

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА

Н. Д. Вайсфельд, В. В. Реут

Рівняння математичної фізики

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
для студентів спеціальності «Прикладна математика»

ОДЕСА
ОНУ
2018

УДК 539.3:517.4

Рекомендовано до друку Науково-методичною радою
Інституту математики ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 2 від 31.10.2017 р.

Рецензенти:

Я. О. Жук, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка;

В. Г. Попов, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики національного університету «Одеська морська академія»;

В. Є. Євтухов, доктор фізико-математичних, професор, завідувач кафедри диференціальних рівнянь Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

Вайсфельд Н. Д.

Рівняння математичної фізики : навч.-метод. посібн. для студ. спец. «Прикладна математика» / Н. Д. Вайсфельд, В. В. Реут. – Одеса : Одеськ. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2018. – 194 с.

ISBN 978-617-689-275-5

У посібнику викладено матеріал курсу «Рівняння математичної фізики», що протягом більш ніж 30 років викладається на механіко-математичному факультеті ОНУ імені І. І. Мечникова. Структура та зміст цього курсу була розроблена та запропонована першим завідувачем кафедри методів математичної фізики професором Г. Я. Поповим. Основну увагу приділено характеристиці та методам розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку.

Для студентів 3 курсу спеціальності «Прикладна математика», а також для студентів технічних спеціальностей.

УДК 539.3:517.4

ISBN 978-617-689-275-5

© Вайсфельд Н. Д., Реут В. В., 2018

© Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2018

ЗМІСТ

ВСТУП. Предмет курсу математичної фізики	6
I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ.....	8
1. Класифікація рівнянь в частинних похідних	8
2. Зведення до канонічного вигляду рівнянь математичної фізики. Класифікація рівнянь математичної фізики.....	9
3. Виведення рівняння теплопровідності.....	13
4. Виведення рівняння коливань струни.....	16
5. Коректність задачі математичної фізики. Класифікація задач математичної фізики	18
II. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ.....	21
1. Метод відокремлення змінних (метод Фур'є).....	21
1.1. Загальна схема метода Фур'є (на прикладі початково- крайової задачі теплопровідності).....	21
1.2. Постановка крайової задачі Штурма – Ліувілля.....	22
1.3. Властивості власних значень та власних функцій задачі Штурма – Ліувілля	22
2. Метод інтегральних перетворень	24
2.1. Загальна схема метода	25
2.2. Інтеграл Фур'є, повне перетворення Фур'є, \cos - та \sin -перетворення Фур'є.	27
2.3. Інтегральні перетворення Лапласа та Мелліна.....	32
3. Функція Гріна одновимірних крайових задач.....	35
3.1. Визначення функції Гріна. Неособливі крайові умови задачі математичної фізики	35
3.2. Теорема про єдність існування функції Гріна	38
3.3. Теорема про чотири визначальні властивості функції Гріна	39
3.4. Теорема про існування функції Гріна. Перший спосіб побудови	42

3.5. Самоспряжені крайові задачі та їх зв'язки з задачею Штурма-Ліувилля	44
3.6. Теорема про симетричність функції Гріна самоспряженої крайової задачі	45
3.7. Зведення задачі Штурма-Ліувилля до інтегрального рівняння	47
3.8. Теорема Стеклова	52
3.9. Виведення формули обернення для інтегрального перетворення на скінченному проміжку	54
ІІІ. РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ З ЕЛЕМЕНТАМИ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛІВ.....	56
1. Побудова фундаментальної функції рівняння Лапласа. Її фізичний сенс	56
2. Об'ємні та поверхневі потенціали	60
3. Діполі та потенціал подвійного шару	61
4. Основна властивість потенціалів.....	63
5. Формула Гріна. Теорема про нормальну похідну гармонічної функції.....	64
6. Інтегральне зображення гармонічної функції.....	66
7. Принцип максимуму для гармонічної функції	68
8. Основні крайові гармонічні задачі	70
9. Властивості поверхневих потенціалів. Поверхні Ляпунова.....	72
10. Інтеграл Гауса	74
11. Розривні властивості потенціалу подвійного шару.....	76
12. Зведення задачі Діріхле до інтегрального рівняння. Доведення існування його розв'язку	79
ІV. РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ	83
1. Постановка початково-крайової задачі.....	83
2. Принцип максимуму	84
3. Теореми єдності та стійкості розв'язку початково крайової задачі	86
4. Задача Коші.....	87

5. Побудова фундаментального розв'язку рівняння теплопровідності.....	89
6. Стійкість задачі Коші.....	93
7. Парадокс теорії теплопровідності	94
V. РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ.....	95
1. Задача Коші для рівняння коливань струни.....	95
3. Формули Кірхгофа. Принцип Гюйгенса	103
VI. СПЕЦІАЛЬНІ ФУНКЦІЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ.....	106
6.1. Бета- та гама-функція Ейлера	106
6.2. Гіпергеометрична функція Гауса	111
6.3. Функція Лежандра.....	113
6.4. Вироджена гіпергеометрична функція	117
6.5. Циліндричні функції	119
6.6. Асимптотика циліндричних функцій.....	126
6.7. Інтегральне перетворення Ханкеля	128
6.8. Модифіковані функції Беселя	129
6.9. Шляхи узагальнення спеціальних функцій	130
6.10. Приклади задач математичної фізики, що приводять до використання спеціальних функцій	131
 ДОДАТОК А. Зведення рівнянь до каноничного вигляду .	137
ДОДАТОК Б. Приклади застосування методу відокремлення змінних.....	143
ДОДАТОК В. Розв'язування крайових задач математичної фізики за методом інтегральних перетворень	165
ДОДАТОК Г. Матриця Гріна одновимірних крайових задач	180
 СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	192

ВСТУП

Предмет курсу математичної фізики

Досить часто у студентів, які вперше зустрічаються з математичною фізикою, виникає уявлення, що цей предмет є розділом фізики. Насправді це не так. Математична фізика – це розділ математики, який досліджує точні та наближені розв’язки диференціальних рівнянь у частинних похідних. Такі рівняння описують різні фізичні процеси: явища гідродинаміки, теорії пружності, електродинаміки та інше. Але все це не обмежується фізичними явищами. Будь-який процес, що залежить від декількох параметрів, який змінюється в залежності від швидкості зміни цих параметрів, потрібно описувати рівняннями у частинних похідних. Отже, сьогодні рівняння у частинних похідних є необхідною складовою моделювання різноманітних процесів у самих різних галузях людської діяльності: фінансові задачі, задачі біології, геології, соціології та інше. Математичне моделювання практично всіх прикладних задач неможливе без апарату крайових задач математичної фізики. Саме тому цей курс викладається студентам відділення «Прикладна математика».

Аудиторія слухачів вимагала спеціальної структури цього курсу, яку було розроблено проф., д. ф.-мат. н. Г. Я. Поповим.

Викладання матеріалу починається з класифікації рівнянь математичної фізики. Після чого акцентування уваги читачів направлено на рівняння в частинних похідних другого порядку, що є найчастіше застосованими під час моделювання багатьох явищ. Далі наведено матеріал щодо методів розв’язання крайових задач у частинних похідних. Пояснення супроводжується багатьма прикладами. Окремий розділ складає матеріал, що присвячено властивостям функції Гріна, наведено та доведено основні теореми, приведено основні методи побудови функції Гріна одномірних крайових задач.

Увагу читачів далі зосереджено на спеціальних функціях математичної фізики, подано основні зображення та доведено властивості як самих функцій, так і їх похідних. Своє місце має в курсі і теорія потенціалу. Місцем еліптичних рівнянь у багатьох дослідженнях пояснюється те, що цей розділ є найбільшим розділом

курсу. Також окремо викладено властивості рівнянь параболічного та гіперболічного типів.

