x < c_1, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\tau_{xy}|_{y=B \pm 0} = 0, \quad \sigma_y|_{y=B \pm 0} = p_\sigma(x), \quad c_0 < x < c_1. \quad (5.3)$$

З умов (5.2) можна виразити стрибки нормальних похідних функцій переміщень:

$$\begin{aligned} \langle \tau_{xy}(x, B) \rangle = 0 &\Rightarrow \left\langle \frac{\partial u}{\partial y}(x, B) \right\rangle = -\psi'_2(x), \quad c_0 < x < c_1, \\ \langle \sigma_y(x, B) \rangle = 0 &\Rightarrow \left\langle \frac{\partial v}{\partial y}(x, B) \right\rangle = -\frac{\mu}{1-\mu} \psi'_1(x) = \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \psi'_1(x), \quad c_0 < x < c_1. \end{aligned}$$

Задача (2.4-2.6, 3.1-3.2, 5.1-5.3) зводиться до одновимірної крайової задачі шляхом застосування інтегрального sin-cos перетворення Фур'є за змінною y (2.7) за узагальненою схемою [46]. Покрокове отримання рівнянь у просторі трансформант наведено у додатку А.

В результаті в просторі трансформант отримано неперервну одновимірну крайову задачу в просторі трансформант [6, 10]:

$$\begin{cases}
u''_{\beta}(x) - \frac{\beta^2(\kappa-1)}{\kappa+1}u_{\beta}(x) + \frac{2\beta}{\kappa+1}v'_{\beta}(x) = \frac{3-\kappa}{\kappa+1}\chi'(x) - \\
\quad -\beta\sin\beta B\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\psi_1(x) + \cos\beta B\frac{\kappa-3}{\kappa+1}\psi'_2(x), \\
v''_{\beta}(x) - \frac{\beta^2(\kappa+1)}{\kappa-1}v_{\beta}(x) - \frac{2\beta}{\kappa-1}u'_{\beta}(x) = -\beta\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\chi(x) - \\
\quad -\sin\beta B\psi'_1(x) + \beta\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\cos\beta B\psi_2(x), \\
u_{\beta}(0) = 0, u_{\beta}(a) = 0, \\
v_{\beta}(0) = 0, v_{\beta}(a) = 0.
\end{cases} \quad (5.4)$$

Цю задачу переформульовано у вигляді неперервної крайової задачі за схемою розділу 2. Праву частину векторного рівняння (2.10) подано за формулою

$$\bar{f}(x) = \begin{pmatrix} \frac{3-\kappa}{\kappa+1}\chi'(x) - \beta\sin\beta B\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\psi_1(x) + \cos\beta B\frac{\kappa-3}{\kappa+1}\psi'_2(x) \\ -\beta\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\chi(x) - \sin\beta B\psi'_1(x) + \beta\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\cos\beta B\psi_2(x) \end{pmatrix}, \text{ де}$$

$$\chi(x) = v|_{y=0}, \chi'(x) = v'|_{y=0}.$$

Відповідно до побудованого розв'язку (2.20) формули для функцій переміщень мають наступне подання [22, 23, 27]:

$$\begin{aligned}
u_{\beta}(x) &= Y_1^{11}(x)c_1 + Y_1^{12}(x)c_2 + Y_2^{11}(x)c_3 + Y_2^{12}(x)c_4 + \\
&+ \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a G^{11}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi - \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a G^{12}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi - \\
&- \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \beta \sin\beta B \int_0^a G^{11}(x, \xi) \psi_1(\xi) d\xi + \cos\beta B \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \int_0^a G^{11}(x, \xi) \psi'_2(\xi) d\xi - \\
&- \sin\beta B \int_0^a G^{12}(x, \xi) \psi'_1(\xi) d\xi + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \cos\beta B \int_0^a G^{12}(x, \xi) \psi_2(\xi) d\xi,
\end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned}
v_{\beta}(x) = & Y_1^{21}(x)c_1 + Y_1^{22}(x)c_2 + Y_2^{21}(x)c_3 + Y_2^{22}(x)c_4 + \\
& + \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a G^{21}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi - \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a G^{22}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi - \\
& - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \beta \sin \beta B \int_0^a G^{21}(x, \xi) \psi_1(\xi) d\xi + \cos \beta B \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \int_0^a G^{21}(x, \xi) \psi_2(\xi) d\xi - \\
& - \sin \beta B \int_0^a G^{22}(x, \xi) \psi_1(\xi) d\xi + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \cos \beta B \int_0^a G^{22}(x, \xi) \psi_2(\xi) d\xi.
\end{aligned} \quad (5.6)$$

Коефіцієнти $c_i, i = \overline{1,4}$ зображено в додатку В, вони мають вигляд (В.2).

Подальший розв'язок поставленої задачі залежить від конфігурації нормального навантаження, доданого до короткого торця.

5.2. Навантаження по середині короткого торця (випадок 1)

Розглянемо півсмугу, що навантажено лише по середині торця, а тріщина розташована далеко від бічних граней півсмуги (рис. 5.2).

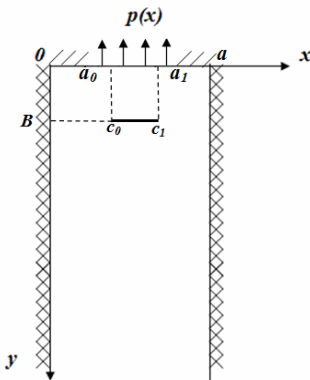


Рис. 5.2. Геометрія та координатна система пів смуги з трансверсальною тріщиною, що розташована далеко від бічних граней півсмуги, для випадку 1

Розв'яжемо крайову задачу (2.4, 3.9-3.11, 5.1-5.3) при $a_0 \neq 0, a_1 \neq a$ для пружної півсмуги з умовами на бічних гранях (3.3).

Інтегральні доданки у (5.5) та (5.6) мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} & \int_0^a G^{i1}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi, \int_0^a G^{i2}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi, \int_0^a G^{i1}(x, \xi) \psi_1(\xi) d\xi, \\ & \int_0^a G^{i1}(x, \xi) \psi_2'(\xi) d\xi, \int_0^a G^{i2}(x, \xi) \psi_1'(\xi) d\xi, \int_0^a G^{i2}(x, \xi) \psi_2(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

причому

$$\int_0^a G^{ij}(x, \xi) \psi_k'(\xi) d\xi = - \int_0^a \frac{\partial G^{ij}}{\partial \xi}(x, \xi) \psi_k(\xi) d\xi, \quad i, j, k = 1, 2.$$

В результаті співвідношення (5.5-5.6) приймуть вигляд [145, 147]:

$$\begin{aligned} u_\beta(x) = & Y_1^{11}(x)c_1 + Y_1^{12}(x)c_2 + Y_2^{11}(x)c_3 + Y_2^{12}(x)c_4 - \\ & - \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a \frac{\partial}{\partial \xi} G^{11}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi - \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a G^{12}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi - \\ & - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \beta \sin \beta B \int_{c_0}^{c_1} G^{11}(x, \xi) \psi_1(\xi) d\xi + \sin \beta B \int_{c_0}^{c_1} \frac{\partial G^{12}}{\partial \xi}(x, \xi) \psi_1(\xi) d\xi - \\ & - \cos \beta B \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \int_{c_0}^{c_1} \frac{\partial G^{11}}{\partial \xi}(x, \xi) \psi_2(\xi) d\xi + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \cos \beta B \int_{c_0}^{c_1} G^{12}(x, \xi) \psi_2(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} v_\beta(x) = & Y_1^{21}(x)c_1 + Y_1^{22}(x)c_2 + Y_2^{21}(x)c_3 + Y_2^{22}(x)c_4 - \\ & - \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a \frac{\partial}{\partial \xi} G^{21}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi - \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a G^{22}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi - \\ & - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \beta \sin \beta B \int_{c_0}^{c_1} G^{21}(x, \xi) \psi_1(\xi) d\xi + \sin \beta B \int_{c_0}^{c_1} \frac{\partial G^{22}}{\partial \xi}(x, \xi) \psi_1(\xi) d\xi - \\ & - \cos \beta B \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \int_{c_0}^{c_1} \frac{\partial G^{21}}{\partial \xi}(x, \xi) \psi_2(\xi) d\xi + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \cos \beta B \int_{c_0}^{c_1} G^{22}(x, \xi) \psi_2(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (5.8)$$

так як $\psi_1(x), \psi_2(x) = 0, x \notin [c_0; c_1]$.

Підставимо у формули (5.7-5.8) отримані раніше $Y_1(x), Y_2(x), c_i, i = \overline{1,4}$ та обернемо отримані трансформанти згідно з формулами (2.8). Тоді отримаємо наступні вирази для функцій переміщень [165, 175]:

$$u(x, y) = \int_0^a \chi(\xi) f_u(x, y, \xi) d\xi + \int_{c_0}^{c_1} \psi_1(\xi) g_{u1}(x, y, \xi) d\xi + \int_{c_0}^{c_1} \psi_2(\xi) g_{u2}(x, y, \xi) d\xi, \quad (5.9)$$

$$v(x, y) = \int_0^a \chi(\xi) f_v(x, y, \xi) d\xi + \int_{c_0}^{c_1} \psi_1(\xi) g_{v1}(x, y, \xi) d\xi + \int_{c_0}^{c_1} \psi_2(\xi) g_{v2}(x, y, \xi) d\xi. \quad (5.10)$$

Формули (5.9-5.10) остаточно визначають переміщення, якщо будуть відомі функції $\chi(x), \psi_1(x), \psi_2(x)$. Для їх знаходження необхідно задовольнити умови по короткому торцю (3.9)-(3.10), які залишились поки що невиконаними, та умови на тріщині (5.3).

Виконати умови (3.9, 5.3) шляхом безпосередніх підстановок в них співвідношень (5.9-5.10) неможливо, бо інтеграли у виразах для переміщень є слабо-збіжними. Тому для відокремлення їх слабо-збіжних частин використано методикку, що подано у додатку Г.

З умови (3.10) випливає (3.15). Підстановка формул переміщень у крайову умову (3.9) та умови на тріщині (5.3) приводить до системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (ССІДР) вигляду [174]:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \int_{a_0}^{a_1} \chi(\xi^*) \ln \frac{1}{|\xi^* - x^*|} d\xi^* + K_0(x^*) = r(x^*), & a_0 < x^* < a_1 \\ \frac{d^2}{dx^2} \int_{c_0}^{c_1} \psi_1(\xi^*) \ln \frac{1}{|\xi^* - x^*|} d\xi^* + K_1(x^*) = 0, & c_0 < x^* < c_1 \\ \frac{d^2}{dx^2} \int_{c_0}^{c_1} \psi_2(\xi^*) \ln \frac{1}{|\xi^* - x^*|} d\xi^* + K_2(x^*) = q(x^*), & c_0 < x^* < c_1, \end{cases} \quad (5.11)$$

де $K_i(x) = \int_{a_0}^{a_1} \chi(\xi) f_i(\xi, x) d\xi + \int_{c_0}^{c_1} \psi_1(\xi) R_{i,1}(x, \xi) d\xi + \int_{c_0}^{c_1} \psi_2(\xi) R_{i,2}(x, \xi) d\xi, i = 0, 1, 2,$
 $f_i(\xi, x), R_{i,1}(x, \xi), R_{i,2}(x, \xi), r(x), q(x), i = 0, 1, 2$ – відомі регулярні функції
при $a_0 \neq 0, a_1 \neq a$.

Виконується заміна змінних $\xi = \frac{2\xi^* - (\vartheta_0 + \vartheta_1)}{\vartheta_1 - \vartheta_0}, x = \frac{2x^* - (\vartheta_0 + \vartheta_1)}{\vartheta_1 - \vartheta_0}$, де
 $\vartheta \in \{a, c\}$, для переходу до інтервалів інтегрування $[-1; 1]$. У результаті ССІДР (5.11) приймає наступний вигляд:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \tilde{\chi}(\xi) \ln \frac{1}{|\xi - x|} d\xi + \tilde{K}_0(x) = \tilde{r}(x), & -1 < x < 1 \\ \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \tilde{\psi}_1(\xi) \ln \frac{1}{|\xi - x|} d\xi + \tilde{K}_1(x) = 0, & -1 < x < 1 \\ \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \tilde{\psi}_2(\xi) \ln \frac{1}{|\xi - x|} d\xi + \tilde{K}_2(x) = \tilde{q}(x), & -1 < x < 1, \end{cases} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \text{де } \tilde{\chi}(\xi) &= \chi \left(\frac{(a_1 - a_0)\xi + (a_0 + a_1)}{2} \right), & \tilde{\psi}_i(\xi) &= \psi_i \left(\frac{(c_1 - c_0)\xi + (c_0 + c_1)}{2} \right), i = 1, 2, \\ \tilde{r}(x) &= \frac{(a_1 - a_0)}{2} r \left(\frac{(a_1 - a_0)x + (a_0 + a_1)}{2} \right), & \tilde{q}(x) &= \frac{(c_1 - c_0)}{2} q \left(\frac{(c_1 - c_0)x + (c_0 + c_1)}{2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_i(x) &= \int_{-1}^1 \tilde{\chi}(\xi) \tilde{f}_i(\xi, x) d\xi + \int_{-1}^1 \tilde{\psi}_1(\xi) \tilde{R}_{i,1}(x, \xi) d\xi + \int_{-1}^1 \tilde{\psi}_2(\xi) \tilde{R}_{i,2}(x, \xi) d\xi, i = 0, 1, 2, \\ \tilde{f}_i(\xi, x) &= \frac{(a_1 - a_0)(\vartheta_1 - \vartheta_0)}{4} f_i \left(\frac{(a_1 - a_0)\xi + (a_0 + a_1)}{2}, \frac{(\vartheta_1 - \vartheta_0)x + (\vartheta_0 + \vartheta_1)}{2} \right), \\ \tilde{R}_{i,j}(x, \xi) &= \frac{(c_1 - c_0)(\vartheta_1 - \vartheta_0)}{4} R_{i,j} \left(\frac{(\vartheta_1 - \vartheta_0)x + (\vartheta_0 + \vartheta_1)}{2}, \frac{(c_1 - c_0)\xi + (c_0 + c_1)}{2} \right), j = 1, 2, \\ \vartheta &\in \begin{cases} a, i = 0 \\ c, i = 1, 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

ССІДР (5.12) розв'язується наближено методом ортогональних поліномів [46] аналогічно до схеми, поданої в пункті 2.6.1. Згідно з

цим методом, функції $\tilde{\chi}(\xi), \tilde{\psi}_i(\xi), i=1,2$ розвиваються в ряди за поліномами Чебишева другого роду:

$$\tilde{\chi}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n^0 \sqrt{1-\xi^2} U_n(\xi), \quad \xi \in [-1;1], \quad (5.13)$$

$$\tilde{\psi}_i(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n^i \sqrt{1-\xi^2} U_n(\xi), \quad \xi \in [-1;1], i=1,2, \quad (5.14)$$

де $U_n(x)$ – поліноми Чебишева другого роду. Вирази (5.13)-(5.14) підставляються до ССІДР (5.12), змінюється порядок підсумовування та інтегрування. Використовується спектральне співвідношення (2.26) та застосовується стандартна схема методу ортогональних поліномів. В результаті приходимо до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $s_n^i, i=0,1,2, n=0,1,\dots$

$$\tilde{S}_m + \sum_{n=0}^{\infty} D_{mn} \tilde{S}_n = \tilde{f}_m, \quad m=0,1,2,\dots, \quad (5.15)$$

де $\tilde{S}_m = \begin{pmatrix} s_m^0 \\ s_m^1 \\ s_m^2 \end{pmatrix}$, компоненти $D_{mn} = \{d_{mn}^{ij}\}, i,j=0,1,2, \tilde{f}_m = \begin{pmatrix} f_m^0 \\ f_m^1 \\ f_m^2 \end{pmatrix}$ є відомі сталі.

Система (5.15) розв'язується методом редукції. Підстановка знайдених сталих $s_n^i, i=0,1,2, n=0,1,\dots$ у подання (5.13- 5.14) та послідовне використання у формулах (5.9-5.10) цих зображень завершує побудову розв'язку задачі.

Для обчислення КІН функції напруження на лінії $c_0 < x < c_1, y = B$ запишемо у зображенні [174]:

$$\begin{aligned} \sigma_y(x^*, B) &= \frac{1}{\pi} \int_{c_0}^{c_1} \psi_2(\xi^*) \frac{1}{(\xi^* - x^*)^2} d\xi^* + \sigma_y^0(x^*, B), \\ \tau_{xy}(x^*, B) &= \frac{1}{\pi} \int_{c_0}^{c_1} \psi_1(\xi^*) \frac{1}{(\xi^* - x^*)^2} d\xi^* + \tau_{xy}^0(x^*, B). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Після заміни змінних $\xi = \frac{2\xi^* - (c_0 + c_1)}{c_1 - c_0}$, $x = \frac{2x^* - (c_0 + c_1)}{c_1 - c_0}$ вирази для

функцій напружень (5.16) приймуть вигляд:

$$\begin{aligned}\sigma_y(x, B) &= \frac{1}{\pi} \frac{2}{c_1 - c_0} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|\xi - x|} \tilde{\nu}_2(\xi) d\xi + \tilde{\sigma}_y^0(x, B), \\ \tau_{xy}(x, B) &= \frac{1}{\pi} \frac{2}{c_1 - c_0} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|\xi - x|} \tilde{\nu}_1(\xi) d\xi + \tilde{\tau}_{xy}^0(x, B).\end{aligned}\quad (5.17)$$

де $\tilde{\sigma}_y^0(x, B)$, $\tilde{\tau}_{xy}^0(x, B)$ – відомі регулярні функції.