Таким чином, структура посібника відповідає повністю структурі та змісту навчального курсу «Рівняння математичної фізики», що викладається студентам – бакалаврам спеціальності «Прикладна математика» Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Перший розділ посібника присвячено класифікації рівнянь математичної фізики, виведенню таких важливих рівнянь, як рівняння теплопровідності та рівняння коливання струни, а також класифікації задач математичної фізики.

1. Класифікація рівнянь в частинних похідних

Класифікація рівнянь другого порядку проводитиметься на основі аналізу характеристичної частини рівняння. Отже, спочатку нагадаємо основні означення теорії диференціальних рівнянь частинними похідними.

Означення 1

Співвідношення, що зв'язує незалежні змінні, шукану функцію та її частинні похідні, називають рівнянням у частинних похідних:

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial^{k+l} u}{\partial x_j^k \partial x_i^l}\right) = 0, \quad i, j = \overline{1, n}, k+l=m. \quad (1.1)$$

Тут функція u така, що задана на просторі $R^n, x \in R^n$, та діє таким чином:

$u: R^n \Rightarrow R$; $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ – частинна похідна, що визначається за формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(a) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{u(a_1, \dots, a_i + \Delta x_i, \dots, a_n) - u(a_1, \dots, a_n)}{\Delta x_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Означення 2

Порядок старшої похідної m , що входить у диференціальне рівняння з частинними похідними (1.1), називають порядком рівняння.

Всі фізичні процеси можна описати рівняннями в частинних похідних вигляду (1.1). Але переважна більшість процесів описується диференціальними рівняннями другого порядку, які мають вигляд:

$$F\left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x}, u, x\right) = 0, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.2)$$

Означення 3

Якщо коефіцієнти при частинних похідних другого порядку є функціями незалежних змінних x_1, x_2, \dots, x_n та функцій $u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, i = \overline{1, n}$, то таке рівняння називають квазілінійним рівнянням:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} A_{ji}(x) + F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.3)$$

Означення 4

Якщо коефіцієнти при частинних похідних другого порядку є функціями тільки незалежних змінних x_1, x_2, \dots, x_n , то такі рівняння називають лінійними відносно старших похідних.

Не обмежуючи міркування, в наступному загальний вигляд лінійного диференціального рівняння другого порядку будемо записувати у формі:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n A_{ji}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{j=1}^n B_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + C(x)u(x) + G(x) = 0, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.4)$$

2. Зведення до канонічного вигляду рівнянь математичної фізики. Класифікація рівнянь математичної фізики

Нехай маємо диференціальне рівняння у частинних похідних другого порядку:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k} + F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0, \quad (1.5)$$

де $u = u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$. Перший доданок у лівій частині рівності (1.5) визначає тип рівняння та відповідний метод його розв'язання. Його будемо називати характеристичною частиною рівняння та у подальшому визначати як

$$\Omega(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}. \quad (1.6)$$

Зробимо заміну змінних:

$$x_m = \sum_{l=1}^n a_{ml} y_l, \quad m=1, 2, \dots, n,$$

де матриця коефіцієнтів $\|a_{ml}\| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ є невиродженою,

тобто $\det \|a_{ml}\| \neq 0$. Для неї завжди існує обернена матриця, за допомогою елементів якої нові змінні виражаються через старі:

$$y_m = \sum_{l=1}^n b_{ml} x_l, \quad m=1, 2, \dots, n. \quad (1.7)$$

(тут і далі будемо опускати знак сумування – $y_m = b_{ml} x_l$).

З урахуванням заміни змінних (1.7) нову невідому функцію запишемо як $\tilde{u}(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Вона має задовольняти рівняння (1.5).

Запишемо похідні через нові змінні:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial \tilde{u}(y)}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}(y)}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial \tilde{u}(y)}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{u}(y)}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \quad (1.8)$$

Враховуючи, що $y_l = \sum_{i=1}^n b_{li} x_i$, отримаємо $\frac{\partial y_l}{\partial x_j} = b_{lj}$; тоді:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{u}(y)}{\partial y_l} b_{lj} = \frac{\partial \tilde{u}(y)}{\partial y_l} b_{lj}. \quad (1.9)$$

Остання рівність записана з урахуванням того, що знак сумування опущено.

Звідки друга похідна має подання:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) \frac{\partial y_2}{\partial x_k} + \dots + \\ &+ \dots + \frac{\partial}{\partial y_n} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) \frac{\partial y_n}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial \tilde{u}(y)}{\partial y_l} b_{lj} \right) \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{\partial \tilde{u}(y)}{\partial y_l} b_{lj} \right) \frac{\partial y_2}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial}{\partial y_n} \left(\frac{\partial \tilde{u}(y)}{\partial y_l} b_{lj} \right) \frac{\partial y_n}{\partial x_k} = \\
& = \sum_{m=1}^n \frac{\partial}{\partial y_m} \left(\frac{\partial \tilde{u}(y)}{\partial y_l} b_{lj} \right) \frac{\partial y_m}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \tilde{u}(y)}{\partial y_m \partial y_l} b_{lj} \frac{\partial y_m}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

Позначимо $\frac{\partial y_m}{\partial x_k}$ як b_{mk} , тоді друга похідна буде записана в наступній формі:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 \tilde{u}(y)}{\partial y_m \partial y_l} b_{lj} b_{mk}. \quad (1.10)$$

Отже, характеристична частина рівняння:

$$\Omega(x) = \tilde{\Omega}(y) = A_{jk} \frac{\partial^2 \tilde{u}(y)}{\partial y_m \partial y_l} b_{lj} b_{mk} = \tilde{A}_{lm} \frac{\partial^2 \tilde{u}(y)}{\partial y_m \partial y_l},$$

або якщо детально:

$$\tilde{\Omega}(y) = \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \tilde{A}_{lm} \frac{\partial^2 \tilde{u}(y)}{\partial y_m \partial y_l}, \text{ де } \tilde{A}_{lm} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk} b_{lj} b_{mk}, \quad l, m=1, 2, \dots, n.$$

Можна перевірити, що формули перетворення

$$\tilde{A}_{lm} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk} b_{lj} b_{mk}, \quad l, m=1, 2, \dots, n$$

коефіцієнтів при других похідних функції u під час заміни незалежних змінних відповідно до формул (1.7) збігаються з формулами перетворення коефіцієнтів квадратичної форми:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk} t_j t_k, \quad (1.11)$$

якщо провести в ній лінійне перетворення:

$$t_j = \sum_{l=1}^n C_{lj} \tau_l, \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

то отримаємо вираз:

$$\sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \tilde{A}_{lm} \tau_l \tau_m.$$

У курсі алгебри доведено, що завжди можна підібрати коефіцієнт C_{lj} таким чином, щоб квадратична форма (1.11) була приведена до суми квадратів, тобто:

$$\sum_{m=1}^n \lambda_m \tau_m^2,$$

Інакше кажучи, $\tilde{A}_{lm}=0$, якщо $l \neq m$ та $\tilde{A}_{mm}=\lambda_m$. Коефіцієнти λ_m або дорівнюватиме ± 1 , або нулю відповідно.

Отже, характеристичну частину рівняння зобразимо у вигляді:

$$\tilde{\Omega}(y) = \sum_{m=1}^n \lambda_m \frac{\partial^2 \tilde{u}(y)}{\partial y_m^2}. \quad (1.12)$$

Фактично, вище неявно сформульовано та доведено теорему.

Теорема

Будь-яке квазілінійне рівняння завжди можна привести до канонічного вигляду за рахунок введення нової системи координат, яка отримана зі старої шляхом невиворонених перетворень.

Рішення з характеристичною частиною, що зображується поданням (1.12), називається канонічним.