У формули (5.17) підставляються вирази для функцій $\tilde{\nu}_i(\xi)$ (5.14) та змінюється порядок підсумовування та інтегрування:

$$\begin{aligned}\sigma_y(x, B) &= \frac{1}{\pi} \frac{2}{c_1 - c_0} \sum_{n=0}^{\infty} s_n^2 \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|\xi - x|} \sqrt{1 - \xi^2} U_n(\xi) d\xi + \tilde{\sigma}_y^0(x, B), \\ \tau_{xy}(x, B) &= \frac{1}{\pi} \frac{2}{c_1 - c_0} \sum_{n=0}^{\infty} s_n^1 \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|\xi - x|} \sqrt{1 - \xi^2} U_n(\xi) d\xi + \tilde{\tau}_{xy}^0(x, B).\end{aligned}\quad (5.18)$$

КІН обчислюються за формулою [46]:

$$K_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm 1 \pm 0} \sqrt{\pi(c_1 - c_0)(\pm x - 1)} \begin{bmatrix} \sigma_y(x, B) \\ \tau_{xy}(x, B) \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

У формулу (5.19) підставляються зображення (5.18) та використовується спектральне співвідношення:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x - s|} \sqrt{1 - s^2} U_m(s) ds &= \frac{|x| U_n(x)}{\sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x^2 - 1} U'_n(x) \operatorname{sgn} x - \\ &- 0.5(n+1) U_n(x), \quad |x| > 1.\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm 1 \pm 0} \sqrt{\pi(c_1 - c_0)(\pm x - 1)} \left(\frac{1}{\pi} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|\xi - x|} \sqrt{1 - \xi^2} U_n(\xi) d\xi \right) &= \\ = \sqrt{\pi(c_1 - c_0)} (\pm 1)^n (n+1) \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

У результаті отримуємо розрахункові формули для обчислення КІН:

$$K_{I-} = \sum_{k=0}^{\infty} s_k^2 \frac{\sqrt{\pi(c_1 - c_0)}(n+1)(-1)^k}{\sqrt{2}}, K_{I+} = \sum_{k=0}^{\infty} s_k^2 \frac{\sqrt{\pi(c_1 - c_0)}(n+1)}{\sqrt{2}}, \quad (5.20)$$

$$K_{II-} = \sum_{k=0}^{\infty} s_k^1 \frac{\sqrt{\pi(c_1 - c_0)}(n+1)(-1)^k}{\sqrt{2}}, K_{II+} = \sum_{k=0}^{\infty} s_k^1 \frac{\sqrt{\pi(c_1 - c_0)}(n+1)}{\sqrt{2}}. \quad (5.21)$$

Через γ_0, γ_1 тут і далі позначимо довжини відстаней між лівою і правою бічними гранями та лівим і правим кінцями тріщини відповідно.

На рисунках 5.3-5.4 було проведено числовий аналіз КІН при значеннях параметрів $G = 61.2781955 \cdot 10^9$ Па, $\mu = 0.33$, $p(x) = 1$ Па, $p_{\sigma}(x) = 0$ Па, $a = 10$ м, $a_0 = a - a_1 = 1$ та симетричному розташуванню тріщини усередині півсмуги.

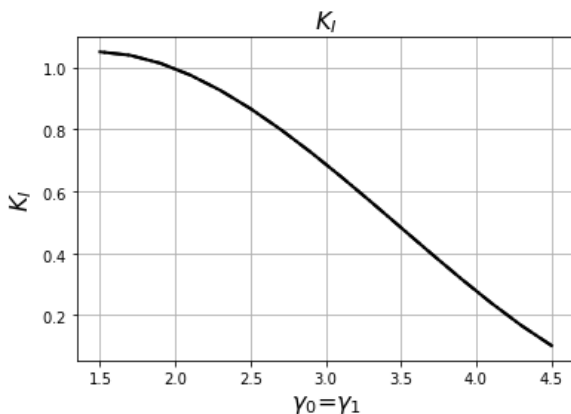


Рис. 5.3. КІН K_I при симетричній зміні довжини тріщини,

$$p(x) = 1 \text{ Па}, p_{\sigma}(x) = 0 \text{ Па}$$

При зменшенні довжини тріщини значення КІН K_I, K_{II} спадають до нуля. При значеннях параметрів $\gamma_0 = \gamma_1 < 15\%a$ розрахунки перестають бути стабільними у зв'язку з тим, що починається вплив нерухомих особливостей на кінцях тріщини. Щоб наблизити розра-

хунки при наближенні тріщини до бічних граней виникає необхідність враховувати нерухомі особливості.

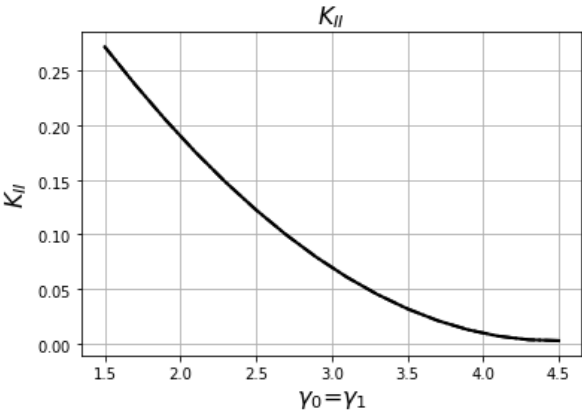


Рис. 5.4. КІН K_{II} при симетричній зміні довжини тріщини,
 $p(x)=1$ Па, $p_{\sigma}(x)=0$ Па

На рисунках 5.5-5.6 подано графіки КІН K_I, K_{II} при $p(x)=0$ Па, $p_{\sigma}(x)=1$ Па.

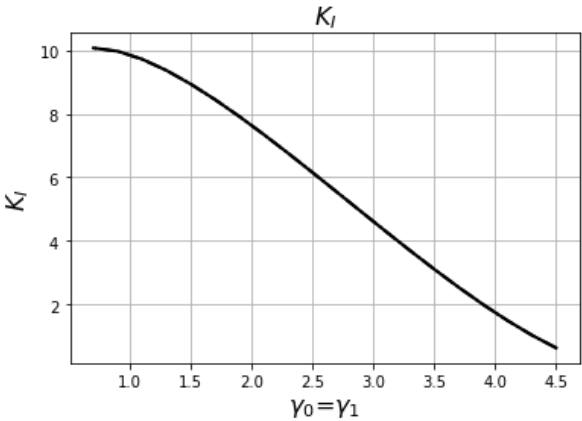
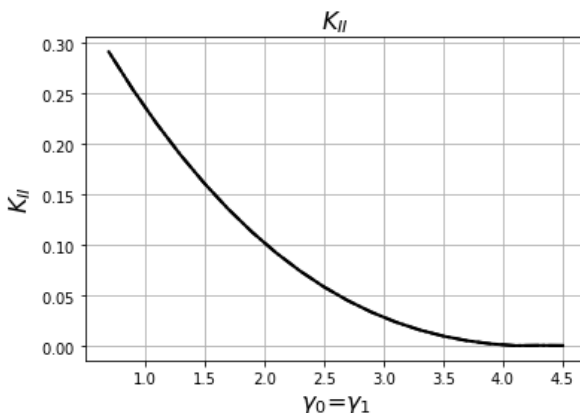


Рис. 5.5. КІН K_I при симетричній зміні довжини тріщини,
 $p(x)=0$ Па, $p_{\sigma}(x)=1$ Па



**Рис. 5.6. КІН K_{II} при симетричній зміні довжини тріщини,
 $p(x) = 0$ Па, $p_\sigma(x) = 1$ Па**

Як видно з графіків, значення КІН K_I, K_{II} спадають до нуля при зменшенні довжини тріщини. При значеннях параметрів $\gamma_0 = \gamma_1 < 5\%a$ потрібно враховувати нерухомі особливості на кінцях тріщини.

Значення КІН K_I значно більші за значення КІН K_{II} .

5.3. Навантаження по всьому короткому торцю (випадок 3)

Розглянемо півсмугу, що навантажена по всьому короткому торцю, а тріщина розташована далеко від бічних граней півсмуги (рис. 5.7). Розв'яжемо крайову задачу (2.4-2.6, 5.1-5.3) для пружної півсмуги з умовами (2.2) на бічних гранях вигляду (3.1-3.2) або (3.3).

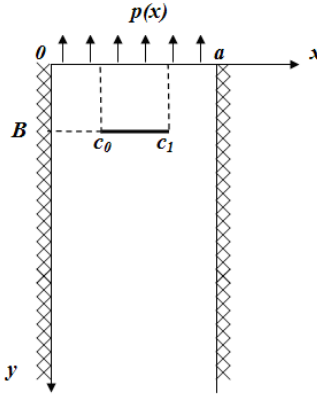


Рис. 5.7. Геометрія та координатна система півсмуги з трансверсальною тріщиною, що розташована далеко від бічних граней півсмуги, для випадку

3

Співвідношення (5.5-5.6) приймають вигляд:

$$\begin{aligned}
 u_{\beta}(x) = & Y_1^{11}(x)c_1 + Y_1^{12}(x)c_2 + Y_2^{11}(x)c_3 + Y_2^{12}(x)c_4 + \\
 & + \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a G^{11}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a \Im^{12}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi - \\
 & - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \beta \sin \beta B \int_{c_0}^{c_1} G^{11}(x, \xi) \psi_1(\xi) d\xi + \sin \beta B \int_{c_0}^{c_1} \frac{\partial G^{12}}{\partial \xi}(x, \xi) \psi_1(\xi) d\xi - \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \cos \beta B \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \int_{c_0}^{c_1} \frac{\partial G^{11}}{\partial \xi}(x, \xi) \psi_2(\xi) d\xi + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \cos \beta B \int_{c_0}^{c_1} G^{12}(x, \xi) \psi_2(\xi) d\xi, \\
 v_{\beta}(x) = & Y_1^{21}(x)c_1 + Y_1^{22}(x)c_2 + Y_2^{21}(x)c_3 + Y_2^{22}(x)c_4 + \\
 & + \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a G^{21}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a \Im^{22}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi - \frac{\kappa-1}{\beta^2(\kappa+1)} \chi(x) - \\
 & - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \beta \sin \beta B \int_{c_0}^{c_1} G^{21}(x, \xi) \psi_1(\xi) d\xi + \sin \beta B \int_{c_0}^{c_1} \frac{\partial G^{22}}{\partial \xi}(x, \xi) \psi_1(\xi) d\xi - \quad (5.23) \\
 & - \cos \beta B \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \int_{c_0}^{c_1} \frac{\partial G^{21}}{\partial \xi}(x, \xi) \psi_2(\xi) d\xi + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \cos \beta B \int_{c_0}^{c_1} G^{22}(x, \xi) \psi_2(\xi) d\xi,
 \end{aligned}$$

оскільки $\psi_1(x), \psi_2(x) = 0, x \notin [c_0; c_1]$.

Підставивши у формули (5.22-5.23) отримані раніше $Y_1(x), Y_2(x), c_i, i = \overline{1,4}$ та обертаючи отримані трансформанти згідно з поданнями (2.8) отримаємо наступні вирази для функцій переміщень:

$$u(x, y) = \int_0^a \chi'(\xi) f_u(x, y, \xi) d\xi + \int_{c_0}^{c_1} \psi_1(\xi) g_{u1}(x, y, \xi) d\xi + \int_{c_0}^{c_1} \psi_2(\xi) g_{u2}(x, y, \xi) d\xi, \quad (5.24)$$

$$v(x, y) = \int_0^a \chi'(\xi) f_v(x, y, \xi) d\xi + \int_{c_0}^{c_1} \psi_1(\xi) g_{v1}(x, y, \xi) d\xi + \int_{c_0}^{c_1} \psi_2(\xi) g_{v2}(x, y, \xi) d\xi + \int_0^x \chi'(\xi) d\xi. \quad (5.25)$$

Зображення (5.24-5.25) остаточно визначають переміщення, якщо будуть відомі функції $\chi'(x), \psi_1(x), \psi_2(x)$. Для їх знаходження необхідно задовольнити поки що невиконану умову (2.5) та умови на тріщині (5.3). Оскільки інтеграли у виразах для переміщень є слабо-збіжними, для відокремлення їх слабо-збіжних частин використовується методика, яку подано в додатку Г.

Підстановка в крайову умову (2.5) та в умови на тріщині (5.3) формул для функцій переміщень приводить до системи сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) вигляду [146]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^a \chi'(\xi^*) \left[\frac{1}{\xi^* - x^*} + Z(x^*, \xi^*) \right] d\xi^* + K_0(x^*) = r(x^*), \quad 0 < x^* < a \\ \frac{d^2}{dx^2} \int_{c_0}^{c_1} \psi_1(\xi^*) \ln \left| \frac{1}{\xi^* - x^*} \right| d\xi^* + K_1(x^*) = 0, \quad c_0 < x^* < c_1 \\ \frac{d^2}{dx^2} \int_{c_0}^{c_1} \psi_2(\xi^*) \ln \left| \frac{1}{\xi^* - x^*} \right| d\xi^* + K_2(x^*) = 0, \quad c_0 < x^* < c_1, \end{array} \right. \quad (5.26)$$

$$\text{де} \quad K_i(x) = \int_0^a \chi'(\xi) f_i(\xi, x) d\xi + \int_{c_0}^{c_1} \psi_1(\xi) R_{i,1}(x, \xi) d\xi + \int_{c_0}^{c_1} \psi_2(\xi) R_{i,2}(x, \xi) d\xi, i = 0, 1, 2,$$

$f_i(\xi, x), R_{i,1}(x, \xi), R_{i,2}(x, \xi), r(x), i = 0, 1, 2$ — відомі регулярні функції,

$$Z(x, \xi) = h_1 \left(\frac{1}{\xi + x} + \frac{1}{\xi + x - 2a} \right) + h_2 \left(\frac{x}{(\xi + x)^2} + \frac{x - a}{(\xi + x - 2a)^2} \right) + h_3 \left(\frac{x\xi}{(\xi + x)^3} + \frac{(x - a)(\xi - a)}{(\xi + x - 2a)^3} \right),$$

$$h_1 = -\frac{\kappa^2 - 3}{2\kappa}, h_2 = -\frac{2}{\kappa}, h_3 = \frac{4}{\kappa}.$$

Для переходу до інтервалів інтегрування $[-1; 1]$ виконується заміна змінних $\xi = \frac{2\xi^* - (\vartheta_0 + \vartheta_1)}{\vartheta_1 - \vartheta_0}, x = \frac{2x^* - (\vartheta_0 + \vartheta_1)}{\vartheta_1 - \vartheta_0}$, де $\vartheta \in \{a, c\}$. У результаті

ССІР (5.26) приймає наступне зображення:

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 \tilde{\chi}(\xi) \left[\frac{1}{\xi - x} + \tilde{Z}(x, \xi) \right] d\xi + \tilde{K}_0(x) = \tilde{r}(x), & -1 < x < 1 \\ \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \tilde{\psi}_1(\xi) \ln \frac{1}{|\xi - x|} d\xi + \tilde{K}_1(x) = 0, & -1 < x < 1 \\ \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \tilde{\psi}_2(\xi) \ln \frac{1}{|\xi - x|} d\xi + \tilde{K}_2(x) = \tilde{q}(x), & -1 < x < 1, \end{cases} \quad (5.27)$$

$$\text{де} \quad \tilde{\chi}(\xi) = \chi' \left(\frac{a(\xi + 1)}{2} \right), \quad \tilde{\psi}_i(\xi) = \psi_i \left(\frac{(c_1 - c_0)\xi + (c_0 + c_1)}{2} \right), i = 1, 2,$$

$$\tilde{r}(x) = r \left(\frac{(a_1 - a_0)\xi + (a_0 + a_1)}{2} \right), \quad \tilde{q}(x) = q \left(\frac{(c_1 - c_0)\xi + (c_0 + c_1)}{2} \right),$$

$$K_i(x) = \int_{-1}^1 \tilde{\chi}(\xi) \tilde{f}_i(\xi, x) d\xi + \int_{-1}^1 \tilde{\psi}_1(\xi) \tilde{R}_{i,1}(x, \xi) d\xi + \int_{-1}^1 \tilde{\psi}_2(\xi) \tilde{R}_{i,2}(x, \xi) d\xi, i = 0, 1, 2,$$

$$\tilde{f}_i(\xi, x) = \frac{(a_1 - a_0)}{2} \left[\frac{(\vartheta_1 - \vartheta_0)}{2} \right]^\delta f_i \left(\frac{(a_1 - a_0)\xi + (a_0 + a_1)}{2}, \frac{(\vartheta_1 - \vartheta_0)x + (\vartheta_0 + \vartheta_1)}{2} \right),$$

$$\tilde{R}_{i,j}(x, \xi) = \frac{(c_1 - c_0)}{2} \left[\frac{(\vartheta_1 - \vartheta_0)}{2} \right]^\delta R_{i,j} \left(\frac{(\vartheta_1 - \vartheta_0)x + (\vartheta_0 + \vartheta_1)}{2}, \frac{(c_1 - c_0)\xi + (c_0 + c_1)}{2} \right), j = 1, 2$$

$$g \in \begin{cases} a, i=0 \\ c, i=1,2, \end{cases} \quad \delta \in \begin{cases} 0, i=0 \\ 1, i=1,2, \end{cases} \quad \tilde{Z}(x, \xi) = h_1 \left(\frac{1}{\xi + x + 2} + \frac{1}{\xi + x - 2} \right) + \\ + h_2 \left(\frac{x+1}{(\xi + x + 1)^2} + \frac{x-1}{(\xi + x - 2)^2} \right) + h_3 \left(\frac{(x+1)(\xi+1)}{(\xi + x + 2)^3} + \frac{(x-1)(\xi-1)}{(\xi + x - 2)^3} \right).$$

Трансцендентне рівняння для визначення порядку особливості розв'язку першого рівняння у (5.27) співпадає з трансцендентним рівнянням для (2.33).

Згідно зі схемою, викладеною у підрозділі 2.6.2, невідома функція $\tilde{\chi}(\xi)$ розвивається у суми на кожному інтервалі:

$$\tilde{\chi}(\xi) = \sum_{k=0}^{N-1} [s_k^0 \rho_k^-(\xi) + s_{k+N}^0 \rho_k^+(\xi)], \quad \xi \in [-1; 1], \quad (5.28)$$

де $\rho_{2k}^\pm(\xi) = (1 \pm \xi)^{\operatorname{Re} \lambda_k} \cdot \cos(\operatorname{Im} \lambda_k \ln(1 \pm \xi))$, $\rho_{2k+1}^\pm(\xi) = (1 \pm \xi)^{\operatorname{Re} \lambda_k} \cdot \sin(\operatorname{Im} \lambda_k \ln(1 \pm \xi))$, $k = \overline{0, N-1}$.

Функції $\tilde{\psi}_i(\xi)$ розвиваються у суми за поліномами Чебишева другого роду:

$$\tilde{\psi}_i(\xi) = \sum_{k=0}^{2N-1} s_k^i \sqrt{1 - \xi^2} U_k(\xi), \quad \xi \in [-1; 1], i = 1, 2. \quad (5.29)$$

Сегмент $[-1; 1]$ ділиться на $2N$ відрізків точками $x_i : P_{2N-1}^{\lambda_0, \lambda_0}(x_i) = 0, i = \overline{0, 2N-1}$. ССІР (5.27) розглядається при $x = x_i$.

Після підстановки виразів для невідомих функцій (5.28, 5.29) до ССІР (5.27) з урахуванням умови (2.32) отримуємо систему $6N$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих сталих $s_k^i, i = 0, 1, 2, k = \overline{0, 2N-1}$:

$$\sum_{n=0}^{2N-1} D_{mn} \bar{S}_n = \bar{f}_m, \quad m = \overline{0, 2N-1}, \quad (5.30)$$

де $\bar{S}_m = \begin{pmatrix} s_m^0 \\ s_m^1 \\ s_m^2 \end{pmatrix}$, компоненти $D_{mn} = \{d_{mn}^{ij}\}, i, j = 0, 1, 2, \bar{f}_m = \begin{pmatrix} f_m^0 \\ f_m^1 \\ f_m^2 \end{pmatrix}$ є відомими

сталими.

Підстановка знайдених сталих $s_k^i, i=0,1,2, k=\overline{0,2N-1}$ у формули (5.24-5.25) завершує побудову розв'язку задачі.

КІН обчислюються за формулами [146]:

$$K_{I-} = \sum_{k=0}^{2N-1} s_k^2 \frac{\sqrt{\pi(c_1 - c_0)}(n+1)(-1)^k}{\sqrt{2}}, K_{I+} = \sum_{k=0}^{2N-1} s_k^2 \frac{\sqrt{\pi(c_1 - c_0)}(n+1)}{\sqrt{2}}, \quad (5.31)$$

$$K_{II-} = \sum_{k=0}^{2N-1} s_k^1 \frac{\sqrt{\pi(c_1 - c_0)}(n+1)(-1)^k}{\sqrt{2}}, K_{II+} = \sum_{k=0}^{2N-1} s_k^1 \frac{\sqrt{\pi(c_1 - c_0)}(n+1)}{\sqrt{2}}. \quad (5.32)$$

На рисунках 5.8-5.9 зображено графіки КІН K_I, K_{II} при $G = 61.2781955 \cdot 10^9$ Па, $\mu = 0.33$, $p(x) = 1$ Па, $p_\sigma(x) = 0$ Па, $a = 10$ м.

При зменшенні довжини тріщини значення КІН K_I, K_{II} спадають до нуля. Стабільні розрахунки отримано при значеннях параметрів $\gamma_0 = \gamma_1 \geq 5\%a$, а при $\gamma_0 = \gamma_1 < 5\%a$ потрібно враховувати нерухомі особливості на кінцях тріщини.

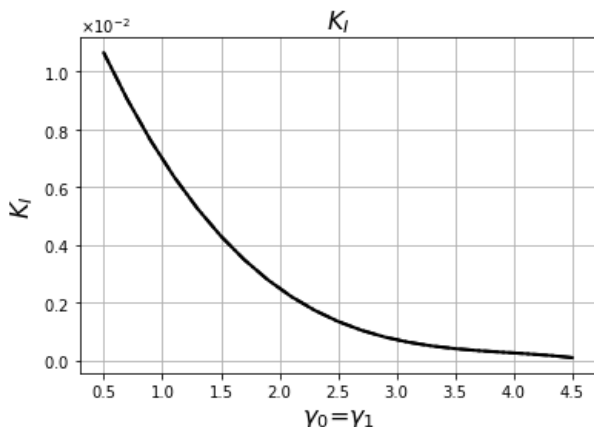


Рис. 5.8. КІН K_I при симетричній зміні довжини тріщини,

$$p(x) = 1 \text{ Па}, p_\sigma(x) = 0 \text{ Па}$$

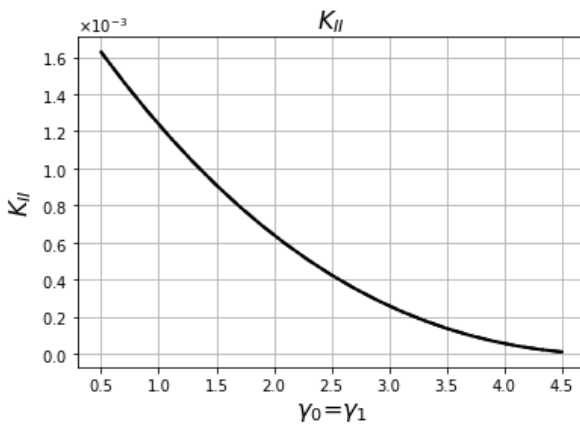


Рис. 5.9. КІН K_{II} при симетричній зміні довжини тріщини,
 $p(x)=1$ Па, $p_{\sigma}(x)=0$ Па

Графіки КІН K_I, K_{II} подано на рисунках 5.10-5.11 при $p(x)=0$ Па, $p_{\sigma}(x)=1$ Па.

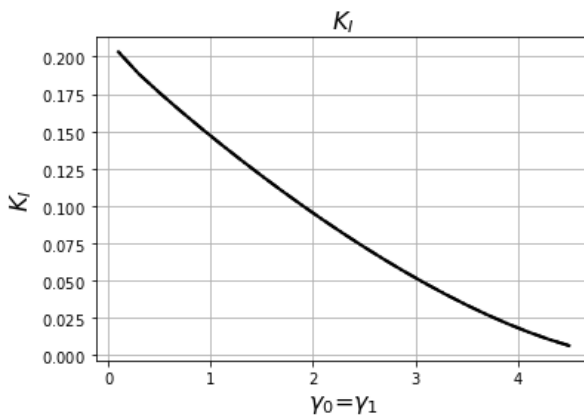


Рис. 5.10. КІН K_I при симетричній зміні довжини тріщини,
 $p(x)=0$ Па, $p_{\sigma}(x)=1$ Па

Як видно з графіків, значення КІН K_I, K_{II} спадають до нуля при зменшенні довжини тріщини. При значеннях параметрів $\gamma_0 = \gamma_1 < 1\%a$ потрібно враховувати нерухомі особливості на кінцях тріщини.

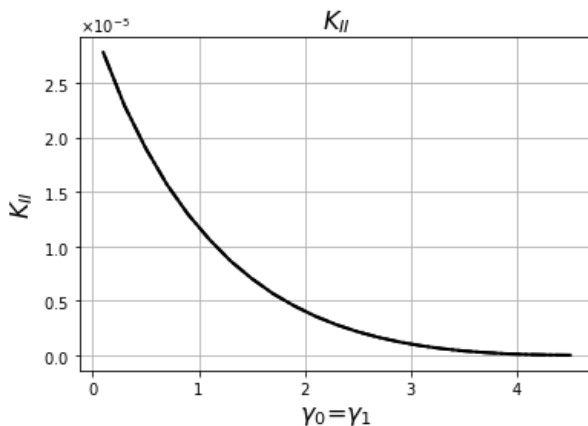


Рис. 5.11. КІН K_{II} при симетричній зміні довжини тріщини,

$$p(x) = 0 \text{ Па, } p_{\sigma}(x) = 1 \text{ Па}$$

У даному випадку значення КІН K_I значно більші за значення КІН K_{II} .

5.4. Навантаження з лівого краю короткого торця (випадок 2)

Розглянемо півсмугу, що навантажено з лівого краю торця, а тріщина розташована далеко від бічних граней півсмуги (рис. 5.12). Розв'яжемо крайову задачу (2.4, 3.18-3.20, 5.1-5.3) при $a_1 \neq a$ для пружної півсмуги з умовами (3.3) на бічних гранях.

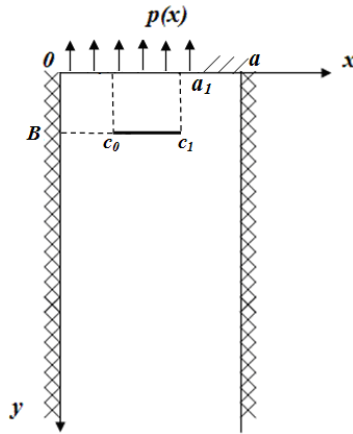


Рис. 5.12. Геометрія та координатна система півсмуги з трансверсальною тріщиною, що розташована далеко від бічних граней півсмуги, у випадку 2

Співвідношення (5.5-5.6) приймають вигляд (5.22-5.23). Підставивши у подання (5.22-5.23) знайдені раніше $Y_1(x), Y_2(x), c_i, i = \overline{1,4}$ та обертаючи отримані трансформанти згідно з формулами (2.8), отримаємо вирази для функцій переміщень вигляду (5.24-5.25).

Формули (5.24-5.25) остаточно визначають переміщення, якщо будуть відомі функції $\chi'(x), \psi_1(x), \psi_2(x)$. Для їх знаходження необхідно задовольнити умови по короткому торцю (3.18-3.19) та умови на тріщині (5.3). Для підсумовування слабо-збіжних інтегралів у зображеннях для функцій переміщень використано методику, яку викладено в додатку Г.

З умови (3.19) випливає (3.24). Підстановка виразів для функцій переміщень у крайову умову по короткому торцю (3.18) та умови на тріщині (5.3) приводить до ССІР [146]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^1 \tilde{\chi}(\xi) \left[\frac{1}{\xi-x} + \tilde{Z}(x, \xi) \right] d\xi + \tilde{K}_0(x) = \tilde{r}(x), \quad -1 < x < 1 \\ \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \tilde{\psi}_1(\xi) \ln \frac{1}{|\xi-x|} d\xi + \tilde{K}_1(x) = 0, \quad -1 < x < 1 \\ \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \tilde{\psi}_2(\xi) \ln \frac{1}{|\xi-x|} d\xi + \tilde{K}_2(x) = \tilde{q}(x), \quad -1 < x < 1 \end{array} \right. \quad (5.33)$$

де $\tilde{\chi}(\xi) = \chi' \left(\frac{a_1(\xi+1)}{2} \right), \quad \tilde{\psi}_i(\xi) = \psi_i \left(\frac{(c_1 - c_0)\xi + (c_0 + c_1)}{2} \right), i = 1, 2,$

$$\tilde{K}_i(x) = \int_{-1}^1 \tilde{\chi}(\xi) \tilde{f}_i(\xi, x) d\xi + \int_{-1}^1 \tilde{\psi}_1(\xi) \tilde{R}_{i,1}(x, \xi) d\xi + \int_{-1}^1 \tilde{\psi}_2(\xi) \tilde{R}_{i,2}(x, \xi) d\xi, i = 0, 1, 2,$$

$\tilde{f}_i(\xi, x), \tilde{R}_{i,1}(x, \xi), \tilde{R}_{i,2}(x, \xi), \tilde{r}(x), \tilde{q}(x), i = 0, 1, 2$ — відомі регулярні функції

при $a_1 \neq a, \quad \tilde{Z}(x, \xi) = \frac{h_1}{\xi + x + 2} + \frac{h_2(x+1)}{(\xi + x + 2)^2} + \frac{h_3(\xi+1)(x+1)}{(\xi + x + 2)^3},$

$$h_1 = -\frac{\kappa^2 - 3}{2\kappa}, h_2 = -\frac{2}{\kappa}, h_3 = \frac{4}{\kappa}.$$

Трансцендентне рівняння для визначення порядку особливості розв'язку першого рівняння у (5.33) співпадає з трансцендентним рівнянням для (2.33).

Методику, що викладено у пункті 2.6.2, застосовано для розв'язання ССІР (5.33). Згідно з нею невідома функція $\tilde{\chi}(\xi)$ розвивається в суми на кожному інтервалі:

$$\tilde{\chi}(\xi) = \sum_{k=0}^{N-1} [s_k^0 \rho_k^-(\xi) + s_{k+N}^0 \rho_k^+(\xi)], \quad \xi \in [-1; 1], \quad (5.34)$$

де $\rho_{2k}^-(\xi) = (1 + \xi)^{\operatorname{Re} \lambda_k} \cdot \cos(\operatorname{Im} \lambda_k \ln(1 + \xi)), \quad \rho_{2k+1}^-(\xi) = (1 + \xi)^{\operatorname{Re} \lambda_k} \cdot \sin(\operatorname{Im} \lambda_k \ln(1 + \xi)),$

$$k = \overline{0, N-1}, \quad \rho_k^+(\xi) = \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi}}, k = \overline{0, N-1}, \quad T_k(x) — \text{поліноми Чебишева першого}$$

роду.

Функції $\tilde{\psi}_i(\xi)$ розвиваються в суми за поліномами Чебишева другого роду (5.29).

Сегмент $[-1;1]$ ділиться на $2N$ відрізків точками $x_i : P_{2N-1}^{2,0,-0.5}(x_i) = 0, i = \overline{0, 2N-1}$. ССІР (5.33) розглядається при $x = x_i$.

Після підстановки виразів для невідомих функцій (5.34, 5.29) до ССІР (5.33) з урахуванням умови (2.32) отримуємо систему $6N$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих сталих $s_k^i, i = \overline{0, 1, 2}, k = \overline{0, 2N-1}$ вигляду (5.30). Підстановка знайдених сталих $s_k^i, i = \overline{0, 1, 2}, k = \overline{0, 2N-1}$ у формули (5.24-5.25) завершує побудову розв'язку задачі. КІН обчислюються за формулами (5.31-5.32).

На рис. 5.13-5.16 суцільна лінія описує КІН на лівому кінці тріщини, а пунктирна – на правому кінці тріщини.

На рисунках 5.13-5.14 представлено графіки КІН K_I, K_{II} при $G = 61.2781955 \cdot 10^9$ Па, $\mu = 0.33$, $p(x) = 1$ Па, $p_\sigma(x) = 0$ Па, $a = 10$ м.

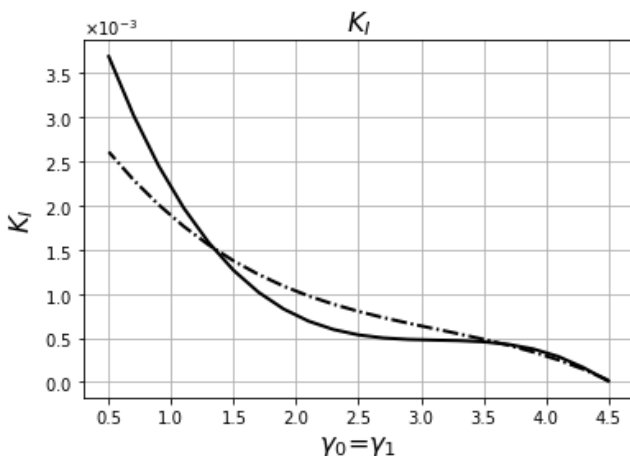


Рис. 5.13. КІН K_I при симетричній зміні довжини тріщини,

$$p(x) = 1 \text{ Па}, p_\sigma(x) = 0 \text{ Па}$$

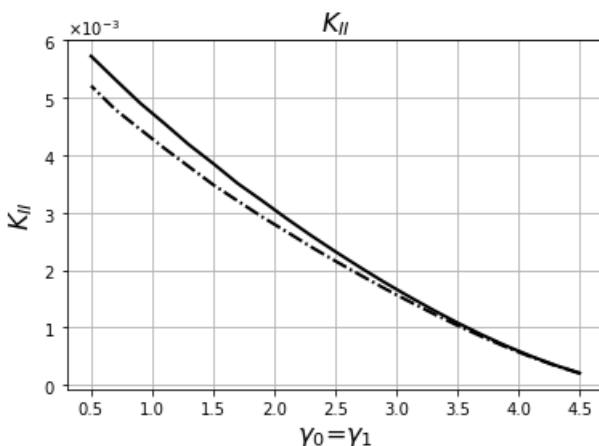


Рис. 5.14. КІН K_{II} при симетричній зміні довжини тріщини,

$$p(x) = 1 \text{ Па}, p_{\sigma}(x) = 0 \text{ Па}$$

Як бачимо, при значенні параметру $\gamma_0 < 5\%a$ потрібно враховувати нерухому особливість на лівому кінці тріщини, а при $\gamma_1 < 11\%a$ – на правому.

У даному випадку КІН K_I та K_{II} мають однаковий порядок, причому значення КІН K_{II} більші за відповідні значення КІН K_I .

Графіки КІН K_I, K_{II} зображено на рисунках 5.15-5.16 при $p(x) = 0 \text{ Па}, p_{\sigma}(x) = 1 \text{ Па}$.

Відмітимо, що КІН K_{I-}, K_{I+} співпадають по значенням відповідно, а КІН K_{II-}, K_{II+} відрізняються.

У даному випадку стабільні розрахунки отримано при значеннях параметрів $\gamma_0 = \gamma_1 \geq 1\%a$, а при $\gamma_0 = \gamma_1 < 1\%a$ потрібно враховувати нерухомі особливості на кінцях тріщини.

При даному випадку навантаження КІН K_I значно більші за значення КІН K_{II} .