На основі зображення (1.12) проводиться класифікація рівнянь математичної фізики:

- 1) якщо всі коефіцієнти λ_m однакового знаку, то вихідне рівняння є рівнянням еліптичного типу;
- 2) якщо існує хоч один коефіцієнт λ_j , який має знак, протилежний до решти інших, то вихідне рівняння є рівнянням гіперболічного типу;
- 3) якщо хоч один з коефіцієнтів буде дорівнювати нулю $\lambda_j=0$, то вихідне рівняння є рівнянням параболічного типу.

У випадку, коли n дорівнює 2, у виразі (1.11) характеристична частина записується так:

$$\Omega(x) = A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + A_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + A_{21} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + A_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}. \quad (1.13)$$

Зробимо заміну $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = t_1^2, \frac{\partial u}{\partial x_1} = t_1, \frac{\partial u}{\partial x_2} = t_2, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = t_2^2$. Тоді (1.13) є рівнянням кривої другого порядку:

$$\Omega(t) = A_{11} t_1^2 + A_{12} t_1 t_2 + A_{21} t_2 t_1 + A_{22} t_2^2.$$

Якщо зробити заміну змінних таку, щоби зникли мішані похідні, наприклад, $t_1=b_{11}\tau_1+b_{12}\tau_2$, то отримаємо квадратичну форму канонічного вигляду:

$$\Omega(t)=\alpha_1\tau_1^2+\alpha_2\tau_2^2$$

Як відомо з курсу алгебри, з цього випливають рівняння еліпса, гіперболи та параболи, які мають вигляд, відповідний до наступних:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, x^2=2by.$$

У випадку, коли $n=3$, рівняння (1.5) перетворюється на рівняння Лапласа та записується у вигляді:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=0.$$

Воно є рівнянням еліптичного типу.

Хвильове рівняння:

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

відноситься до рівнянь гіперболічного типу. А рівняння теплопровідності $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$ – до рівнянь параболічного типу.

Отже, отримано основні класичні рівняння математичної фізики.

3. Виведення рівняння теплопровідності

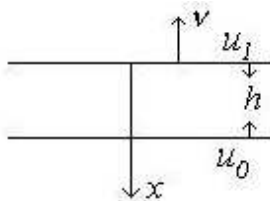


Рис. 1

Позначимо температуру середовища в будь-якій точці середовища, як $u(x)=u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$; у випадку тривимірного середовища це буде функція $u(x_1, x_2, x_3, t)$. Як

відомо, температура завжди переходить з більш

нагрітої у менш нагріту область простору. Нехай q_x – це тепловий потік, що тече з однієї частини шару товщиною h в іншу в напрямку нормалі (див. рис. 1). Будемо вважати, що один край має температуру u_0 , а інший – $u_1, u_0 > u_1$. Розглянемо частину поверхні цього шару, де виділимо циліндр площиною S , з'ясуємо, яка кількість тепла прямує

через такий циліндр, об'єм якого дорівнює $V=Sh$. Позначимо цю шукану кількість тепла через Q_0 . Зрозуміло, що величина Q_0 є пропорційною до різниці температур та площі поверхні S та обернено пропорційною до товщини h :

$$Q_0 = \frac{\Delta t(u_0 - u_1)S}{h} K_0, \quad (1.14)$$

де K_0 – коефіцієнт теплопровідності, який встановлено експериментально, Δt – це проміжок часу, протягом якого досліджується процес.

Приймемо, що кількість тепла q , що за одиницю часу проходить через одиницю поверхні, визначається за формулою:

$$q = -\frac{u_1 - u_0}{h} K_0. \quad (1.15)$$

Прямуючи h до нуля, отримаємо:

$$\lim_{h \rightarrow 0} q = -K_0 \frac{\partial u}{\partial v} = q_v. \quad (1.16)$$

Формула (1.15) описує тепловий потік через поверхню.

Встановлено, яку кількість тепла потрібно підвести до об'єму V з відомою масою m для того, щоб його температура підвищилася на величину Δu :

$$Q_* = \Delta u \cdot m c = \Delta u V \rho c, \quad (1.17)$$

тут c - коефіцієнт теплоємності, ρ – густина шару.

Знайдемо q_{cp} – кількість тепла, яку потрібно подавати в одиницю часу до одиниці об'єму:

$$q_{cp} = \frac{Q_*}{V \rho \Delta t} = \frac{\Delta u}{\Delta t} c.$$

зробивши перехід до межі при $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} q_{cp} = q_* = \frac{\partial u}{\partial t} c. \quad (1.18)$$

Виділимо елементарний об'єм у просторі (рис. 2).

Позначимо за $q_{x_i}, i=1, \bar{3}$ – кількість тепла, що входить у паралелепіпед через i -ту грань, тобто тепловий потік через i -ту грань, а за $q_{x_i} + \frac{\partial q_{x_i}}{\partial x_i} dx_i$ – кількість тепла, що виділяється з паралелепіпеду:

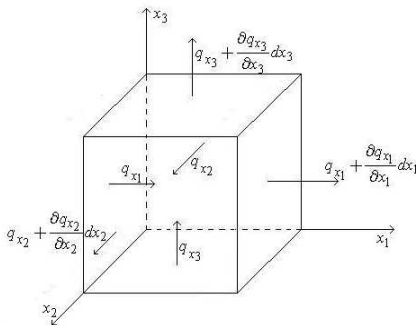


Рис. 2

$$q_{x_i} dx_j dx_k - \left(q_{x_i} + \frac{\partial q_{x_i}}{\partial x_i} dx_i \right) dx_j dx_k = \frac{\partial q_{x_i}}{\partial x_i} dx_i dx_j dx_k = \frac{\partial q_{x_i}}{\partial x_i} dV. \quad (1.19)$$

Використовуючи формули (1.14) – (1.16), отримаємо:

$$\begin{aligned} Q_0 &= - \left(\frac{\partial q_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial q_{x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial q_{x_3}}{\partial x_3} \right) dV = \\ &= + \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(K_0 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(K_0 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(K_0 \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) \right] dV = \quad (1.20) \\ &= K_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) dV = K_0 \Delta u dV \end{aligned}$$

Остаточно маємо:

$$Q_0 = K_0 \Delta u dV,$$

де $\Delta u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа.

Формула (1.20) визначає кількість тепла, що залишилася у паралелепіпеді, коли через всі три його границі прямує тепловий потік.

Якщо в середині паралелепіпеда генерується тепло Q_n , то загальна кількість тепла у паралелепіпеді обчислюється за формулою:

$$Q = Q_0 + Q_n, \quad (1.21)$$

де $Q_n = q_n dV$, q_n – кількість тепла, що в одиницю часу проходить одиницю об'єму, коли усередині існує джерело тепла.

З іншого боку, кількість тепла, яку потрібно подавати в одиницю часу до одиниці об'єму, визначається за формулою (1.18). Дорівнявши обидві частини рівностей, отримаємо:

$$K_0 \Delta u dV + q_n dV = \frac{\partial u}{\partial t} c dV. \quad (1.22)$$

Якщо ввести позначення $\frac{K_0}{c} = a^2$ та поділити обидві частини співвідношення (1.22) на dVc , то рівняння набуває вигляду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = +q_n. \quad (1.23)$$

Рівняння виду (1.23) і є рівнянням теплопровідності.

У випадку, коли температура не змінюється за часом, часткова похідна за часом дорівнює нулеві:

$$\Delta u = \frac{q_n}{a^2}. \quad (1.24)$$

Рівняння виду (1.24) називають рівнянням Пуассона.

Якщо джерел тепла усередині немає, то рівняння Пуассона стає однорідним:

$$\Delta u = 0. \quad (1.25)$$

Рівняння (1.25) називають рівнянням Лапласа (або гармонічним рівнянням).