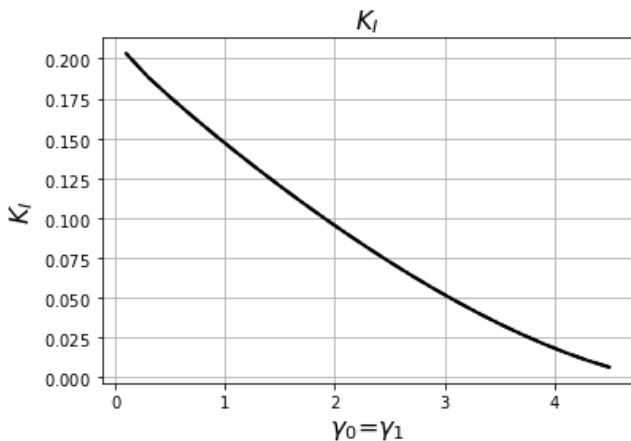


Рис. 5.15. КІН K_I при симетричній зміні довжини тріщини,
 $p(x) = 0$ Па, $p_\sigma(x) = 1$ Па

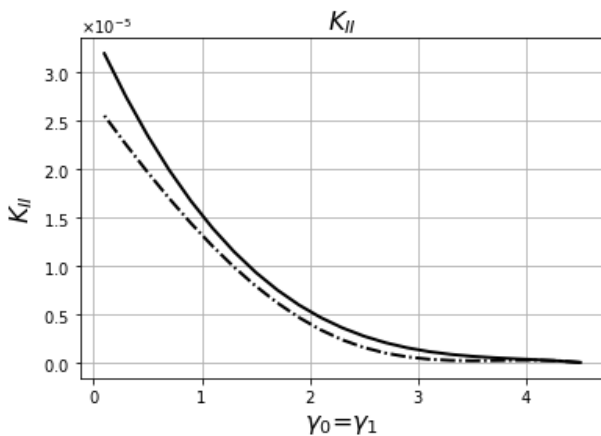


Рис. 5.16. КІН K_{II} при симетричній зміні довжини тріщини,
 $p(x) = 0$ Па, $p_\sigma(x) = 1$ Па

5.5. Задача теорії пружності для зчепленої пів смуги з трансверсальною тріщиною – симетричний випадок

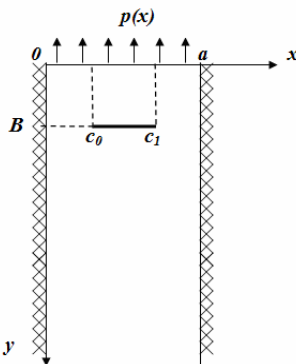


Рис. 5.17. Геометрія та координатна система півсмуги з трансверсальною тріщиною у симетричному випадку

Розглядається пружна півсмуга (рис. 5.17), яка займає область, що описується у декартовій системі координат співвідношеннями $0 < x < a, 0 < y < \infty$. Півсмугу навантажено по торцю $y=0, 0 < x < a$ (2.5-2.6). Переміщення у півсмугі задовольняють рівняння рівноваги (2.4).

Узагальнені граничні умови на бічних гранях (2.2) обираються у вигляді (3.3). Потрібно відшукати поле переміщень та напружень усередині півсмуги та на її гранях при відсутності об'ємних сил, що діють на півсмугу.

Усередині півсмуги на лінії $c_0 < x < c_1, y=B$ розташовано трансверсальну тріщину. Розглянемо випадок, коли тріщина розташована далеко від бічних граней та симетрично відносно середини півсмуги, тобто $c_0 = a - c_1$. Також виконується, що $a_0 = a - a_1$ і навантаження $p(x)$ є симетричною функцією відносно центру півсмуги, тобто:

$$p\left(\frac{a}{2}-x\right)=p\left(\frac{a}{2}+x\right), 0 < x < \frac{a}{2}. \quad (5.35)$$

Тоді умови (5.1)-(5.3) приймають вигляд

$$\begin{aligned} u(x, B-0) - u(x, B+0) &= \langle u(x, B) \rangle = 0, \quad c_0 < x < c_1, \\ v(x, B-0) - v(x, B+0) &= \langle v(x, B) \rangle = \psi_2(x) \neq 0, \quad c_0 < x < c_1, \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\sigma_y(x, B-0) - \sigma_y(x, B+0) = \langle \sigma_y(x, B) \rangle = 0, \quad c_0 < x < c_1, \quad (5.37)$$

$$\sigma_y|_{y=B \pm 0} = p_\sigma(x), \quad c_0 < x < c_1. \quad (5.38)$$

Умова $\langle \tau_{xy}(x, B) \rangle = 0$ у даному випадку виконується автоматично.

Одновимірна крайова задача в просторі трансформант (5.4) приймає вигляд:

$$\begin{cases} u''_{\beta}(x) - \frac{\beta^2(\kappa-1)}{\kappa+1}u_{\beta}(x) + \frac{2\beta}{\kappa+1}v'_{\beta}(x) = \frac{3-\kappa}{\kappa+1}\chi'(x) + \\ \quad + \cos \beta B \frac{\kappa-3}{\kappa+1}\psi'_2(x), \\ v''_{\beta}(x) - \frac{\beta^2(\kappa+1)}{\kappa-1}v_{\beta}(x) - \frac{2\beta}{\kappa-1}u'_{\beta}(x) = -\beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1}\chi(x) + \\ \quad + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1}\cos \beta B \psi_2(x), \\ u_{\beta}(0) = 0, u_{\beta}(a) = 0, \\ v_{\beta}(0) = 0, v_{\beta}(a) = 0. \end{cases} \quad (5.39)$$

Задачу (5.39) переформульовано у вигляді неперервної крайової задачі за схемою розділу 2. Праву частину векторного рівняння

$$(2.10) \text{ подано за формулою } \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} \frac{3-\kappa}{\kappa+1}\chi'(x) + \cos \beta b \frac{\kappa-3}{\kappa+1}\psi'_2(x) \\ -\beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1}\chi(x) + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1}\cos \beta b \psi_2(x) \end{pmatrix}.$$

Зображення для функцій переміщень (5.5-5.6) спрощуються:

$$u_{\beta}(x) = Y_1^{11}(x)c_1 + Y_1^{12}(x)c_2 + Y_2^{11}(x)c_3 + Y_2^{12}(x)c_4 +$$

$$+ \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a G^{11}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi - \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a G^{12}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi +$$

$$+ \cos \beta B \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \int_0^a G^{11}(x, \xi) \psi_2'(\xi) d\xi + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \cos \beta B \int_0^a G^{12}(x, \xi) \psi_2(\xi) d\xi, \quad (5.40)$$

$$v_{\beta}(x) = Y_1^{21}(x)c_1 + Y_1^{22}(x)c_2 + Y_2^{21}(x)c_3 + Y_2^{22}(x)c_4 +$$

$$+ \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a G^{21}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi - \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a G^{22}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi +$$

$$+ \cos \beta B \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \int_0^a G^{21}(x, \xi) \psi_2'(\xi) d\xi + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \cos \beta B \int_0^a G^{22}(x, \xi) \psi_2(\xi) d\xi. \quad (5.41)$$

Коефіцієнти $c_i, i=1,4$ мають вигляд (В.2).

5.6. Навантаження по середині короткого торця у симетричній постановці (випадок 1)

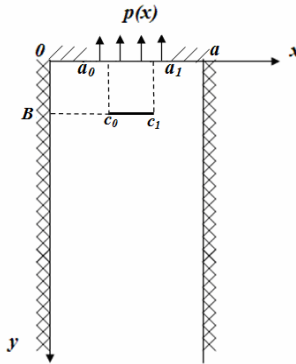


Рис. 5.18. Геометрія та координатна система півсмуги з трансверсальною тріщиною, що розташована далеко від бічних граней півсмуги, у симетричному випадку 1

Розглянемо півсмугу, що навантажена лише по середині торця, а тріщина розташована далеко від бічних граней півсмуги

(рис. 5.18). Розв'яжемо крайову задачу (2.4, 3.9-3.11, 5.36-5.38) при $a_0 \neq 0, a_1 \neq a$ для пружної півсмуги з умовами на бічних гранях (3.3).

Співвідношення (5.7-5.8) спрощуються

$$u_\beta(x) = Y_1^{11}(x)c_1 + Y_1^{12}(x)c_2 + Y_2^{11}(x)c_3 + Y_2^{12}(x)c_4 -$$

$$-\frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a \frac{\partial}{\partial \xi} G^{11}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi - \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a G^{12}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi -$$

$$-\cos \beta B \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \int_{c_0}^{c_1} \frac{\partial G^{11}}{\partial \xi}(x, \xi) \psi_2(\xi) d\xi + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \cos \beta B \int_{c_0}^{c_1} G^{12}(x, \xi) \psi_2(\xi) d\xi, \quad (5.42)$$

$$v_\beta(x) = Y_1^{21}(x)c_1 + Y_1^{22}(x)c_2 + Y_2^{21}(x)c_3 + Y_2^{22}(x)c_4 -$$

$$-\frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a \frac{\partial}{\partial \xi} G^{21}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi - \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a G^{22}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi -$$

$$-\cos \beta B \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \int_{c_0}^{c_1} \frac{\partial G^{21}}{\partial \xi}(x, \xi) \psi_2(\xi) d\xi + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \cos \beta B \int_{c_0}^{c_1} G^{22}(x, \xi) \psi_2(\xi) d\xi, \quad (5.43)$$

Після підстановки у формули (5.42-5.43) побудованих раніше $Y_1(x), Y_2(x), c_i, i=1,4$ та обертання отриманих трансформант згідно з поданнями (2.8) отримаємо наступні вирази для функцій переміщень:

$$u(x, y) = \int_0^a \chi(\xi) f_u(x, y, \xi) d\xi + \int_{c_0}^{c_1} \psi_2(\xi) g_{u2}(x, y, \xi) d\xi, \quad (5.44)$$

$$v(x, y) = \int_0^a \chi(\xi) f_v(x, y, \xi) d\xi + \int_{c_0}^{c_1} \psi_2(\xi) g_{v2}(x, y, \xi) d\xi. \quad (5.45)$$

Формули (5.44-5.45) остаточно визначають переміщення, якщо будуть відомі функції $\chi(x), \psi_2(x)$. Для їх знаходження необхідно задовольнити умови по короткому торцю (3.9-3.10), які залишилися поки що невиконаними, та умову на тріщині:

$$\sigma_y(x, B+0) = 0 \quad (5.46)$$

Виконати умови (3.9, 5.46) шляхом безпосередніх підстановок в них співвідношень (5.44-5.45) неможливо, бо інтеграли у виразах для переміщень є слабо-збіжними. Тому для відокремлення їх слабо-збіжних частин використовується методика, що наведена в додатку Г.

З умови (3.10) випливає (3.15). Підстановка формул переміщень у крайову умову (2.5) та в умову на тріщині (5.46) приводить до ССІДР вигляду:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \tilde{\chi}(\xi) \ln \frac{1}{|\xi - x|} d\xi + \tilde{K}_0(x) = \tilde{r}(x), & -1 < x < 1 \\ \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \tilde{\psi}_2(\xi) \ln \frac{1}{|\xi - x|} d\xi + \tilde{K}_2(x) = \tilde{q}(x), & -1 < x < 1, \end{cases} \quad (5.47)$$

$$\text{де} \quad \tilde{\chi}(\xi) = \chi \left(\frac{(a_1 - a_0)\xi + (a_0 + a_1)}{2} \right), \quad \tilde{\psi}_2(\xi) = \psi_2 \left(\frac{(c_1 - c_0)\xi + (c_0 + c_1)}{2} \right),$$

$$\tilde{K}_i(x) = \int_{-1}^1 \tilde{\chi}(\xi) \tilde{f}_i(\xi, x) d\xi + \int_{-1}^1 \tilde{\psi}_2(\xi) \tilde{R}_{i,2}(x, \xi) d\xi, i = 0, 2,$$

$\tilde{f}_i(\xi, x), \tilde{R}_{i,2}(x, \xi), \tilde{r}(x), \tilde{q}(x), i = 0, 1, 2$ — відомі регулярні функції при $a_0 \neq 0, a_1 \neq a$.

ССІДР (5.47) розв'язується наближено методом ортогональних поліномів за схемою пункту 5.2. Функції $\tilde{\chi}(\xi), \tilde{\psi}_2(\xi), i = 1, 2$ розвиваються у ряди за поліномами Чебишева другого роду (5.13)-(5.14). Приходимо до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $s_n^i, i = 0, 2, n = 0, 1, \dots$

$$\vec{S}_m + \sum_{n=0}^{\infty} D_{mn} \vec{S}_n = \vec{f}_m, \quad m = 0, 1, 2 \dots \quad (5.48)$$

де $\vec{S}_m = \begin{pmatrix} s_m^0 \\ s_m^2 \end{pmatrix}$, компоненти $D_{mn} = \{d_{mn}^{ij}\}, i, j = 0, 2, \vec{f}_m = \begin{pmatrix} f_m^0 \\ f_m^2 \end{pmatrix}$ є відомі сталі.

Система (5.48) розв'язується методом редукції. Підстановка знайдених сталих $s_n^i, i = 0, 2, n = 0, 1, \dots$ у формули (5.13-5.14) та посліду-
юче використання у формулах (5.44-5.45) завершує побудову
розв'язку задачі. КІН обчислюються за формулами (5.20).

На рис. 5.19 представлено графік КІН K_I при $G = 61.2781955 \cdot 10^9$
Па, $\mu = 0.33$, $p(x) = 1$ Па, $p_\sigma(x) = 0$ Па, $a = 10$ м, $a_0 = a - a_1 = 1$.

Значення КІН K_I спадають до нуля при зменшенні довжини
тріщини. Порівнюючи з КІН K_I на рис. 5.3 для загального випадку,
бачимо, що відповідні значення K_I співпадають для цих двох ви-
падків. При значеннях параметрів $\gamma_0 = \gamma_1 < 15\%a$ розрахунки стають не-
стабільними, і потрібно враховувати нерухомі особливості на кін-
цях тріщини.

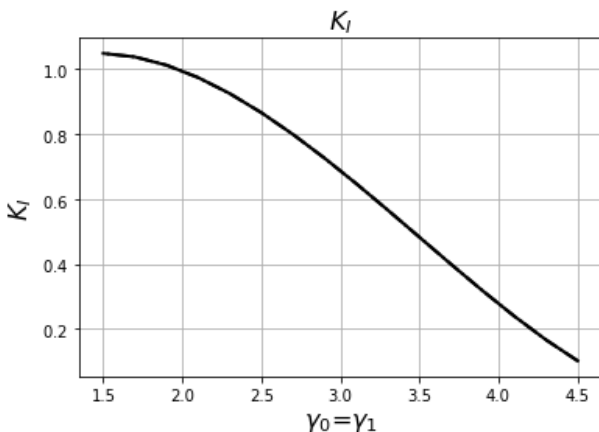


Рис. 5.19. КІН K_I при симетричній зміні довжини тріщини,

$$p(x) = 1 \text{ Па, } p_\sigma(x) = 0 \text{ Па}$$

На рис. 5.20 зображено графік КІН K_I при $p(x) = 0$ Па,
 $p_\sigma(x) = 1$ Па.

Як видно з графіків, при зменшенні довжини тріщини значення КІН K_I спадають до нуля. Значення КІН K_I співпадають з відповідними значеннями КІН K_I для загального випадку (рис. 5.5). Стабільні розрахунки отримано при значеннях параметрів $\gamma_0 = \gamma_1 \geq 5\%a$, а при $\gamma_0 = \gamma_1 < 5\%a$ потрібно враховувати нерухомі особливості на кінцях тріщини.

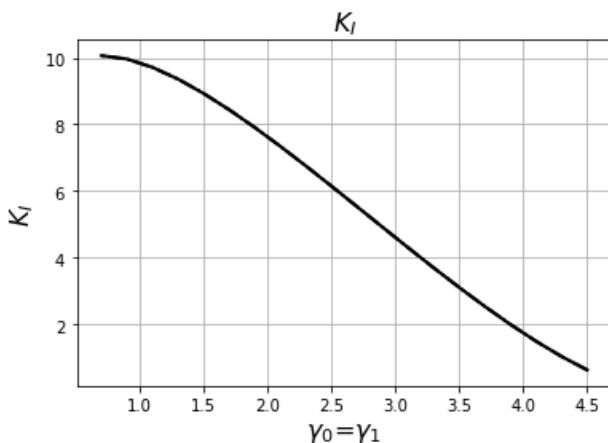


Рис. 5.20. КІН K_I при симетричній зміні довжини тріщини,
 $p(x) = 0$ Па, $p_\sigma(x) = 1$ Па

5.7. Навантаження по всьому короткому торцю у симетричній постановці (випадок 3)

Розглянемо півсмугу, що навантажено по всьому короткому торцю, а тріщина розташована далеко від бічних граней півсмуги (рис. 5.21). Розв'яжемо крайову задачу (2.4-2.6, 5.36-5.38) для пружної півсмуги з умовами (3.3) на бічних гранях.

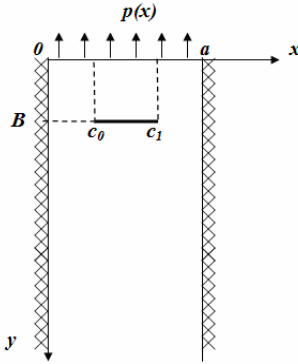


Рис. 5.21. Геометрія та координатна система півсмуги з трансверсальною тріщиною, що розташована далеко від бічних граней півсмуги, в симетричному випадку 3

Співвідношення (5.22-5.23) спрощуються:

$$u_B(x) = Y_1^{11}(x)c_1 + Y_1^{12}(x)c_2 + Y_2^{11}(x)c_3 + Y_2^{12}(x)c_4 + \\ + \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a G^{11}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a \mathfrak{Z}^{12}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi - \quad (5.49)$$

$$- \cos \beta B \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \int_{c_0}^{c_1} \frac{\partial G^{11}}{\partial \xi}(x, \xi) \psi_2(\xi) d\xi + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \cos \beta B \int_{c_0}^{c_1} G^{12}(x, \xi) \psi_2(\xi) d\xi, \\ v_B(x) = Y_1^{21}(x)c_1 + Y_1^{22}(x)c_2 + Y_2^{21}(x)c_3 + Y_2^{22}(x)c_4 + \\ + \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a G^{21}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a \mathfrak{Z}^{22}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi - \frac{\kappa-1}{\beta^2(\kappa+1)} \chi(x) - \quad (5.50)$$

$$- \cos \beta B \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \int_{c_0}^{c_1} \frac{\partial G^{21}}{\partial \xi}(x, \xi) \psi_2(\xi) d\xi + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \cos \beta B \int_{c_0}^{c_1} G^{22}(x, \xi) \psi_2(\xi) d\xi,$$

Підстановка у формули (5.49-5.50) фундаментальної матричної системи розв'язків $Y_1(x), Y_2(x), c_i, i = \overline{1,4}$ та обертання отриманих трансформант згідно з формулами (2.8) приводить до наступних виразів для функцій переміщень:

$$u(x, y) = \int_0^a \chi'(\xi) f_u(x, y, \xi) d\xi + \int_{c_0}^{c_1} \psi_2(\xi) g_{u2}(x, y, \xi) d\xi, \quad (5.51)$$

$$v(x, y) = \int_0^a \chi'(\xi) f_v(x, y, \xi) d\xi + \int_{c_0}^{c_1} \psi_2(\xi) g_{v2}(x, y, \xi) d\xi + \int_0^x \chi'(\xi) d\xi. \quad (5.52)$$

Формули (5.51)-(5.52) остаточно визначають переміщення, якщо будуть відомі функції $\chi'(x), \psi_2(x)$. Для їх знаходження необхідно задовольнити поки що невиконану умову на короткому торці (2.5) та умову на тріщині (5.46). Слабко-збіжні інтеграли у виразах для функцій переміщень просумовано за методикою, наведеною в додатку Г.

Підстановка формул переміщень в крайову умову (2.5) та в умову на тріщині (5.46) приводить до ССІР вигляду:

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 \tilde{\chi}(\xi) \left[\frac{1}{\xi - x} + \tilde{Z}(x, \xi) \right] d\xi + \tilde{K}_0(x) = \tilde{r}(x), & -1 < x < 1 \\ \left[\frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \tilde{\psi}_2(\xi) \ln \frac{1}{|\xi - x|} d\xi + \tilde{K}_2(x) \right] = \tilde{q}(x), & -1 < x < 1, \end{cases} \quad (5.53)$$

де $\tilde{\chi}(\xi) = \chi' \left(\frac{a(\xi + 1)}{2} \right), \quad \tilde{\psi}_2(\xi) = \psi_2 \left(\frac{(c_1 - c_0)\xi + (c_0 + c_1)}{2} \right),$

$$\tilde{K}_i(x) = \int_{-1}^1 \tilde{\chi}(\xi) \tilde{f}_i(\xi, x) d\xi + \int_{-1}^1 \tilde{\psi}_2(\xi) \tilde{R}_{i,2}(x, \xi) d\xi, i = 0, 2,$$

$\tilde{f}_i(\xi, x), \tilde{R}_{i,2}(x, \xi), \tilde{r}(x), \tilde{q}(x), i = 0, 1, 2$ — відомі регулярні функції при

$$a_0 \neq 0, a_1 \neq a, \quad \tilde{Z}(x, \xi) = h_1 \left(\frac{1}{\xi + x + 2} + \frac{1}{\xi + x - 2} \right) + h_2 \left(\frac{x + 1}{(\xi + x + 1)^2} + \frac{x - 1}{(\xi + x - 2)^2} \right) + h_3 \left(\frac{(x + 1)(\xi + 1)}{(\xi + x + 2)^3} + \frac{(x - 1)(\xi - 1)}{(\xi + x - 2)^3} \right).$$

Трансцендентне рівняння для визначення порядку особливості розв'язку першого рівняння у (5.53) співпадає з трансцендентним рівнянням для (2.33).

Для розв'язання ССІР (5.53) використано методику, що викладено у пункті 2.6.2. Згідно з нею невідому функцію $\tilde{\chi}(\xi)$ розвинуто в суми на кожному інтервалі (5.28). Функцію $\tilde{\psi}_2(\xi)$ розвинуто в суми за поліномами Чебишева другого роду (5.29). Сегмент $[-1;1]$ ділиться на $2N$ відрізків точками $x_i : P_{2N-1}^{\lambda_0, \lambda_0}(x_i) = 0, i = \overline{0, 2N-1}$. ССІР (5.53) розглядається при $x = x_i$.

Після підстановки виразів для невідомих функцій (5.28, 5.29) до ССІР (5.53) з урахуванням умови (2.32) отримуємо систему $4N$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих сталих $s_k^i, i = 0, 2, k = \overline{0, 2N-1}$.

$$\sum_{n=0}^{2N-1} D_{mn} \bar{S}_n = \bar{f}_m, m = \overline{0, 2N-1} \quad (5.54)$$

де $\bar{S}_m = \begin{pmatrix} s_m^0 \\ s_m^2 \end{pmatrix}$, компоненти $D_{mn} = \{d_{mn}^{ij}\}, i, j = 0, 2, \bar{f}_m = \begin{pmatrix} f_m^0 \\ f_m^2 \end{pmatrix}$ є відомими сталими.

Підстановка знайдених сталих $s_k^i, i = 0, 2, k = \overline{0, 2N-1}$ у формули (5.51-5.52) завершує побудову розв'язку задачі. КІН обчислюються за формулами (5.31).

На рис. 5.22 подано графік КІН K_I при $G = 61.2781955 \cdot 10^9$ Па, $\mu = 0.33$, $p(x) = 1$ Па, $p_\sigma(x) = 0$ Па, $a = 10$ м, $a_0 = a - a_1 = 1$.

Як видно з графіків, значення КІН K_I, K_{II} спадають до нуля при зменшенні довжини тріщини. Значення КІН K_I співпадають з відповідними значеннями КІН K_I для загального випадку (рис. 5.8). При значеннях параметрів $\gamma_0 = \gamma_1 \geq 5\%a$ отримано стабільні розрахунки, а при $\gamma_0 = \gamma_1 < 5\%a$ потрібно враховувати нерухомі особливості на кінцях тріщини.

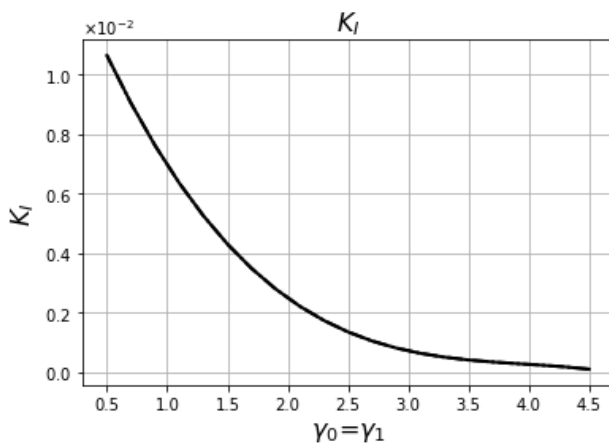


Рис. 5.22. КІН K_I при симетричній зміні довжини тріщини,
 $p(x)=1$ Па, $p_\sigma(x)=0$ Па

На рисунку 5.23 представлені графіки КІН K_I при $p(x)=0$ Па, $p_\sigma(x)=1$ Па.

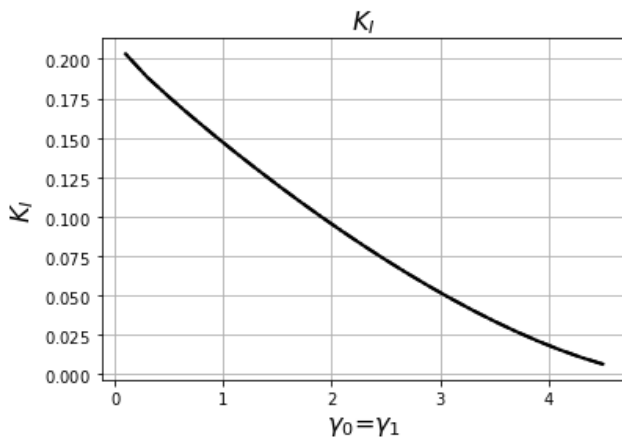


Рис. 5.23. КІН K_I при симетричній зміні довжини тріщини,
 $p(x)=0$ Па, $p_\sigma(x)=1$ Па

При зменшенні довжини тріщини значення КІН K_I спадають до нуля. Порівняння з загальним випадком (рис. 5.10) показує, що значення КІН K_I для даного випадку співпадають з відповідними значеннями КІН K_I для загального випадку. При значеннях параметрів $\gamma_0 = \gamma_1 < 1\%a$ потрібно враховувати нерухомі особливості на кінцях тріщини.

5.8. Висновки до п'ятого розділу

Отримано розв'язки плоских задач теорії пружності для півсмуги з поперечною тріщиною для трьох конфігурацій прикладеного навантаження по торцю. Встановлено відстані між кінцями тріщини та бічними гранями, при яких потрібно враховувати нерухомі особливості невідомих функцій на кінцях проміжків інтегрування.

Досліджено коефіцієнти інтенсивності напружень при трьох варіантах прикладеного навантаження. Проведено порівняльний аналіз. Найбільші КІН спостерігаються для випадку прикладення механічного навантаження по середині короткого торцю півсмуги.

Розглянуто симетричний випадок, встановлено умови його використання.

ВИСНОВКИ

В монографії досліджено мішані плоскі задачі для півнескінченної смуги під впливом навантаження різної природи, що задано по короткому торцю. Розглянуто задачу для випадку, коли смугу послаблено трансверсальною тріщиною. Отримано такі основні результати:

1. Запропоновано методику, яка, на відміну від традиційних підходів розв'язання плоскої мішаної задачі для півсмуги, дозволяє уникнути допоміжних гармонічних, бігармонічних функцій та оперувати безпосередньо з рівняннями рівноваги. Розв'язки, що отримано за методикою, є безпосереднім поданням шуканих механічних характеристик півсмуги.

2. Побудовано функцію Гріна для задач про напружений стан пружної півсмуги в білінійному поданні, що дозволяє суттєво спростити числові розрахунки. Розв'язання зведено до одного сингулярного інтегрального рівняння, що містить нерухомі особливості. З метою врахувати вплив нерухомих особливостей побудовано трансцендентне рівняння, встановлено його корені та застосовано ефективну числово-аналітичну методику для розв'язання сингулярного інтегрального рівняння.

3. Побудовано ефективний наближений розв'язок задачі про напружений стан півсмуги, що послаблена трансверсальною тріщиною. Отримано та встановлено залежність коефіцієнту інтенсивності напружень від довжини тріщини та конфігурації навантаження по короткому торцю.

Ці результати дозволили встановити такі механічні особливості розподілу переміщень та напружень у півсмугі:

- Найбільші нормальні напруження у випадку механічного навантаження спостерігаються на бічних гранях, коли навантаження прикладене на середині короткого торця.

- Встановлено вплив температурного навантаження на поле напружень півсмути та залежність величини напружень від співвідношення температурного та механічного навантажень.

- Встановлено межі застосування запропонованої методики в залежності від довжини трансверсальної тріщини для трьох конфігурацій механічного навантаження по короткому торцю, а саме: розмір тріщини має становити не більше, ніж $90\%a$. При перевищенні цих розмірів потрібно враховувати нерухомі особливості, що виникають у відповідних сингулярних рівняннях. Найбільші значення КІН спостерігаються при сконцентрованому по центру короткого торця півсмути навантаженні.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Агловян Л. А., Геворкян Р. С. О некоторых смешанных задачах теории упругости для полуполосы // Известия академии наук армянской ССР, Механика. 1970. Т. 23, № 3. С. 3-13.
2. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983.
3. Антоненко Н. Н. Задача о продольной трещине с наполнителем в полосе // Изв. Саратовского университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, № 3.
4. Борисова Е. В. Концентрация напряжений в вершине внутренней поперечной трещины в составном упругом теле // Диссертация. Ростов-на-Дону, 2015.
5. Вайсфельд Н. Д., Журавльова З. Ю. Задача незв'язної термопружності для півсмуги // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. Спецвипуск. 2015. С. 43-46.
6. Вайсфельд Н. Д., Реут В. В., Журавлёва З. Ю. Концентрация напряжений в окрестности концов поперечной трещины в полуполосе // Проблемы безопасности на транспорте. Материалы VIII международной научно-практической конференции, посвящённой году науки. Гомель, 2017. С. 171-173.
7. Вайсфельд Н. Д., Журавльова З. Ю. Плоска змішана задача теорії пружності для напівнескінченної смуги // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: зб. наук. праць. Під загальною редакцією І. О. Луковського, Г. С. Кіта, Р. М. Кушніра. Львів, 2014. С. 24-26.
8. Вайсфельд Н. Д., Журавльова З. Ю. Плоска змішана задача тер-

- мопружності для півсмуги // Математичні методи та фізико-механічні поля. 2015. 58, № 4. С. 87-98.
- [Te same: Vaisfel'd N. D., Zhuravlova Z. Yu. Two-dimensional mixed problem of thermoelasticity for a semistrip // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 228, № 2. P. 105-121. DOI: 10.1007/s10958-017-3609-8]
9. Вайсфельд Н. Д., Журавльова З. Ю. Про напружений стан півсмуги, що піддається впливу механічного та теплового навантажень // Матеріали III міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки». Київ, 2015. С. 11.
 10. Вайсфельд Н. Д., Кривий О. Ф., Журавльова З. Ю. Плоска задача теорії пружності для півсмуги з поперечною тріщиною // VII Всеукраїнська науково-практична конференція «Інформатика та системні науки» (ІСН-2016). Полтава, 2016. С. 3.
 11. Веремейчик А. И., Гарбачевский В. В., Хвисевич В. М. К решению плоских краевых задач термоупругости неоднородных тел методом потенциала // Репозиторий БНТУ. С. 184-189.
 12. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
 13. Ворович И. И., Копасенко В. В. Некоторые задачи теории упругости для полуполосы // ПММ. 1966. Т. 30, № 1. С. 128-136.
 14. Габрусев Г. Задача термopужності для трансверсально ізотропного шару з коловими лініями розділу граничних умов на його поверхні // Вісник ТНТУ. 2014. Т. 73, № 1. С. 57-67.
 15. Гоголева О. С. Примеры решения первой основной краевой задачи теории упругости в полуполосе (симметричная задача) // Вестник ОГУ. 2012. № 9(145). С. 138-142.

16. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и приведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
17. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.
18. Гусейн-Заде М. И. Об условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы // ПММ. 1965. Т. 29, № 2.
19. Денисова Т. В., Проценко В. С., Бузько Я. П. Задача стационарной теплопроводности для полуполосы с круговым отверстием // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. 2009. № 42. С. 159-163.
20. Денисова Т. В., Проценко В. С. Защемлённая по торцу упругая полуполоса с круговым отверстием или жёстким круговым включением // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. 2010. № 46.
21. Дорош Н. А., Кит Г. С. Равновесие полосы с прямолинейной поперечной трещиной под действием источников тепла // Прикладная механика. 1974. Т.10, № 11. С. 93–98.
22. Дудучава Р. В. Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики. Тбилиси: Мецниереба, 1979. 133 с.
23. Журавлёва З. Ю. Исследование напряжений возле края поперечной трещины, расположенной вблизи боковой грани упругой полуполосы // XIX Республиканская научная конференция студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях». Гомель, Беларусь, 2016. С. 82-84.
24. Журавльова З. Ю. Плоска задача теорії пружності для півсмуги з

- трансверсальною тріщиною з врахуванням нерухомої особливості по торцю півсмуги // Сучасні проблеми термомеханіки. Львів, 2016. С. 87-88.
25. Журавлёва З. Ю. Плоская смешанная задача теории упругости для полубесконечной полосы // Вісник Одеського національного університету. 2014. Т. 19, № 3 (23). С. 66-75.
 26. Журавлёва З. Ю. Смешанная задача теории упругости для полуполосы // Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях: Тезисы докладов VIII международной научной конференции для молодых учёных. Харьков, 2013. С. 80-81.
 27. Журавлёва З. Ю. Смешанная задача теории упругости для полуполосы // Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях: Тезисы докладов IX международной научной конференции для молодых учёных. Харьков, 2014. С. 29-30.
 28. Журавльова З. Ю. Урахування нерухомої особливості у плоскій задачі теорії пружності для півсмуги з поперечною тріщиною // Науково-технічна конференція «Інформатика, математика, автоматика 2016». Суми, 2016. С. 240.
 29. Замятин В. М., Махов А. В., Светашков А. А. Решение плоских задач теории упругости для полосы с помощью диагонализированной системы уравнений равновесия // Известия Томского политехнического университета. 2006. Т. 309, № 6. С. 135-139.
 30. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1983. 278 с.
 31. Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Кержаев А. П. Разрыв перемещений в полосе. Решение в тригонометрических рядах // Вес-

- тник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2(24). С.50-71.
32. Колосов Г. В. Применение комплексных диаграмм и теории функции комплексной переменной к теории упругости. Л.; М.: ОНТИ, 1935. 224 с.
 33. Колчин Г. Б., Плятт Ш. Н., Шейнкер Н. Я. Некоторые задачи термоупругости для прямоугольных областей. Штиинца, 1980. 106 с.
 34. Коляно Ю. М., Затварская Л. М. Метод продолжения функций в задаче термоупругости для полуполосы // Изв. вузов. Матем. 1987. № 8. С. 84–86.
 35. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // УМН. 1958. Т. 13, № 5. С. 3-120.
 36. Кривий О. Ф. Особливості поля напружень біля тунельної тріщини, яка виходить в площину з'єднання двох різних анізотропних півпросторів // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. 2013. Т. 3. С. 162-165.
 37. Моделювання термопружних процесів в неоднорідних анізотропних оболонках з початковими деформаціями / Р. М. Кушнір, М. М. Николишин, У. В. Жидик, В. М. Флячок // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2010. Т. 53, № 2. С. 122–136.
 38. Мелешко В. В., Токовий Ю. В. Про алгоритм Ф. П. Папковича у методі однорідних розв'язків для двовимірної бігармонічної задачі у прямокутній області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2006. Т. 49, № 4. С. 69-83.