Друге класичне рівняння математичної фізики – це рівняння коливань струни.

4. Виведення рівняння коливань струни

Нехай маємо струну $x \in [0; l]$, до якої додано навантаження. Передбачається, що кінці струни на нескінченності закріплені. Розглянемо ділянку струни довжиною Δx . Нехай ΔP – сила, що діє на цій ділянці, тоді інтенсивність навантаження в точці x визначимо за формулою:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = p(x). \quad (1.26)$$

Припустимо, що струна $x \in [0; l]$ завантажена рівномірно силою з інтенсивністю $p(x)$. Потрібно розшукати провисання струни. У кожній точці провисання проведемо дотичну. Вважаючи, що Δx – мале, можна рахувати, що функція $p(x)$ є постійною, тобто $p(x) \equiv \text{const}$, $\Delta p = p(x) dx$. На кожен ділянку струни діють сили: $p(x) dx$ та T – сила натягу. Оскільки струна є у спокої, то ці сили врівноважені:

$$p(x) dx - T \sin \alpha_0 + T \sin \alpha_1 = 0. \quad (1.27)$$

Тут $\alpha_0 = \alpha(x)$, $\alpha_1 = \alpha(x + dx)$, $\sin \alpha_1 = \frac{d \sin \alpha(x)}{dx} dx + \sin \alpha_0$.

З рівняння (1.27) отримаємо умову рівноваги у вигляді:

$$p(x) dx + T (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_0) = 0$$

або

$$p(x) dx + T \frac{d \sin \alpha(x)}{dx} dx = 0. \quad (1.28)$$

Потрібно зауважити, що $\operatorname{tg} \alpha(x) = \frac{du(x)}{dx} = u'_x$, тобто $\frac{\sin \alpha(x)}{\cos \alpha(x)} = u'_x$.

З цього випливає, що:

$$\sin \alpha(x) = \frac{u'_x}{\sqrt{1+(u'_x)^2}}. \quad (1.29)$$

Якщо прийнемо, що провисання мале та навантаження також невеличке, то можна вважати, що $1+(u'_x)^2 \approx 1$. З цього маємо, що $\sin \alpha(x) = \frac{du}{dx}$. Тоді умова рівноваги (1.28) набуває вигляд:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -\frac{p(x)}{T}, \quad 0 < x < l. \quad (1.30)$$

Рівняння (1.30) є рівнянням провисання струни.

Знайдемо вигляд рівняння коливання струни. У цьому випадку всі величини залежать не тільки від координати простору, але і від часу t . Враховуючи принцип Даламбера у рівнянні рівноваги (1.27), потрібно підключити сили інерції з протилежним знаком $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} m dx$, де $m = \rho S dx$.

З урахуванням такого зображення інерційного члена маємо:

$$p(x,t) + T \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \rho S = 0$$

або:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{p(x,t)}{\rho S}, \quad (1.31)$$

де введено позначення $c^2 = \frac{T}{\rho S}$.

Рівняння (1.31) у випадку $p(x,t) = 0$ є хвильовим рівнянням:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \square u(x,t), \quad u(x,t) = u(x_1, x_2, x_3, t). \quad (1.32)$$

У випадку, коли $u(x,t) = u(x_1, t)$, отримуємо, як частковий випадок, рівняння коливання для струни:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x_1, t)}{\partial x_1^2} \quad (1.33)$$

З'ясуємо тепер, яким вимогам мають задовольняти задачі математичної фізики та які задачі розглядатимуться у курсі.

5. Коректність задачі математичної фізики.

Класифікація задач математичної фізики

Всі задачі математичної фізики поділяються на коректно та некоректно поставлені. Задачу називають коректно поставленою, якщо виконано три умови, а саме:

- 1) розв'язок задачі існує;
- 2) розв'язок задачі єдиний;
- 3) розв'язок задачі стійкий.

Якщо порушена хоча б одна з умов 1 – 3, то задача є некоректно поставленою.

Розглянемо, як приклад, рівняння коливань струни:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -\frac{q(x)}{T}, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.34)$$

Проведемо послідовне інтегрування та отримаємо загальний розв'язок диференційного рівняння (1.34) у вигляді:

$$u(x) = -\frac{1}{T} \int_0^x \left(\int_0^\xi q(s) ds \right) d\xi + c_1 x + c_2. \quad (1.35)$$

У формулі (1.35) містяться дві невідомі сталі c_1 та c_2 . Будемо вважати, що на кінцях струна є закріпленою, тобто переміщення кінців відсутні:

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0. \quad (1.36) \text{ Знайдемо з розв'язку (1.35):}$$

$$u(0) = c_2, \quad u(l) = -\frac{1}{T} \int_0^l \left(\int_0^\xi q(s) ds \right) d\xi + c_1 l + c_2$$

та задовільним крайові умови (1.36), звідки отримаємо, що:

$$c_2 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{lT} \int_0^l \left(\int_0^\xi q(s) ds \right) d\xi. \quad (1.37)$$

Завдяки наявності крайових умов знайдено невідомі сталі у розв'язку (1.35).

Задачу математичної фізики, що складається з диференціального рівняння та крайових умов, називають крайовою. Наприклад, загальна формулювання крайової задачі може бути наступною.

Нехай для кожної точки простору V виконується рівняння:

$$\Delta u(x)=0, x=(x_1, x_2, \dots, x_n), x \in V, \quad (1.38)$$

а на поверхні s , що обмежує об'єм, виконано умови:

$$u(x)|_s = f(x), \quad x \in s. \quad (1.39)$$

Співвідношення (1.38), (1.39) формують крайову задачу.

Крайові задачі розділяються на основні та мішані.

Під основними задачами розуміються такі задачі, де граничні умови є однотипно заданими уздовж всієї границі.

Мішані задачі – це задачі, у граничних умовах яких має місце зміна типу граничних умов на границі. Наприклад, на одній частині задані переміщення, а на іншій частині – похідна переміщень:

$$u|_{s_1} = f_1(x), x \in s_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{s_2} = q_2(x), x \in s_2, \text{ де } s - \text{границя, } s = s_1 \cup s_2.$$

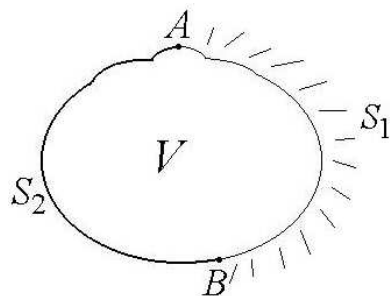


Рис. 3

У випадку, коли на границі області задана функція $u(x)|_s = f(x), x \in s$, то задача називається *першою основною або задачею Діріхле*.

У випадку, коли на границі задана нормальна похідна шуканої функції $\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}|_s = f(x), x \in s$, то задача називається

другою основною або задачею Неймана.

У випадку, коли на границі задана комбінація функції та її нормальної похідної $\left[\alpha(x)u(x) + \beta(x)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right]|_s = f(x), x \in s$, то задача називається *третьою основною*.

Розглянемо рівняння коливання струни:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, x \in (0,l), t > 0 \quad (1.40)$$

та додамо граничні умови вигляду:

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0. \quad (1.41)$$

Така постановка задачі не гарантує, що розв'язок буде єдиним. Потрібно задати переміщення в початковий момент часу. Якщо будемо вважати, що в цей момент струну відтянули, то потрібно

задати їй форму, а якщо вважати, що по неї вдарили, то потрібно задати початкову швидкість. Відповідно до цього:

$$u(x,0)=f_1(x), \quad \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = f_2(x). \quad (1.42)$$

Задача 1.40 – 1.42, де, крім граничних умов, присутні початкові умови, називається початково-крайовою задачею.

Отже, у першому розділі проведено класифікацію рівнянь математичної фізики. Виділені та виведені основні класичні рівняння теплопровідності та рівняння коливань струни. Сформульовано три основних вимоги до задачі математичної фізики, які дають можливість вважати її коректно поставленою.

У наступному розділі розглянемо основні методи розв'язання задач математичної фізики та наведемо важливі та корисні приклади їх застосування.

II. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

1. Метод відокремлення змінних (метод Фур'є)

1.1. Загальна схема метода Фур'є (на прикладі початково-крайової задачі теплопровідності)

Нехай сформульовано наступну задачу теплопровідності:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in [0; l], t > 0, \\ u(0,t) &= 0, u(l,t) = 0, t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), x \in [0, l].\end{aligned}\tag{2.1}$$

Потрібно побудувати розв'язок початково-крайової задачі (2.1).

Будемо припускати, що невідома функція $u(x,t)$ дозволяє зображення у вигляді:

$$u(x,t) = X(x)T(t).\tag{2.2}$$

Підставимо зображення (2.2) до рівняння з (2.1):

$$X(x)T'(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0.$$

Поділимо обидві частини отриманої рівності на $X(x)T(t)$. Рівняння набуває вигляду:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} - a^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = 0.$$

Як бачимо, $\frac{X'(x)}{X(x)}$ має співпадати з деякою сталою, наприклад,

$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$. Зробивши таку заміну в (2.3), отримаємо два звичайних

диференціальних рівняння:

$$\begin{aligned}T'(t) - a^2 \lambda^2 T(t) &= 0, \quad t > 0 \\ X''(x) + \lambda^2 X(x) &= 0, \quad x \in [0, l]\end{aligned}\tag{2.4}$$

Крайові умови з (2.1) після врахування зображення (2.2) запишемо у формі:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= X(0)T(t) = 0, \\ u(l,t) &= X(l)T(t) = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Додамо крайові умови (2.5) до рівнянь (2.4) та для невідомої функції $X(x)$ отримаємо крайову задачу Штурма – Ліувілля:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, & x \in [0; l] \\ X(0) = 0, & X(l) = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Як бачимо, розв’язання задач математичної фізики привело (її розв’язок буде наведено пізніше) до розв’язання задачі Штурма – Ліувілля. Отже, розглянемо загальну постанову цієї задачі та її основні властивості.

1.2. Постановка крайової задачі Штурма – Ліувілля

Неважко впевнитися, що крайова задача (2.6) завжди має тривіальний розв’язок. Задача побудови нетривіального розв’язку рівняння з (2.6), що задовольняє граничні умови з (2.6), має назву крайової задачі Штурма–Ліувілля: значення параметру $\lambda = \lambda_n$, для яких існує ненульовий розв’язок, називають власними числами задачі (2.6) або власними значеннями, а розв’язки $X_n(x)$, що відповідають кожному власному числу, – власними функціями задачі Штурма-Ліувілля.

Розв’язати задачу Штурма-Ліувілля означає відшукати всі її власні значення та всі її власні функції.

1.3. Властивості власних значень та власних функцій задачі Штурма – Ліувілля

- 1) Крайова задача Штурма – Ліувілля має лічену множину власних чисел, і всі вони є дійсні: $\lambda_n, n=0,1,2,\dots$.
- 2) Власні функції, які відповідають різним власним значенням, є ортогональними:

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \int_0^l X_n^2(x) dx = N_n^2, & n = m \end{cases}$$

3) Якщо деяка функція $\Phi(x)$ має неперервну похідну та кусково-неперервну другу похідну для $x \in [0; l]$, а також задовольняє граничними умовами з (2.6), то її можна розвинути у ряд Фур'є рівномірний та абсолютно збіжний – за власними функціями крайової задачі Штурма – Ліувилля $u_n(x)$:

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k u_k(x),$$

$$u_k = \frac{1}{\|u_k\|^2} \int_0^l \xi(x) \Phi(x) u_k(x) dx, \quad \|u_k\|^2 = \int_0^l \xi(x) u_k^2(x) dx,$$

де $\xi(x)$ – це вага, з якою ортогональні власні функції на проміжку $[0; l]$.

Ця властивість крайової задачі Штурма-Ліувилля була сформульована та доведена В. Г. Стекловим і носить назву теореми Стеклова.

Будь-яку функцію, яка задовольняє граничні умови крайової задачі Штурма-Ліувилля, можна розвинути за теоремою Стеклова у рівномірно збіжний ряд за власними функціями, а це означає, що ряд (2.10) є рівномірно збіжний.

Відшукаємо розв'язок задачі Штурма-Ліувилля (2.6). Загальний розв'язок рівняння з (2.6) має вигляд $X_n(x) = C_1 \sin \lambda_n(x) + C_2 \cos \lambda_n(x)$. Задовольняймо граничну умову $X_n(0) = 0$, звідки здобудемо $C_2 = 0$. Задовольнятимемо граничну умову $X_n(l) = 0$, $X_n(l) = C_1 \sin \lambda_n l$. Якщо взяти $C_1 = 0$, то отримаємо тривіальний розв'язок рівняння, тому будемо вважати, що $C_1 \neq 0$. Звідки отримаємо, що $\lambda_n l = \pi n$, $n = 0, 1, \dots$, тобто $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$ – власні числа задачі (2.6), а $X_n(x) = \sin \lambda_n x$ – власні функції.

З урахуванням цих властивостей значень та функцій задачі Штурма – Ліувилля (2.6), як один з розв'язків можна брати такий:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t} X_n(x). \quad (2.7)$$

Кожен з членів ряду (2.7) задовольняє диференціальне рівняння та крайові умови. Невиконаними залишилися початкові умови. Зробивши перехід до $t = 0$, отримаємо:

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n X_n(x) = f(x), \quad x \in [0; l]. \quad (2.8)$$

Враховуючи властивість власних значень та власних функцій задачі Штурма-Ліувилля, помножимо обидві частини рівності (2.8) на власну функцію $X_m(x)$ та проінтегруємо на проміжку $[0; l]$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^l X_n(x) X_m(x) dx = \int_0^l f(x) X_m(x) dx, \quad (2.9)$$

$$A_m N_m^2 = f_m,$$

звідки отримаємо $A_m = \frac{f_m}{N_m^2}$. Підставимо значення коефіцієнтів до розв'язку (2.8):

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{N_n^2} e^{-\lambda_n^2 a^2 t} X_n(x), \quad (2.10)$$

де N_n^2 – квадрат норми власних функцій.

Підрахуємо норму власних функцій:

$$N_m^2 = \int_0^l X_m^2(x) dx = \int_0^l (\sin^2 \lambda_n x) dx \Big|_0^l = \int_0^l \frac{\cos 2\lambda_n x - 1}{2} dx =$$

$$= \frac{\sin 2\lambda_n x}{2 \cdot 2\lambda_n} \Big|_0^l + \frac{1}{2} l = \frac{1}{2} l.$$

Розв'язок вихідної початково-крайової задачі (2.1) отримано остаточно.

Другий метод розв'язання задач математичної фізики – це метод інтегральних перетворень, суть якого наведено у наступному розділі.

2. Метод інтегральних перетворень

У цьому розділі наведено схему застосування цього методу для загального випадку, а також приведено основні інтегральні перетворення – Фур'є перетворення, перетворення Лапласа та Мелліна є часто використаними під час розв'язку задач математичної фізики.