39. Михайлов Л. Г. Интегральные уравнения с ядром, однородным степени. Душанбе: Допиш, 1966.
40. Михлин С. Г. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
41. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 256 с.
42. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
43. Николаев А. Г., Проценко В. С. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Харьков: ХАИ, 2011. 344 с.
44. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: ИЛ, 1962.
45. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 364 с.
46. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов разрезов тонких включений и подкреплений. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 344 с.
47. Попов Г. Я. Точные решения некоторых краевых задач механики деформируемого твёрдого тела. Одесса: Астропринт, 2013. 424 с.
48. Попов Г. Я., Абдыманов С. А., Ефимов В. В. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. Алматы: Изд. Рацах, 1999. 133 с.
49. Саакян А. В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью // Известия национальной академии наук Армении. 2000. 53, № 3. С. 12-19.
50. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами.

- Киев: Наукова думка, 1981. 324 с.
51. Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. Киев: Наукова думка, 1989. С. 248.
 52. Слепян Л. И. Механика трещин. – 2-е изд. перераб. и доп. Л.: Судостроение, 1990. 296 с.
 53. Солдатов А. П. К теории сингулярных интегро-функциональных операторов // Дифференц. уравн. 1977. Т. 13, № 1. С. 140-154.
 54. Степанова Л. В. Напряжения в окрестности вершины трещины поперечного сдвига в условиях плоского напряжённого состояния в идеально пластическом материале // Вестник Самарского государственного университета – Естественная серия. 2002. № 2 (24). С. 78-84.
 55. Сулим Г. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Львів: Дослід.-вид. центр НТШ, 2007. 716 с.
 56. Сучеван В. Г. Напряженное состояние упругой полуполосы с заданными краями // Математические исследования. 1976. Т. 40. С. 122-135.
 57. Трапезников Л. П. Линии влияния для нормальных напряжений в полуполосу // Изв. Всесоюз. н.-и. института гидромеханики. 1963. Т. 73.
 58. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. М.: Гостехиздат, 1948.
 59. Улітко А. Ф., Острик В. І. Міжфазна тріщина на межі розділу кругового включення і матриці // Фізико-матем. моделювання та інформ. технології. 2006. Т. 3. С. 138-149.
 60. Устинов К. Б. Ещё раз к задаче о полуплоскости, ослабленной

полубесконечной трещиной, параллельной границе // Вестник ПНИПУ. 2013. № 4.

61. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
62. Шамровский А. Д., Меркотан Г. В. Динамическая задача обобщённой термоупругости для изотропного полупространства // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2011. Т. 3, № 7 (51). С. 56-59.
63. Ямасида. Исследование напряжений в полубесконечной полосе под действием сил, приложенных к её концу // Trans. Japan. Soc. Mech. Engrs. 1954. Т. 20, № 95. С. 466.
64. Abbas I. A. Analytical-Numerical Solution of Thermoelastic Problem in a Semi-Infinite Medium under Green and Naghdi Theory // Journal of Thermoelasticity. 2013. Vol. 01, № 02. P. 19-23.
65. Abou-Dina M. S., Ghaleb A. F. On the boundary integral formulation of the plane theory of thermoelasticity (analytical aspects) // Journal of Thermal Stresses. 2002. Vol. 25. P. 1-29.
66. Akbarov S. D., Yahnioglu N., Turan A. Influence of initial stresses on stress intensity factors at crack tips in a composite strip // Mechanics of Composite Materials. 2004. Vol. 40, № 4.
67. Alexandrov V. M., Pozharskii D. A. To the problem of a crack on the elastic strip-half-plane interface // Mechanics of solids. 2001. Vol. 36, № 1. P. 70-76.
68. Antipov Y. A. Singular integral equations with two fixed singularities and applications to fractured composites // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 2015. 68(4).
69. Antipov Y. A. Singular integral equations with two fixed singularities and the Helmholtz equation in the exterior of a slice of a cone. 2014.

70. Antipov Y. A., Bardzokas D., Exadaktylos G. E. Interface edge crack in a bimaterial elastic half-plane // *Int. J. Fracture*. 1998. 88. P. 281-304.
71. Antipov Y. A., Schiavone P. Integro-differential equation of a finite crack in a strip with surface effects // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 2011. 64, P. 87-106.
72. Ballarini R., Luo H. A. Green's functions for dislocations in bonded strips and related crack problems // *International Journal of Fracture*. 1991. Vol. 50. P. 239-262.
73. Benthem J. P. A Laplace transform method for the solution of semi-infinite and finite strip problems in stress analysis // *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* 1963. Vol. 16, № 4. P. 413-429.
74. Bierman G. I. A particular class of singular integral equations // *J. Appl. Mathem.* 1971. Vol. 20, № 1. P. 99-109.
75. Bogy D. B. Solution of the plane end problem for a semi-infinite elastic strip // *J. Appl. Math. Phys.* 1975. Vol. 26. P. 749-769.
76. Bogy D. B. The plane solution for joined dissimilar elastic semistrips under tension // *Journal of Applied Mechanics*. 1974. Vol. 42, № 1. P. 93-98.
77. Bowie O. L., Freese C. E. A note on the bending of a cracked strip including crack surface interference // *Army Materials and Mechanics Research Center*. P. 457-459.
78. Bueckner H. F. On a class of singular integral equations // *J. Mathem. Anal. and Appl.* 1966. 14. P. 392-426.
79. Capobianco M. R., Criscuolo G., Junghanns P. On the numerical solution of a hypersingular integral equation with fixed singularities // *Operator Theory: Advances and Applications*. Vol. 187. P. 95-116.
80. Chai H. A note on crack trajectory in an elastic strip bounded by rigid

- bustrates // International Journal of Fracture. 1987. Vol. 32. P. 211-213.
81. Chell G. The stress intensity factors for centre and edge cracked sheels subject to an arbitraty loading // Eng. Fract. Mech. 1975. Vol. 7, № 1. P. 137-152.
 82. Chell G. C. The stress intensity factors and crack profiles for centre and edge cracks in plates subject to arbitrary stresses // Int. J. Fract. 1976. Vol. 12, № 1. P. 33-46.
 83. Chen Y.-zh. Stress analysis for an infinite strip weakned by periodic cracks // Applied Mathematics and Mechanics. 2004. Vol. 25, № 11.
 84. Chiang C. R. A local variational principle and its application to an infinite strip containing a central transverse crack // International Journal of Fracture. 1992. Vol. 57. P. R33-R36.
 85. Civelek M. B., Erdogan F. Crack problems for a rectangular plate and an infinite strip // Int. Journ. of Fracture. 1982. Vol. 19. P. 139-159.
 86. Crowdy D. G., Fokas A. S. Explicit integral solutions for the plane elastostatic semi-strip // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 2004. Vol. 460, № 2045. P. 1285-1309.
 87. Davidson S. The linear steady thermoelastic problem for a strip with a collinear array of Griffith cracks parallel to its edges // Journal of Engineering Mathematics. 1993. Vol. 27. P. 89-98.
 88. Dhaliwal R. S., Singh B. M. Two coplanar Griffith cracks in an infinitely long elastic strip // Journal of Elasticity. 1981. Vol. 11, № 3.
 89. Duduchava R., Krupnik N., Shargorodsky E. An algebra of integral operatirs with fixed singularities in kernels // Integral Equations and Operator Theory. 1999. Vol. 33, № 4. P. 406-425.
 90. Dyskin A. V., Germanovich L. N., Ustinov K. B. Asymptotic analysis of crack interaction with free boundary // International Journal of

- Solids and Structures. 2000. Vol. 37, № 6. P. 857-886.
91. Erdogan F., Arin K. A half plane and a strip an arbitrarily located crack // International Journal of Fracture. 1975. Vol. 11, № 2. P. 191-204.
 92. Erdogan F., Terada H. Wedge loading of a semi-infinite strip with an edge crack // International Journal of Fracture. 1978. Vol. 14, № 4.
 93. Fil'shtinskii L. A., Bondar A. V. Problem of coupled thermoelasticity for a half-layer with a tunnel cavity: an antisymmetric case // International Applied Mechanics. 2008. Vol. 44, № 10.
 94. Gabbasov N. S. Methods for solving an integral equation of the third kind with fixed singularities in the kernel // Differentsial'nye Uravneniya. 2009. Vol. 45, № 9. P. 1341-1348.
 95. Gabbasov N. S. New versions of the collocation method for integral equations of the third kind with singularities in the kernel // Differentsial'nye Uravneniya. 2011. Vol. 47, № 9. P. 1344-1351.
 96. Gavrilkyuk I. P., Makarov L. V. A difference method for the solution of a class of generalized boundary-value problems in a half-strip // Vichislitel'naya i Prikladnaya Matematika. 1989. № 69. P. 28-37.
 97. Gecit M. R. A cracked elastic strip bonded to a rigid support // International Journal of Fracture. 1978. Vol. 14, № 6.
 98. Gecit M. R., Turgut A. Extension of a finite strip bonded to a rigid support // Computational Mechanics. 1988. Vol. 3. P. 398-410.
 99. Goldstein R. V., Ryskov I. N., Salganik R. L. Central transverse crack in an infinite strip // Int. Journ. of Fracture Mech. 1970. Vol. 6. P. 104-105.
 100. Gomilko A. M. A Dirichlet problem for the biharmonic equation in a semi-infinite strip // Journal of Engineering Mathematics. 2003. Vol. 46. P. 253-268.

101. Gomilko A. M., Grinchenko V. T., Meleshko V. V. Method of homogeneous solutions and superposition in the mixed problem for an elastic half-strip // Soviet Appl. Mech. 1990. Vol. 26, № 2. P. 193–202.
102. Gregory R. D. The traction boundary value problem for the elastostatic semi-infinite strip, existence of solution, and completeness of the Papkovitch-Fadle eigenfunction // J. Elast. 1980. Vol. 10. P. 295–327.
103. Gregory R. D., Wan F. Y. M. Decaying states of plane strain in a semi-infinite strip and boundary conditions for plate theory // J. Elasticity. 1984. Vol. 14. P. 27–64.
104. Guz A. N., Guz I. A., Men'shikov A. V., Men'shikov V. A. Stress-intensity factors for materials with interface cracks under harmonic loading // Int Appl Mech. 2011. Vol. 46. P. 1093. URL: <https://doi.org/10.1007/s10778-011-0401-1>
105. Horvay G., Born J. Some mixed boundary-value problems of the semi-infinite strip // Journal of Applied Mechanics. 1957. Vol. 24, № 2. P. 261–268.
106. Hvozdar M., Rosa K. Stress and displacements due to a stationary point source of heat in an elastic halfspace // Studia geoph. et geod. 1980. Vol. 24.
107. Isida M. Analysis of stress intensity factors for the tension of a centrally cracked strip with stiffened edges // Eng. Fract. Mech. 1973. Vol. 5, № 3. P. 647–665.
108. Itou H., Tani A. A boundary value problem for an infinite elastic strip with a semi-infinite crack // Journal of Elasticity. 2002. Vol. 66. P. 193–206.
109. Johnson M. W., Little R. W. The semi-infinite elastic strip // Q. Appl.

- Math. 1965. Vol. 22, № 4. P. 335-344.
110. Junghanns P., Rathsfeld A. On polynomial collocation for Cauchy singular integral equations with fixed singularities // *Integral Equations and Operator Theory*. 2002. Vol. 43, № 2. P. 155-176.
 111. Kal'muk L. I., Stashchuk M. G., Pokhmurs'kii V. I. Stress-intensity coefficients around the vertices of cracks and rigid inclusions in strips with clamped or free boundaries // *Fiziko-Khimicheskaya Mekhanika Materialov*. 1990. Vol. 26, № 4. P. 65-75.
 112. Kaplunov J. D., Kossovitch L. Yu., Nolde E. V. *Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies*. London: Academic Press, 1997. 232 p.
 113. Koiter W., Alblas J. On the bending of cantilever rectangular Plates // *Proc. Koninke Nederl. Acad. wet. B*. 1954. Vol. 57, № 2.
 114. Krasnoshchekov A. A., Sobol B. V. Equilibrium of an internal transverse crack in a semiinfinite elastic body with thin coating // *Mechanics of Solids*. 2016. Vol. 51, № 1. P. 114–126. DOI 10.3103/S0025654416010118
 115. Krenk S. On the elastic strip with an internal crack // *Int. J. Solids and Struct.* 1975. Vol. 11, № 6. P. 693-708.
 116. Krenk S., Bakioglu M. Transverse cracks in a strip with reinforced surfaces // *International Journal of Fracture*. 1975. Vol. 11, № 3. P. 441-447.
 117. Krivoi A. F., Popov G. Ya., Radiollo M. V. Certain problems of an arbitrarily oriented stringer in a composite anisotropic plane // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1986. Vol. 50, № 4. P. 475-483.
 118. Kryvyi O. F. Mutual influence of an interface tunnel crack and an interface tunnel inclusion in a piecewise homogeneous anisotropic space // *Journ. of Mathematical Sciences*. 2015. Vol. 208, № 4.

- P. 409-416.
119. Lamzyuk V. D., Mossakovshii V. I., Sotnikova S. D. On stresses in a strip with a crack // *Journal of Mathematical Sciences*. 1994. Vol. 70, № 5.
 120. Lamzyuk V. D., Sotnikova S. D. A plane problem in elasticity theory for a half-strip with given normal displacement at the base // *Journal of Mathematical Sciences*. 1998. Vol. 90, № 6.
 121. Lee D.-S. The problem of internal cracks in an infinite strip having a circular hole // *Acta Mechanica*. 2004. Vol. 169. P. 101-110.
 122. Li Y.-d., Lee K. Y. Fracture analysis of a weak-discontinuous interface in a symmetrical functionally gradient composite strip loaded by anti-plane impact // *Arch. Appl. Mech.* 2008. Vol. 78. P. 855-866. DOI: 10.1007/s00419-007-0194-1
 123. Li X., Guo S. H. Effects of nonhomogeneity on dynamic stress intensity factors for an antiplane interface crack in a functionally graded material bonded to an elastic semi-strip // *Computational Materials Science*. 2006. Vol. 38(2). P. 432-441.
 124. Ling C. B., Cheng F. H. Stresses in a semi-infinite strip // *Int. J. Eng. Sci.* 1967. Vol. 5, № 2. P. 155.
 125. Liu X.-H., Erdogan F. An elastic strip with multiple cracks and applications to tapered specimens // *International Journal of Fracture*. 1985. Vol. 29. P. 59-72.
 126. Loboda V. V., Sheveleva A. E. Steady thermal contact of a half strip and a strip // *Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal*. 1987. Vol. 53, № 2. P. 302-307.
 127. Crack propagation in a functionally graded strip under the plane loading / Li Ma, Lin-Zhi Wu, Zhen-Gong Zhou, Tao Zeng // *International Journal of Fracture*. 2004. Vol. 126. P. 39–55.

128. The plane mixed problem for an elastic semi-strip under different load types at its short edge / O. Menshykov, O. Reut, V. Reut, N. Vaysfeld, Z. Zhuravlova // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2018. Vol. 144. P. 526-530. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.05.049
129. Martynyuk P. A., Polyak E. B. Equilibrium of an isolated crack in an elastic strip // *Zhurnal Prikladnoi Mekhaniki Tekhnicheskoi Fiziki*. 1978. № 4. P. 175-183.
130. Matbuliy M. S. Analysis of mode III crack perpendicular to the interface between two dissimilar strips // *Acta Mech Sin*. 2008. Vol. 24. P. 433–438. DOI 10.1007/s10409-008-0173-y
131. Melnik R. V. N. Discrete models of coupled dynamic thermoelasticity for stress-temperature formulations // Department of Mathematics and Computing, University of Southern Queensland QLD 4350, Australia. P. 1- 20.
132. Menouillard T., Belytschko T. Analysis and computations of oscillating crack propagation in a heated strip // *Int. J. Fract.* 2011. Vol. 167. P. 57-70.
133. Mirsalimov M. V. Modeling the effect of crack closure in a strip of tapered thickness under uneven heating // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2010. Vol. 39, № 4. P. 351-358.
134. Mykhaskiv V. V., Khay O. M. Interaction between rigid-disc inclusion and penny-shaped crack under elastic time-harmonic wave incidence // *Int. J. Solids Struct.* 2009. Vol. 46, № 3–4. P. 602–616.
135. 3-D dynamic interaction between a penny-shaped crack and a thin interlayer joining two elastic half-spaces / Mykhas'kiv V., Stankevych V., Zhabadynskyi I., Zhang Ch. // *International Journal of Fracture*. 2009. Vol. 159, No. 2. P. 137-149.

136. Onischuk O. V., Popov G. Ya., Farshayt P. G. The problem about bend of rectangular plate with linear pile, which goes on the fixed side by one end // *Mechanics of solids*. 1988. Vol. 6. P. 160-167.
137. Parmeter R. R., Mukherji B. Stress intensity factors for an edge-cracked strip in bending // *Int. Journ. of Fracture*. 1974. Vol. 10. P. 441-444.
138. Pickett G., Jyengar K. T. S. Stress concentrations in post-tensioned prestressed concrete beams // *J. Technol., India*. 1956. Vol. 1, № 2.
139. Plyat Sh. N., Sheinker N. Ya. Two-dimensional thermoelastic problem for a continuously accumulating half-strip // *Prikladnaya Mekhanika*. 1969. Vol. 5, № 1. P. 52-59.
140. Poberezhnyi O. V. A strip with a boundary crack under the action of a heat source // *Metematische Metody I Fiziko-Mekhanicheskie Polya*. 1992. № 36. P. 97-101.
141. Popov V. G. A dynamic contact problem which reduces to a singular integral equation with two fixed singularities // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012. Vol. 76, № 3. P. 348-357.
142. Popov V. G. Harmonic vibrations of a half-space with a surface-breaking crack under conditions of out-of-plane deformation // *Mechanics of Solids*. 2013. Vol. 48, № 2. P. 194-202.
143. Thermal-stress analysis for a strip of finite width containing a stack of edge cracks / H. Qing, W. Yang, J. Lu, D.-F. Li // *J. Eng. Math.* 2008. Vol. 61. P. 161-169.
144. Qizhi W. The crack-line stress field method for analysing SIFs of strips – illustrated with an eccentrically cracked tension strip // *International Journal of Fracture*. 1993. Vol. 59. P. R39-R43.
145. Orthogonal polynomials method and its generalization at some new problems of fracture mechanics / V. V. Reut, A. V. Fesenko, Z. Yu.