2.1. Загальна схема метода

Розглянемо крайову задачу:

$$r_1(x)[p_1(x)u'(x,y)]' - q_1(x)u(x,y) + r_2(y)[p_2(y)u''(x,y)]'' - \quad (2.11)$$

$$- q_2(y)u(x,y) = f(x,y)$$

$$u = u(x,y), \quad a_0 < x < a_1, \quad b_0 < y < b_1,$$

$$V_j[u] = \alpha_{j0}u(a_j, y) + \alpha_{j1} \frac{\partial u}{\partial x}(a_j, y) = 0, \quad j=0,1; \quad b_0 < y < b_1,$$

$$V_k[u] = \beta_{j0}u(x, b_j) + \beta_{j1} \frac{\partial u}{\partial y}(x, b_j) = 0, \quad j=0,1; \quad a_0 < x < a_1.$$

Тут $r_j(x)$, $p_j(x)$, $q_j(x)$, $j=1,2$ – задані функції, $u = u(x,y)$ – функція, неперервна разом зі своїми похідними.

Будемо розв'язувати задачу (2.11) методом інтегральних перетворень, загальна ідея якого полягає в наступному: розшукується не сама вихідна функція, а інтеграл від неї, що будемо називати трансформантою вихідної функції або інтегральним перетворенням:

$$u_x(y) = \int_{a_0}^{a_1} \frac{K_1(x, \alpha)}{r_1(x)} u(x, y) dx. \quad \text{Домножимо обидві частини рівняння}$$

$$(2.11) \text{ на множник } \frac{K_1(x, \alpha)}{r_1(x)} \text{ та послідовно проінтегруємо всі доданки}$$

рівняння.

Розглянемо перший доданок:

$$\begin{aligned} & \int_{a_0}^{a_1} K_1(x, \alpha) [p_1(x)u'(x, y)]' dx = [K_1(x, \alpha) p_1(x)u'(x, y)]_{a_0}^{a_1} - \\ & - \int_{a_0}^{a_1} K_1'(x, \alpha) p_1(x)u'(x, y) dx = [K_1(x, \alpha) p_1(x)u'(x, y)]_{a_0}^{a_1} - \\ & - [p_1(x)u(x, y)K_1'(x, \alpha)]_{a_0}^{a_1} + \int_{a_0}^{a_1} \frac{r_1(x)u(x, y)}{r_1(x)} (p_1(x)K_1'(x, \alpha))' d\alpha = \end{aligned}$$

$$=N_{\alpha}+\int_{a_0}^{a_1}\frac{r_1(x)u(x,y)}{r_1(x)}\left(p_1(x)K_1'(x,\alpha)\right)'d\alpha,$$

$$\text{де } N_{\alpha}=\left[K_1(x,\alpha)p_1(x)u'(x,y)\right]_{a_0}^{a_1}-\left[p_1(x)u(x,y)K_1'(x,\alpha)\right]_{a_0}^{a_1}.$$

Розглянемо другий доданок; його вигляд після інтегрування:

$$-\int_{a_0}^{a_1}\frac{K_1(x,\alpha)}{r_1(x)}q_1(x)u(x,y)dx=-\int_{a_0}^{a_1}\frac{u(x,y)}{r_1(x)}\left[q_1(x)K_1(x,\alpha)\right]dx.$$

Разом перший та другий доданок складають вираз:

$$N_{\alpha}+\int_{a_0}^{a_1}\frac{u(x,y)}{r_1(x)}\left[r_1(x)\left(p_1(x)K_1'(x,\alpha)\right)'-q_1(x)K_1(x,\alpha)\right]dx.$$

Проінтегруємо третій доданок у рівнянні (2.11):

$$\begin{aligned} \int_{a_0}^{a_1}r_2(y)\frac{K_1(x,\alpha)}{r_1(x)}\left[p_2(y)u^{\square}(x,y)\right]^{\square}dx &= \frac{\partial}{\partial y}\left(p_2(y)\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{a_0}^{a_1}\frac{K_1(x,\alpha)}{r_1(x)}u(x,y)dx\right)\right)= \\ &= r_2(y)\frac{\partial}{\partial y}\left(p_2(y)\frac{\partial}{\partial y}u_{\alpha}(y)\right)=r_2(y)\left(p_2(y)u'_{\alpha}(y)\right)'. \end{aligned}$$

Проінтегруємо четвертий доданок рівняння:

$$-\int_{a_0}^{a_1}q_2(y)\frac{K_1(x,\alpha)}{r_1(x)}u(x,y)dx=-q_2(y)u_{\alpha}(y)$$

$$\text{та праву частину } \int_{a_0}^{a_1}\frac{f(x,y)}{r_1(x)}K_1(x,\alpha)dx=f_{\alpha}(y).$$

Таким чином, після інтегрування рівняння (2.11) прийме вигляд:

$$\begin{aligned} N_{\alpha}+\int_{a_0}^{a_1}\frac{u(x,y)}{r_1(x)}\left[r_1(x)\left(p_1(x)K_1'(x,\alpha)\right)'-q_1(x)K_1(x,\alpha)\right]dx+ \\ +r_2(y)\left(p_2(y)u'_{\alpha}(y)\right)'-q_2(y)u_{\alpha}(y)=f_{\alpha}(y). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Будемо вимагати, щоб невідома доки що функція $K_1(x,\alpha)$ задовольняла диференціальне рівняння:

$$r_1(x)\left[p_1(x)K_1'(x,\alpha)\right]'-q_1(x)K_1(x,\alpha)=-\alpha^2K_1(x,\alpha), \quad a_0<x<a_1. \quad (2.13)$$

Якщо такий розв'язок буде розшукано, то рівняння (2.12) буде зформульовано відносно одної невідомої функції трансформанти

$K_\alpha(y)$. Розглянемо коефіцієнт N_α , після спрощення він набуває вигляду:

$$N_\alpha = -\frac{p_1(a_1)}{\alpha_{11}} [\alpha_{10} K_1(a_1, \alpha) + \alpha_{11} K_1'(a_1, \alpha)] + \frac{p_1(a_0)}{\alpha_{01}} [\alpha_{00} K_1(a_0, \alpha) + \alpha_{01} K_1'(a_0, \alpha)]. \quad (2.14)$$

Вирази у квадратних дужках можна трактувати як крайові функціонали для ядра перетворення $K(x, \alpha)$. Тоді з цього випливає наступна задача Штурма-Ліувилля для функції $K(x, \alpha)$:

$$\begin{cases} r_1(x) [K_1'(x, \alpha) p_1(x)]' - q_1(x) K_1(x, \alpha) = -\alpha^2 K_1(x, \alpha), \alpha_0 < x < \alpha_1 \\ V_i [K_1(x, \alpha)] = \alpha_{i0} K_1(a_i, \alpha) + \alpha_{i1} K_1'(a_i, \alpha) = 0, i=0,1. \end{cases} \quad (2.15)$$

Якщо задачу Штурма – Ліувилля (2.15) розв'язати, то рівняння з (2.12) прийме вигляд:

$$r_2(y) [p_2(y) u_\alpha'(y)]' - q_2(y) u_\alpha(y) - \alpha^2 u_\alpha(y) = f_\alpha(y), y \in [b_0, b_1]. \quad (2.16)$$

Граничні умови перетворюються на вирази:

$$\beta_{i0} u_\alpha(b_i) + \beta_{i1} u_\alpha'(b_i) = 0, i=0,1, \text{ або у короткому запису:}$$

$$V_i [u_\alpha(y)] = 0, i=0,1. \quad (2.17)$$

Якщо розшукано трансформанту $u_\alpha(y)$, то за нею маємо відновити вихідну функцію.

2.2. Інтеграл Фур'є, повне перетворення Фур'є, cos - та sin-перетворення Фур'є.

Розглянемо часткові випадки:

$$1) r_1(x) \equiv 1, p_1(x) \equiv 1, q_1(x) = 0.$$

У граничних умовах будемо вважати $a_0 = -\infty, a_1 = +\infty$. Замість диференціального рівняння з (2.15) запишемо наступне рівняння:

$$K_1''(x, \alpha) + \alpha^2 K_1(x, \alpha) = 0, -\infty < x < +\infty, \quad (2.18)$$

загальний розв'язок якого є:

$$K_1(x, \alpha) = A e^{i\alpha x} + B e^{-i\alpha x}. \quad (2.19)$$

За ядро перетворення можна взяти як перший, так і другий доданок. Якщо ядро вибрати у вигляді $K_1(x, \alpha) = e^{i\alpha x}$, то для трансформанти шуканої функції отримаємо:

$$u_{\alpha}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} u(x,y) dx. \quad (2.20)$$

Формула (2.20) є інтегральним перетворенням Фур'є.

2) Розглянемо другий частковий випадок, а саме:

$$r_1(x)=1, p_1(x)=1, q_1(x)=0, a_0=0, a_1=+\infty.$$

Диференційне рівняння (2.18) залишається справедливим на інтервалі $x \in [0; +\infty)$, а гранична умова набуває вигляду:

$$K_1(0, \alpha)=0. \quad (2.21)$$

Загальний розв'язок рівняння у цьому випадку запишемо у формі:

$$K_1(x, \alpha)=A \sin \alpha x+B \cos \alpha x.$$

Задовольняючи крайову умову (2.21), отримаємо, що стала B дорівнює нулеві. За ядро перетворення візьмемо $K_1(x, \alpha)=\sin \alpha x$. Це приводить до формули інтегрального \sin -перетворення Фур'є

$$u_{\alpha}(y)=\int_0^{\infty} \sin \alpha x u(x,y) dx. \quad (2.22)$$

3) Розглянемо ще один частковий випадок, який відрізняється від попереднього тим, що на початку інтервалу $[0; +\infty)$ задана похідна $K_1'(0, \alpha)=0$. Задовольнимо крайову умову, та отримаємо за описаною вище схемою ядро перетворення $K_1(x, \alpha)=\cos \alpha x$.

Таким чином, запишемо формулу інтегрального \cos -перетворення Фур'є:

$$u_{\alpha}(y)=\int_0^{\infty} \cos \alpha x u(x,y) dx. \quad (2.23)$$

Тепер потрібно отримати формули обернення для інтегрального перетворення Фур'є.

З цією метою потрібно розв'язати інтегральне рівняння:

$$u_{\alpha}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} u(x,y) dx, \quad (2.24)$$

де ліва частина є відомою.

Запишемо поставлену задачу трохи у іншій формі:

$$f_{\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx.$$

Якщо функція $f(x) \equiv \text{const}$, то інтеграл буде розбіжним. Тому потрібна вимога, що $f(x)$ є спадною функцією на нескінченності, тобто потрібна абсолютна збіжність такого інтеграла $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$.

Спершу будемо припускати, що функція $f(x)$ задана на скінченному інтервалі $x \in (-l, l)$ та задовольняє умові Діріхле. Тоді використаємо той факт, що її можна розвинути у ряд Фур'є:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (2.25)$$

де

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) d\xi, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad n=1, 2, \dots$$

Підставимо коефіцієнти a_n, b_n до рівності (2.25):

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\pi}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \left[\cos \frac{\pi n}{l} \xi \cos \frac{\pi n}{l} x + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin \frac{\pi n}{l} \xi \sin \frac{\pi n}{l} x \right] d\xi = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{\pi n}{l} (x - \xi) d\xi. \right. \quad (2.26)$$

Другий доданок у формулі (2.26) є зображенням інтегральної суми для функції $g(\alpha) = \int_{-l}^l f(\xi) \cos \alpha_n (x - \xi) d\xi$, де $\alpha_n = \frac{\pi n}{l}$.

Розглянемо інтеграл:

$$\int_0^A g(\alpha) d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} g(\alpha_n) \Delta_n. \quad (2.27)$$

Рівність (2.27) випливає з відомого з аналізу визначення інтеграла через інтегральну суму. Згідно з визначенням функції $g(\alpha)$ можна прийняти за $\Delta_n = \frac{\pi}{l}$, а за $\alpha_n = \frac{\pi n}{l}$. Тоді з (2.27) випливає:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{l} g\left(\frac{\pi n}{l}\right) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{\pi n}{l} (x-\xi) d\xi.$$

$$\begin{aligned} \text{Дійсно, якщо } \alpha_n = \frac{\pi n}{l}, \text{ то } \alpha_{n-1} &= \frac{\pi(n-1)}{l}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\pi(n+1)}{l}, \quad \Delta_n = \alpha_n - \alpha_{n-1} = \\ &= \frac{\pi n - \pi(n-1)}{l} = \frac{\pi}{l}. \end{aligned}$$

Спрямуємо l до нескінченності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n g(\alpha_n) \rightarrow \int_0^{\infty} g(\alpha) d\alpha.$$

Перший доданок у формулі (2.26) дорівнюватиме нулеві. Як результат отримаємо:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} g(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \alpha (x-\xi) d\xi \right) d\alpha. \quad (2.28)$$

Враховуючи співвідношення Ейлера

$$e^{-i\alpha(x-\xi)} = \cos \alpha (x-\xi) - i \sin \alpha (x-\xi),$$

запишемо співвідношення (2.28) у вигляді:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\alpha(x-\xi)} d\xi \right) d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\alpha \xi} d\xi \right) d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha} e^{-i\alpha x} d\alpha, \end{aligned} \quad (2.29)$$

де $f_{\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx$ – трансформанта Фур'є перетворення. Отримана

формула (2.29) є формулою оберненого інтегрального Фур'є перетворення. Ця остаточна формула виведена за формальною процедурою (під час виведення застосовано поняття інтегральної суми для півнескінченного інтервалу).

Розглянемо важливі часткові випадки інтегрального перетворення Фур'є.

Нехай функція $g(x)$ задовольняє умові Діріхле та задана на інтервалі $0 \leq x < +\infty$. Її трансформанта визначається за формулою:

$$g_{\alpha}^c = \int_0^{\infty} \cos \alpha x g(x) dx. \quad (2.30)$$

Відшукаємо по цій трансформанті вихідну функцію.

Введемо нову функцію $f(x)$, що є парним продовженням функції $g(x)$ (рис. 4):

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 0 \\ g(x), & x < 0, \end{cases}$$

тобто $f(-x) = f(x)$.

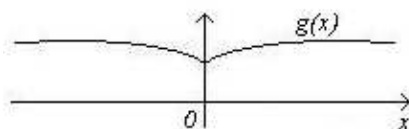


Рис. 4

Відповідно до отриманого вище загального перетворення Фур'є:

$$\begin{aligned} f_{\alpha} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty} \right) (\cos \alpha x + i \sin \alpha x) g(x) dx = \\ &= 2 \int_0^{+\infty} g(x) \cos \alpha x dx = 2g_{\alpha}^c. \end{aligned}$$

Інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin \alpha x f(x) dx = 0$ завдяки непарності підінтегральної функції.

Формулу обернення для \cos -перетворення Фур'є (2.29) запишемо у вигляді:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha} e^{-i\alpha x} d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_{\alpha}^c e^{-i\alpha x} d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} g_{\alpha}^c \cos \alpha x d\alpha = g(x). \quad (2.31)$$

Тут використано той факт, що $g_{\alpha}^c = g_{-\alpha}^c$. Потрібно відмітити, що вихідну функцію відновлено за умови абсолютної інтегруємості її на

дійсній осі: $2 \int_0^{\infty} |g(x)| dx < +\infty$.