- Zhuravleva, N. D. Vaysfeld // 14th International Conference on Fracture (ICF 14). Rhodes, Greece, 2017. P. 2.
146. Reut V., Vaysfeld N., Zhuravlova Z. Elastic crack-tip stress field in a semi-strip // *Frattura ed Integrità Strutturale*. 2018. Vol. 44. P. 82-93. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.44.07
147. V. Reut, N. Vaysfel'd, Z. Zhuravlova. Investigation of the stress state of the elastic semi-strip with a transverse crack // 6th International Conference on Crack Path (CP 2018). Verona, Italy, 2018. P. 269-274.
148. Rychahivskyy A. V., Tokovyy Yu. V. Correct Analytical Solutions to the Thermo-elasticity Problems in a Semi-Plane // *Journal of Thermal Stresses*. 2008. Vol. 31, № 11. P. 1125 – 1145.
149. An odd-symmetric boundary-value problem for a semistrip with longitudinal rigidity ribs: biorthogonal sets of functions and Lagrange expansions / G. G. Sebryakov, M. D. Kovalenko, I. V. Menshova, T. D. Shulyakovskaya // *Doklady Physics*. 2016. Vol. 61, № 5. P. 247-251.
150. Seremet V. Static equilibrium of a thermoelastic half-plane: Green's functions and solutions in integrals // *Arch. Appl. Mech*. 2014. Vol. 84. P. 553-570.
151. Shevchenko A. Yu. Thermally stressed state of rigidly fastened half-strips of the same width // *Prikladnaya Mekhanika*. Vol. 13, № 9. P. 66-72.
152. Shabozov M. Sh. An approach to the investigation of optimal quadrature formulas for singular integrals with fixed singularity // *Ukrainian Mathematical Journal*. 1995. Vol. 47, № 9. P. 1479-1485.
153. Singh B. M., Dhaliwal R. S. Three coplanar Griffith cracks in an infinite elastic strip // *Journal of Elasticity*. 1982. Vol. 12, № 1. P. 127-141.

154. Tada H., Paris P. C., Irwin G. R. The stress analysis of cracks: Hand-book. Hellertown: Del Research Corp., 1973. 385 p.
155. Teodorescu P. P. Probleme plane in teoria elasticitatii vol. 1. Republicii Populare Romine: Editura Acad., 1961.
156. Thecaris P. The stress distribution in a semi-infinite strip subjected to a concentrated load // Trans. J. Appl. Mech. 1959. Vol. 26, № 3. P. 401–406.
157. Theotokoglou E. N., Tsamasphyros G. J. Integral equations for any configuration of cured cracks and holes in an elastic strip // Ingenieur-Archiv. 1987. Vol. 57. P. 3-15.
158. Tianyou F. Exact solutions of semi-infinite crack in a strip // Chinese Phys. Lett. 1990. Vol. 7, № 9. P. 402-405.
159. Tian-You F. Stress intensity factors of mode I and mode II for an infinite crack in a strip // International Journal of Fracture. 1990. Vol. 46. P. R11-R16.
160. Tokovyy Yu., Chien-Ching Ma An explicit-form solution to the plane elasticity and thermoelasticity problems for anisotropic and inhomogeneous solids // International Journal of Solids and Structured. 2009. Vol. 46. P. 3850-3859.
161. Vaysfel'd N., Kryvyi O., Zhuravlova Z. On the stress investigation at the edge of the fixed elastic semi-strip // Frattura ed Integrità Strutturale. 2016. Vol. 38. P. 1-11. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.38.01
162. Vaysfel'd N., Zhuravlova Z. On one new approach to the solving of an elasticity mixed plane problem for the semi-strip // Acta Mechanica. 2015. Vol. 226, № 12. P. 4159-4172. DOI: 10.1007/s00707-015-1452-x
163. Vaysfel'd N. D., Zhuravlova Z. Yu. On one new solving approach of the plain mixed problem for an elastic semistrip // 17-th international

- conference on theoretical and computation mechanics. Turkey, 2015. P. 125-129.
164. Vaysfel'd N. D., Zhuravlova Z. Yu. The Plain Problem of Elasticity for the Fixed Semistrip // Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics. Proceedings of the 3rd International Scientific Conference of Students and Young Scientists. Kyiv: Bukrek, 2013. P. 207-214.
 165. Vaysfel'd N. D., Zhuravlova Z. Yu. The stress concentration near a transversal crack in the elastic semi-strip // International conference on multiaxial fatigue & fracture. Sevilla, Spaine, 2016. P. 68-75.
 166. Vaysfel'd N. D., Zhuravlova Z. Yu. Two cases of the mixed boundary problem for elastic semi-strip // Journal of Bartin University Engineering and Technological Sciences. 2016. Vol. 4, № 1. P. 22-30.
 167. Vihak V. M., Yuzvyak M. Y., Yasinskij A. V. The solution of the plane thermoelasticity problem for a rectangular domain // Journal of Thermal Stresses. 1998. Vol. 21, № 5. P. 545-561.
 168. Vorovich I. I., Kopasenko V. V. Some problems in the theory of elasticity for a semi-infinite strip // PMM. 1966. Vol. 30, № 1. P. 109-115.
 169. Wu X.-F., Lilla E., Zou W.-S. A semi-infinite internal crack between two bonded dissimilar elastic strips // Archive of Applied Mechanics. 2002. Vol. 72. P. 630-636.
 170. Xia R., Guo Ya., Li W. Study on generalized thermoelastic problem of semi-infinite plate heated locally by the pulse laser // International Journal of Engineering Practical Research (IJEPR). 2014. Vol. 3, № 4. P. 95-99.
 171. Yavorskii M. S. Thermal stress state of strip-plate with heat sources //

- Prikladnaya Mekhanika. 1982. Vol. 18, № 10. P. 86-91.
172. Zhuk Y. A., Senchenkov I. K. Approximate model of thermomechanically coupled inelastic strain cycling // International Applied Mechanics. 2003. Vol. 39, № 3. P. 300–306.
 173. Zhuravlyova Z. On a stress-state of an elastic semi-strip under mechanical and thermal stresses // Researches in mathematics and mechanics. 2016. Vol. 1, № 1(1). P. 124-133.
 174. Zhuravlova Z. Stress analysis near the tips of a transverse crack in an elastic semi-strip // Appl. Math. Mech. – Engl. Ed. 2017. Vol. 38, № 7. P. 935-956. DOI: 10.1007/s10483-017-2217-6
 175. Zhuravlova Z. The plane problem for a loaded elastic semi-strip with a transversal crack // International conference of young mathematicians. Kyiv, Ukraine, 2017. P. 54.
 176. Zorski H. A semi-infinite strip with discontinuous boundary conditions // Arch. Mech. Stosowanej. 1958. Vol. 10, № 3. P. 371–397.

ДОДАТОК А

ПОКРОКОВЕ ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ ЛЯМЕ ЗА ЗМІННОЮ y

Перше рівняння у (2.4) помножимо на $\cos \beta y$ та інтегруємо за змінною y на сегменті від 0 до нескінченності. Друге рівняння в (2.4) помножимо на $\sin \beta y$ та інтегруємо за змінною y на сегменті від 0 до нескінченності. Скористаємося спаданням функцій переміщень $u(x, y)$ та $v(x, y)$ на нескінченності, а також введеною заміною $v(x, 0) = \chi(x)$, $v'(x, 0) = \chi'(x)$, $u^*(x, 0) = -\chi'(x)$.

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \cos \beta y dy + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \cos \beta y dy + \frac{2}{\kappa + 1} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \cos \beta y dy +$$

$$+ \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \int_0^{\infty} X_1(x, y) \cos \beta y dy = 0;$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \cos \beta y dy = \frac{d^2}{dx^2} \int_0^{\infty} u(x, y) \cos \beta y dy = \frac{d^2}{dx^2} u_{\beta}(x);$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \cos \beta y dy = \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cos \beta y \right]_{y=0}^{y=\infty} + \beta \int_0^{\infty} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \sin \beta y dy = \chi'(x) +$$

$$+ \beta \left[u(x, y) \sin \beta y \right]_{y=0}^{y=\infty} - \beta^2 \int_0^{\infty} u(x, y) \cos \beta y dy = \chi'(x) - \beta^2 u_{\beta}(x);$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \cos \beta y dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \cos \beta y dy =$$

$$= \frac{d}{dx} \left(\left[v(x, y) \cos \beta y \right]_{y=0}^{y=\infty} + \beta \int_0^{\infty} v(x, y) \sin \beta y dy \right) = \frac{d}{dx} (-\chi(x) + \beta v_{\beta}(x)) = -\chi'(x) + \beta v'_{\beta}(x)$$

Тоді перше рівняння у просторі трансформант прийме вигляд:

$$u_{\beta}''(x) - \frac{\beta^2(\kappa-1)}{\kappa+1}u_{\beta}(x) + \frac{2\beta}{\kappa+1}v_{\beta}'(x) = \frac{3-\kappa}{\kappa+1}\chi'(x) - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}X_{1\beta}(x).$$

Застосуємо інтегральне перетворення до другого рівняння:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) \sin \beta y dy + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) \sin \beta y dy - \frac{2}{\kappa-1} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) \sin \beta y dy + \\ + \int_0^{\infty} X_2(x, y) \sin \beta y dy = 0;$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) \sin \beta y dy = \frac{d^2}{dx^2} \int_0^{\infty} v(x, y) \sin \beta y dy = v_{\beta}''(x);$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) \sin \beta y dy = \left[\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \sin \beta y \right]_{y=0}^{y=\infty} - \beta \int_0^{\infty} \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \cos \beta y dy = \\ = -\beta \left[v(x, y) \cos \beta y \right]_{y=0}^{y=\infty} - \beta^2 \int_0^{\infty} v(x, y) \sin \beta y dy = \beta \chi(x) - \beta^2 v_{\beta}(x);$$

Тоді друге рівняння у просторі трансформант прийме вигляд:

$$v_{\beta}''(x) - \frac{\beta^2(\kappa+1)}{\kappa-1}v_{\beta}(x) - \frac{2\beta}{\kappa-1}u_{\beta}'(x) = -\frac{\beta(\kappa+1)}{\kappa-1}\chi(x) - X_{2\beta}(x).$$

Отримуємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_{\beta}(x)}{dx^2} - \frac{\beta^2(\kappa-1)}{\kappa+1}u_{\beta}(x) + \frac{2\beta}{\kappa+1} \frac{dv_{\beta}(x)}{dx} = \frac{3-\kappa}{\kappa+1}\chi'(x) - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}X_{1\beta}(x) \\ \frac{d^2 v_{\beta}(x)}{dx^2} - \frac{\beta^2(\kappa+1)}{\kappa-1}v_{\beta}(x) - \frac{2\beta}{\kappa-1} \frac{du_{\beta}(x)}{dx} = -\beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1}\chi(x) - X_{2\beta}(x) \end{cases}$$

У випадку наявності усередині півсмуги трансверсальної тріщини, інтегрування проводиться за узагальненою схемою:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \cos \beta y dy = \int_0^{B-0} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \cos \beta y dy + \int_{B+0}^\infty \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \cos \beta y dy = \\
& = \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cos \beta y \right]_{y=0}^{y=B-0} + \beta \int_0^{B-0} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \sin \beta y dy + \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cos \beta y \right]_{y=B+0}^{y=\infty} + \\
& + \beta \int_{B+0}^\infty \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \sin \beta y dy = \chi'(x) + \left\langle \frac{\partial u}{\partial y}(x, B) \right\rangle \cos \beta B + \\
& + \beta \left[u(x, y) \sin \beta y \right]_{y=0}^{y=B-0} - \beta^2 \int_0^{B-0} u(x, y) \cos \beta y dy + \\
& + \beta \left[u(x, y) \sin \beta y \right]_{y=B+0}^{y=\infty} - \beta^2 \int_{B+0}^\infty u(x, y) \cos \beta y dy = \chi'(x) - \psi'_2(x) \cos \beta B + \\
& + \beta \langle u(x, B) \rangle \sin \beta B - \beta^2 u_\beta(x) = \chi'(x) - \psi'_2(x) \cos \beta B + \beta \psi_1(x) \sin \beta B - \beta^2 u_\beta(x);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \cos \beta y dy = \frac{d}{dx} \left(\int_0^{B-0} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \cos \beta y dy + \int_{B+0}^\infty \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \cos \beta y dy \right) = \\
& = \frac{d}{dx} \left(\left[v(x, y) \cos \beta y \right]_{y=0}^{y=B-0} + \beta \int_0^{B-0} v(x, y) \sin \beta y dy + \right. \\
& \left. + \left[v(x, y) \cos \beta y \right]_{y=B+0}^{y=\infty} + \beta \int_{B+0}^\infty v(x, y) \sin \beta y dy \right) = \\
& = \frac{d}{dx} \left(-\chi(x) + \langle v(x, B) \rangle \cos \beta B + \beta v_\beta(x) \right) = -\chi'(x) + \psi'_2(x) \cos \beta B + \beta v'_\beta(x); \\
& \int_0^\infty \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \sin \beta y dy = \int_0^{B-0} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \sin \beta y dy + \int_{B+0}^\infty \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \sin \beta y dy = \\
& = \left[\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \sin \beta y \right]_{y=0}^{y=B-0} - \beta \int_0^{B-0} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \cos \beta y dy + \left[\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \sin \beta y \right]_{y=B+0}^{y=\infty} - \\
& - \beta \int_{B+0}^\infty \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \cos \beta y dy = \left\langle \frac{\partial v}{\partial y}(x, B) \right\rangle \sin \beta B - \beta \left[v(x, y) \cos \beta y \right]_{y=0}^{y=B-0} - \\
& - \beta^2 \int_0^{B-0} v(x, y) \sin \beta y dy - \beta \left[v(x, y) \cos \beta y \right]_{y=B+0}^{y=\infty} - \beta^2 \int_{B+0}^\infty v(x, y) \sin \beta y dy = \\
& = \beta \chi(x) + \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \psi'_1(x) \sin \beta B - \beta \langle v(x, B) \rangle \cos \beta B - \beta^2 v_\beta(x) = \\
& = \beta \chi(x) + \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \psi'_1(x) \sin \beta B - \beta \psi_2(x) \cos \beta B - \beta^2 v_\beta(x);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \sin \beta y dy = \frac{d}{dx} \left(\int_0^{B-0} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \sin \beta y dy + \int_{B+0}^\infty \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \sin \beta y dy \right) = \\
& = \frac{d}{dx} \left(\left[u(x, y) \sin \beta y \right]_{y=0}^{y=B-0} - \beta \int_0^{B-0} u(x, y) \cos \beta y dy + \right. \\
& \left. + \left[u(x, y) \sin \beta y \right]_{y=B+0}^{y=\infty} - \beta \int_{B+0}^\infty u(x, y) \cos \beta y dy \right) = \\
& = \frac{d}{dx} \left(\langle u(x, B) \rangle \sin \beta B - \beta u_\beta(x) \right) = \psi'_1(x) \sin \beta B - \beta u'_\beta(x).
\end{aligned}$$

В результаті система рівнянь рівноваги у просторі трансформант записується як:

$$\left\{ \begin{aligned} u''_\beta(x) - \frac{\beta^2(\kappa-1)}{\kappa+1} u_\beta(x) + \frac{2\beta}{\kappa+1} v'_\beta(x) &= \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \chi'(x) - \\ &- \beta \sin \beta B \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \psi_1(x) + \cos \beta B \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \psi'_2(x) \\ v''_\beta(x) - \frac{\beta^2(\kappa+1)}{\kappa-1} v_\beta(x) - \frac{2\beta}{\kappa-1} u'_\beta(x) &= -\beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \chi(x) - \\ &- \sin \beta B \psi'_1(x) + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \cos \beta B \psi_2(x) \end{aligned} \right.$$

ДОДАТОК Б ПІДРАХУНОК ЕЛЕМЕНТІВ МАТРИЦІ ГРІНА

За ознакою Абеля можна довести абсолютну збіжність усіх компонент матриці Гріна, так як їх асимптотичне подання має вигляд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} \sin \alpha_n z \\ \cos \alpha_n z \end{bmatrix}}{n^4}.$$

Скористаємося формулами з [16]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \frac{cha(\pi - x)}{sha\pi} - \frac{1}{2a^2}, [0 < x < 2\pi] \text{ ([16], 1.445(2))},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin kx}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{2} \frac{sha(\pi - x)}{sha\pi}, [0 < x < 2\pi] \text{ ([16], 1.445(1))},$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{(k^2 + a^2)^2} &= -\frac{1}{2a} \frac{d}{da} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2 + a^2} \right) = -\frac{1}{2a} \frac{d}{da} \left(\frac{\pi}{2a} \frac{cha(\pi - x)}{sha\pi} - \frac{1}{2a^2} \right) = \\ &= -\frac{1}{2a^4} + \frac{\pi}{4a^3 sh(\pi a)} [ch(a(\pi - x)) - a(\pi - x) sh(a(\pi - x))] + \\ &+ \frac{\pi^4}{4a^2} \frac{ch(\pi a) ch(a(\pi - x))}{(sh(\pi a))^2}, [0 < x < 2\pi]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin kx}{(k^2 + a^2)^2} &= -\frac{1}{2a} \frac{d}{da} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin kx}{k^2 + a^2} \right) = -\frac{1}{2a} \frac{d}{da} \left(\frac{\pi}{2} \frac{sha(\pi - x)}{sha\pi} \right) = \\ &= -\frac{\pi^2}{4a} \frac{sh(ax)}{(sh(a\pi))^2} + \frac{\pi x}{8a} \frac{sh(ax) + sh(a(2\pi - x))}{(sh(a\pi))^2}, [0 < x < 2\pi]. \end{aligned}$$

Враховуючи $\alpha_n = \frac{\pi n}{a}$, а також парність косинуса і непарність синуса, можна вивести наступні формули:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_n z}{\alpha_n^2 + \beta^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_n |z|}{\alpha_n^2 + \beta^2} = \frac{ach(\beta(a - |z|))}{2\beta sh(a\beta)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n z}{(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} = \operatorname{sgn}(z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n |z|}{(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} =$$

$$\frac{\operatorname{sgn}(z)}{8\beta \left(sh(2a\beta) \right)} \left[azsh(\beta(2a - |z|)) - 2a^2 sh(\beta|z|) + azsh(\beta|z|) \right],$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_n z}{(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_n |z|}{(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} = \frac{a}{4\beta^3 (ch(2a\beta) - 1)} \left[sh(\beta(2a - |z|)) + \right.$$

$$\left. + sh(\beta|z|) + \beta zch(\beta(2a - |z|)) + 2a\beta ch(\beta|z|) - \beta zch(\beta|z|) \right].$$

Використовуючи тригонометричні формули:

$$\sin x \cdot \sin y = -0.5(\cos(x + y) - \cos(x - y)),$$

$$\sin x \cdot \cos y = 0.5(\sin(x + y) + \sin(x - y)),$$

$$\cos x \cdot \cos y = 0.5(\cos(x + y) + \cos(x - y)),$$

ряди в матриці Гріна можна привести до попередніх трьох рядів.

В результаті отримано наступне покомпонентне подання для матриці-функції Гріна.

$$G_{11}(x, \xi) = \frac{\kappa ch(\beta(\xi - a + x)) - \kappa ch(\beta(a - |\xi - x|))}{2\beta sh(a\beta)(\kappa - 1)} -$$

$$- \frac{1}{2(sh(a\beta))^2(\kappa - 1)} \left[sh(a\beta) \left(\xi sh(\beta(\xi - a + x)) + x sh(\beta(\xi - a + x)) - \right. \right.$$

$$\left. - ash(\beta(\xi - a + x)) - (a - |\xi - x|) ash(\beta(a - |\xi - x|)) \right) -$$

$$\left. - ach(a\beta) \left(ch(\beta(\xi - a + x)) - ch(\beta(a - |\xi - x|)) \right) \right],$$

$$G_{12}(x, \xi) = \frac{1}{2sh(a\beta)(\kappa + 1)} \left[- \frac{ach(a\beta)}{((ch(a\beta))^2 - 1)(\kappa + 1)} \left(sh(\beta(\xi - a + x)) - \right. \right.$$

$$\left. - \operatorname{sgn}(x - \xi) sh(\beta(a - |\xi - x|)) \right) +$$

$$\left. + \left(ch(\beta(\xi - a + x))(\xi - a + x) - \operatorname{sgn}(x - \xi) ch(\beta(a - |\xi - x|))(a - |\xi - x|) \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
G_{21}(x, \xi) &= \frac{1}{2sh(a\beta)(\kappa-1)} \left[-\frac{ach(a\beta)}{\left((ch(a\beta))^2-1\right)(\kappa-1)} \left(sh(\beta(\xi-a+x)) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \operatorname{sgn}(x-\xi) sh(\beta(a-|\xi-x|)) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(ch(\beta(\xi-a+x))(\xi-a+x) + \operatorname{sgn}(x-\xi) ch(\beta(a-|\xi-x|))(a-|\xi-x|) \right) \right], \\
G_{22}(x, \xi) &= -\frac{ch(\beta(\xi-a+x)) + ch(\beta(a-|\xi-x|))}{2\beta sh(a\beta)} + \\
&\quad + \frac{1}{2\beta (sh(a\beta))^2 (\kappa+1)} \left[sh(a\beta) \left(ch(\beta(\xi-a+x)) + ch(\beta(a-|\xi-x|)) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \beta \left((a-x-\xi) sh(\beta(\xi-a+x)) - (a-|\xi-x|) sh(\beta(a-|\xi-x|)) \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + a\beta ch(a\beta) \left(ch(\beta(\xi-a+x)) + ch(\beta(a-|\xi-x|)) \right) \right) \right],
\end{aligned}$$

де $G_{i,j}(x, \xi)$ – елемент матриці Гріна, розташований у i -тій стрічці, j -тому стовбці.

ДОДАТОК В

ЗНАХОДЖЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ $c_i, i = \overline{1,4}$

Розписуючи систему (3.6) в скалярному вигляді, отримаємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\kappa(c_1 - c_3)}{2\beta(\kappa - 1)} = T_1 \\ \frac{\kappa(c_2 - c_4)}{2\beta(\kappa + 1)} = T_2 \\ \frac{c_1 e^{a\beta}(\kappa - a\beta)}{2\beta(\kappa - 1)} - \frac{ac_2 e^{a\beta}}{2(\kappa + 1)} - \frac{c_3 e^{-a\beta}(a\beta + \kappa)}{2\beta(\kappa - 1)} + \frac{ac_4 e^{-a\beta}}{2(\kappa + 1)} = T_3 \\ \frac{ac_1 e^{a\beta}}{2(\kappa - 1)} + \frac{c_2 e^{a\beta}(a\beta + \kappa)}{2\beta(\kappa + 1)} - \frac{ac_3 e^{-a\beta}}{2(\kappa - 1)} + \frac{c_4 e^{-a\beta}(\kappa - a\beta)}{2\beta(\kappa + 1)} = T_4 \end{array} \right. \quad (B.1)$$

де $T_1 = -u_\beta^1(0), T_2 = -v_\beta^1(0), T_3 = -u_\beta^1(a), T_4 = -v_\beta^1(a)$.

Так як визначник системи (B.1) відмінний від нуля, то розв'язки $Y_1(x)$ і $Y_2(x)$ лінійно незалежні.

Розв'язок системи (B.1) визначається однозначно та має вигляд:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\beta(\kappa - 1)}{\kappa[\kappa^2(ch(2a\beta) - 1) - 2a^2\beta^2]} \left\{ T_1[\kappa^2(e^{-2a\beta} - 1) - 2a\beta(a\beta + \kappa)] + 2a^2\beta^2 T_2 + \right. \\ &\quad \left. + 2\kappa T_3[\kappa sh(a\beta) + a\beta ch(a\beta)] + 2a\beta\kappa T_4 sh(a\beta) \right\}, \\ c_2 &= -\frac{\beta(\kappa + 1)}{\kappa[\kappa^2(ch(2a\beta) - 1) - 2a^2\beta^2]} \left\{ -2a^2\beta^2 T_1 + T_2[\kappa^2(1 - e^{-2a\beta}) + 2a\beta(a\beta - \kappa)] + \right. \\ &\quad \left. + 2a\beta\kappa T_3 sh(a\beta) + 2\kappa T_4[-\kappa sh(a\beta) + a\beta ch(a\beta)] \right\}, \\ c_3 &= \frac{\beta(\kappa - 1)}{\kappa[\kappa^2(ch(2a\beta) - 1) - 2a^2\beta^2]} \left\{ T_1[\kappa^2(1 - e^{-2a\beta}) + 2a\beta(a\beta - \kappa)] + 2a^2\beta^2 T_2 + \right. \\ &\quad \left. + 2\kappa T_3[\kappa sh(a\beta) + a\beta ch(a\beta)] + 2a\beta\kappa T_4 sh(a\beta) \right\}, \\ c_4 &= \frac{\beta(\kappa + 1)}{\kappa[\kappa^2(ch(2a\beta) - 1) - 2a^2\beta^2]} \left\{ 2a^2\beta^2 T_1 + T_2[\kappa^2(1 - e^{-2a\beta}) + 2a\beta(a\beta + \kappa)] - \right. \\ &\quad \left. - 2a\beta\kappa T_3 sh(a\beta) - 2\kappa T_4[-\kappa sh(a\beta) + a\beta ch(a\beta)] \right\}. \end{aligned} \quad (B.2)$$

ДОДАТОК Г ПІДСУМОВУВАННЯ СЛАБКО-ЗБІЖНИХ ЧАСТИН ІНТЕГРАЛІВ

Розглянемо інтеграл $\int_0^{\infty} a(x)dx$, що є слабко-збіжним. Для відокремлення його слабко-збіжної частини використовується наступна методика, а саме: інтеграл $\int_0^{\infty} a(x)dx$ розбивається на два доданки $\int_0^{\infty} a(x)dx = \int_0^A a(x)dx + \int_A^{\infty} a(x)dx$. В другому отриманому інтегралі підінтегральна функція замінюється своїм асимптотичним зображенням при $x \rightarrow \infty$, після чого додається та віднімається доданок $\int_0^A \tilde{a}(x)dx$, де $\tilde{a}(x)$ є асимптотичне зображення підінтегральної функції $a(x)$. Отже,

$$\int_0^{\infty} a(x)dx = \int_0^{\infty} \tilde{a}(x)dx + \left(\int_0^A a(x)dx - \int_0^A \tilde{a}(x)dx \right), \quad A \rightarrow \infty \quad (\text{Г.1})$$

Невласний інтеграл, що входить у це подання можна підсумувати за допомогою наступних формул [16]:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\beta x} \sin bx dx = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \beta^n} \left(\frac{b}{b^2 + \beta^2} \right) [\operatorname{Re} \beta > 0, b > 0], \quad ([16], 3.944(11))$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\beta x} \cos bx dx = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \beta^n} \left(\frac{\beta}{b^2 + \beta^2} \right) [\operatorname{Re} \beta > 0, b > 0], \quad ([16], 3.944(12))$$

$$\int_0^{\infty} e^{-px} \sin qx \frac{dx}{x} = \operatorname{arctg} \frac{q}{p} [p > 0], \quad ([16], 3.941(1))$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta x} \cos bx dx = \frac{\beta}{b^2 + \beta^2},$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-\beta x} \cos b x d x = \frac{\beta^2 - b^2}{(b^2 + \beta^2)^2},$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-\beta x} \cos b x d x = \frac{2 \beta (\beta^2 - 3 b^2)}{(b^2 + \beta^2)^3},$$

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-\beta x} \cos b x d x = \frac{6 (\beta^4 - 6 b^2 \beta^2 + b^4)}{(b^2 + \beta^2)^4};$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta x} \sin b x d x = \frac{b}{b^2 + \beta^2},$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-\beta x} \sin b x d x = \frac{2 b \beta}{(b^2 + \beta^2)^2},$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-\beta x} \sin b x d x = \frac{2 b (3 \beta^2 - b^2)}{(b^2 + \beta^2)^3},$$

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-\beta x} \sin b x d x = \frac{24 b \beta (\beta^2 - b^2)}{(b^2 + \beta^2)^4};$$

$$\int_0^{\infty} (e^{-\beta x} - e^{-\gamma x} \cos a x) \frac{d x}{x} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{a^2 + \gamma^2}{\beta^2} \right), [\operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \gamma > 0], \quad ([16],$$

3.951(8))

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu x} - e^{-\nu x}}{x} d x = \ln \frac{\nu}{\mu}, [\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > 0], ([16], 3.434(2))$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin (a x)}{x} d x = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a . ([16], 3.721(1))$$

АНОТАЦІЯ

Розглянуто плоску мішану задачу теорії пружності для півнескінченної смуги, що знаходиться під впливом навантаження різної природи. За допомогою застосування інтегрального півнескінченного \sin -, \cos -перетворення Фур'є вихідну задачу зведено до одновимірної векторної крайової задачі. Задачу в просторі трансформант переформульовано у вигляді векторної крайової задачі. Розв'язок цієї задачі було побудовано у вигляді суперпозиції загального розв'язку однорідного векторного рівняння та часткового розв'язку неоднорідного рівняння. Розв'язок однорідного векторного рівняння побудовано за допомогою апарату матричного диференціального числення та подано через фундаментальну матричну систему розв'язків відповідного однорідного матричного рівняння. Для отримання часткового розв'язку неоднорідного векторного рівняння було відшукано матрицю-функцію Гріна за допомогою методу матричних інтегральних перетворень. Матрицю-функцію Гріна було побудовано у формі білінійного розвинення, що спрощує подальші обчислення. Після застосування оберненого перетворення Фур'є до явного розв'язку одновимірної крайової задачі в просторі трансформант та підсумовування слабо-збіжних інтегралів у формулах для переміщень залишається лише одна невідома функція переміщень по короткому торцю півнескінченної смуги. Для її знаходження було отримано сингулярне інтегральне рівняння. Сингулярне інтегральне рівняння було розв'язано відповідно до конфігурації нормального навантаження. Коли в ядрі сингулярного інтегрального рівняння не було нерухомих особливостей, було застосовано метод ортогональних поліномів, що дозволяє врахувати дійсний порядок особливості невідомої функції на кінцях проміжку інтегрування. У випадку наявності однієї чи двох нерухомих особливостей в ядрі сингулярного інтегрального рівняння було побудовано трансцендентне рівняння та знайдено його корені. Для розв'язання

сингулярного інтегрального рівняння було використано спеціальний узагальнений метод.

Точний розв'язок задачі стаціонарної теплопровідності для півнескінченної смуги було отримано за допомогою перетворень Фур'є. Цей розв'язок було використано для розв'язання задачі незв'язної термопружності для півсмуги. Такі самі конфігурації нормального навантаження по короткому торцю півсмуги було розглянуто для задачі термопружності. Проведено дослідження напруженого стану півсмуги в усіх цих випадках.

Розглянуто задачу, коли усередині півсмуги розташовано трансверсальну тріщину. У даному випадку вихідну задачу зведено до одновимірної крайової задачі за допомогою інтегрального перетворення Фур'є, що було застосовано за узагальненою схемою. Розв'язання задачі було зведено до розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь відносно однієї невідомої функції переміщень по короткому торцю півсмуги та двох стрибків функцій переміщень на трансверсальній тріщині. В залежності від конфігурації прикладеного навантаження перше рівняння цієї системи може містити нерухомі особливості. Тому метод ортогональних поліномів та узагальнений метод було застосовано до розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь в залежності від конфігурації прикладеного навантаження по короткому торцю півсмуги. Також було розглянуто симетричний випадок розташування трансверсальної тріщини та прикладення механічного навантаження по короткому торцю півсмуги. У цьому випадку один зі стрибків функцій переміщень на тріщині дорівнює нулю. Задачу було зведено до розв'язання системи двох сингулярних інтегральних рівнянь. Коефіцієнти інтенсивності напружень було обчислено для усіх випадків в залежності від довжини трансверсальної тріщини.

Ключові слова: півсмуга, перетворення Фур'є, матриця-функція Гріна, сингулярне інтегральне рівняння, метод ортогональних поліномів, нерухомі особливості, незв'язна термопружність, трансверсальна тріщина.

ABSTRACT

The plane mixed problem of elasticity for the semi-infinite strip was considered under the load of a different nature at the short semi-strip's edge. The initial problem was reduced to the one-dimensional problem with the help of the integral semi-infinite sin-, cos- Fourier transform. The problem in transformation domain was reformulated as vector boundary-value problem. Its solution was constructed as a superposition of the general solution for the homogeneous vector equation and the partial solution for the inhomogeneous one. The solution for the homogeneous vector equation was constructed with the help of the matrix differential calculation and it was given through the fundamental matrix system for the corresponding homogeneous matrix equation. To obtain the partial solution for the inhomogeneous vector equation the Green's matrix-function was derived by the use of the matrix integral transform. The Green's matrix-function was constructed in the form of the bilinear expansion, which simplified further calculations. After applying of the inverse transform to the exact solution of the one-dimensional problem in transformations domain, and summation of the weakly convergent integrals the formulae for the displacements contained only one unknown function of the displacements by the semi-infinite strip's short edge. The singular integral equation was obtained for its finding. The singular integral equation was solved with regard of the normal load's configuration. The orthogonal polynomials method was applied when there were no fixed singularities in the kernel of the singular integral equation. This method allowed considering the real order of the unknown function at the integration segment's ends. The transcendental equation was constructed in the case of singular integral equation with one or two fixed singularities. The transcendental equation's roots were found. The special generalized method was used for the solving of the singular integral equation.

The exact solution of the stationary thermal conductivity problem was derived with the help of the Fourier transform. It was used in the solving of

the uncoupled thermoelasticity problem for the semi-strip. The same configurations of the normal stress at the short edge of the semi-strip were considered for the thermoelasticity problem. The investigation of the semi-strip's stress state was provided for all these cases.

The problem when a transverse crack was located inside the semi-strip was considered. In this case the initial problem was reduced to the one-dimensional problem with the help of the semi-infinite Fourier transform, which was applied by the generalized scheme. The solving of the problem was reduced to the solving of the system of three singular integral equations with respect to one unknown displacement function at the semi-strip's edge and two displacement jumps at the transverse crack. With regard to the configuration of the mechanical load the first equation in this system could contain fixed singularities. So, the orthogonal polynomials method or the special generalized method was applied for the solving of the singular integral equations. In the case of symmetric location of the crack and symmetric mechanical load the simplified case was considered when one of the displacements' jumps equaled zero. In this case the solving of the problem was reduced to the solving of the system of two singular integral equations. Stress intensity factors were calculated for all these cases in regard of the transverse crack's length.

Key words: semi-strip, Fourier transform, Green's matrix-function, singular integral equation, orthogonal polynomials method, fixed singularities, uncoupled thermoelasticity, transverse crack.

Наукове видання

**ВАЙСФЕЛЬД Наталія Данилівна,
ЖУРАВЛЬОВА Зінаїда Юріївна
РЕУТ Віктор Всеволодович**

**ПЛОСКІ МІШАНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ
ДЛЯ ПІВНЕСКІНЧЕНОЇ СМУГИ**

Монографія

В авторській редакції

Підп. до друку 10.10.2019 р. Формат 60х84/16.
Ум.-друк. арк. 9,30. Тираж 100 прим.
Зам. № 1923.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Свідощтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.
Україна, 65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12
Тел.: (048) 723 28 39.
E-mail: druk@onu.edu.ua