Отримаємо тепер формулу обернення для \sin -перетворення Фур'є. Для цього продовжимо функцію $g(x)$, $x \in [0; +\infty)$ на проміжок

$(-\infty; 0)$ непарним чином, тобто, отримаємо непарну функцію $f(x)$ (рис. 5)

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 0 \\ -g(x), & x < 0 \end{cases}$$

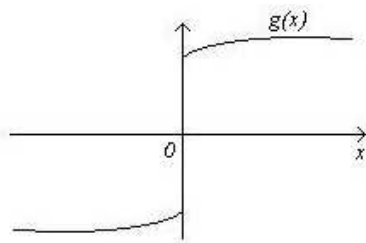


Рис. 5

У даному випадку:

$$f_{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = 2i \int_0^{\infty} \sin \alpha x g(x) dx = 2ig_{\alpha}^s.$$

Враховуючи, що $-g_{\alpha}^s = g_{-\alpha}^s$, можна записати:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} 2ig_{\alpha}^s d\alpha = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} g_{\alpha}^s d\alpha = \frac{2i(-i)}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \alpha x g_{\alpha}^s d\alpha,$$

тобто маємо:

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \alpha x g_{\alpha}^s d\alpha \quad (2.32)$$

формулу оберненого \sin -перетворення Фур'є. Щоб цю формулу можна було застосувати, вихідна функція $g(x)$ мусить бути абсолютно інтегруємою на інтервалі, де вона задана, і для неї мають виконуватися умови Діріхле.

2.3. Інтегральні перетворення Лапласа та Мелліна

Трансформанта перетворення Лапласа зображується у формі:

$$g_p = \int_0^{\infty} e^{-px} g(x) dx \quad (2.33)$$

Відновимо вихідну функцію $g(x)$, продовжуючи її нулем на від'ємній частині осі x :

$$f(x) = \begin{cases} g(x) e^{-\gamma x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

де γ – деяке довільне число.

Скористуємося формулою (2.29):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha} e^{-i\alpha x} d\alpha = \left[\begin{array}{l} p=\gamma-i\alpha \quad dp=-i d\alpha \Rightarrow d\alpha=-\frac{dp}{i} \\ -i\alpha=p-\gamma \quad \alpha=-\infty \rightarrow p=\gamma+i\infty \\ \alpha=+\infty \rightarrow p=\gamma-i\infty \end{array} \right] = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma+i\infty}^{\gamma-i\infty} g_p e^{px-\gamma x} dp =$$

$$= \frac{e^{-\gamma x}}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} g_p e^{px} dp.$$

Якщо взяти тільки додатні значення x , то отримуємо рівність:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} g_p e^{px} dp. \quad (2.34)$$

Ця формула є справедливою у випадку, коли вихідна функція $g(x)$ задовольняє умовам: $\int_0^{\infty} |g(x)| e^{-\gamma x} dx < +\infty$; $g(x) = 0 (e^{\mu x})$,

де $\mu < \gamma$.

Формули (2.33), (2.34) є відповідно *формулами прямого та оберненого інтегрального перетворення Лапласа*.

Нехай трансформанта Мелліна функції $g(x)$ має вигляд:

$$\int_0^{\infty} g(r) r^{s-1} dr = g_s. \quad (2.35)$$

Відшукаємо вихідну функцію $g(x)$. Для цього використаємо формулу перетворення Фур'є, де зробимо попередньо заміну змінних:

$$f_{\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = \int_0^{\infty} f(\ln r) r^{i\alpha-1} dr, \quad (2.36)$$

$$x = \ln r, \quad e^x = r,$$

$$dx = \frac{1}{r} dr, \quad e^{i\alpha x} = (e^x)^{i\alpha} = r^{i\alpha},$$

$$x \rightarrow +\infty, \quad r \rightarrow +\infty,$$

$$x \rightarrow -\infty, \quad r \rightarrow 0.$$

В отриманому інтегралі зробимо нові позначення, а саме: $i\alpha=s-\gamma$, тоді $s=\gamma+i\alpha$, де $\gamma>0$:

$$f_\alpha=\int_0^\infty f(\ln r)r^{-\gamma}r^{s-1}dr=\int_0^\infty g(r)r^{s-1}dr=g_s, \quad (2.37)$$

де $g(r)=f(\ln r)r^{-\gamma}$. Для трансформанти Фур'є (2.37) використаємо формулу обернення, де зробимо також заміну змінних:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\alpha x}f_\alpha d\alpha=\left[\begin{array}{l} -i\alpha=\gamma-s, d\alpha=\frac{ds}{i}, e^{-i\alpha x}=(e^x)^{-i\alpha}=r^{-i\alpha} \\ \alpha\rightarrow-\infty, s=\gamma-i\infty \\ \beta\rightarrow+\infty, s=\gamma+i\infty \end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}r^{-s}r^\gamma g_s \frac{ds}{i}=\frac{r^\gamma}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}r^{-s}g_s ds$$

Формула (2.38) є *формулою оберненого перетворення Мелліна*.

Зафіксуємо параметр γ та розглянемо інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\left[x=\ln r\right]_{dx=\frac{dr}{r}}=\int_0^\infty|f(\ln r)|\frac{dr}{r}=\int_0^\infty|f(\ln r)r^{-\gamma}|\frac{dr}{r\cdot r^{-\gamma}}=$$

$$=\int_0^\infty|f(\ln r)r^{-\gamma}|r^{\gamma-1}dr=\int_0^\infty g(r)r^{\gamma-1}dr.$$

Оскільки інтеграл у лівій частині рівності є абсолютно збіжний, то й інтеграл у правій частині має бути збіжним. Отримано умову, при виконанні якої є справедливою формула обернення (2.38). Щоб інтеграл збігався на $+\infty$, потрібно взяти $\gamma=-r$, а для збіжності у точці 0 величина γ має задовольняти умові $\gamma-1<1$, тобто $\gamma<2$.

Таким чином, ми познайомилися з методом інтегральних перетворень розв'язання задач математичної фізики, також розглянули властивості інтегральних перетворень Фур'є, Лапласа та Мелліна.

Наступний розділ містить матеріал, який дозволяє ознайомитися з одним з найважливіших методів розв'язання одновимірних крайових задач – методом функції Гріна.

3. Функція Гріна одновимірних крайових задач

3.1. Визначення функції Гріна. Неособливі крайові умови задачі математичної фізики

Розглянемо наступну одновимірну крайову задачу:

$$\begin{cases} L_n(y(x)) = f(x) \\ V_i[y(x)] = \gamma_i, \quad x \in (a; b), i=0, n-1. \end{cases} \quad (2.39)$$

Тут $L_n(y(x))$ – диференціальний оператор n -го порядку

$$L_n(y(x)) = \sum_{j=0}^n p_j(x) y^{(n-j)}(x),$$

$$U_i[y(x)] = U_i^a[y(x)] + U_i^b[y(x)] = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij} y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{ij} y^{(j)}(b).$$

Вважається, що коефіцієнти $P_j(x), \alpha_{ij}, \beta_{ij}$ – дійсні, зокрема $p_0(x) \neq 0, p_i(x), f(x) \in C(a; b)$.

Розв'яжемо одновимірну крайову задачу (2.39). Це означає, що потрібно розшукати розв'язки диференціального рівняння (2.39) та знайти з них той, що задовольняє крайові умови з (2.39). Як відомо з курсу диференціальних рівнянь, кількість розв'язків дорівнює порядку старшої похідної однорідного рівняння фундаментальної системи диференціального рівняння (2.39), а розв'язки мають задовольняти умову:

$$W[y_j(x)] = \begin{vmatrix} y_0(x) & y_1(x) & \dots & y_{n-1}(x) \\ y_0'(x) & y_1'(x) & \dots & y_{n-1}'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_0^{(n-1)}(x) & y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (2.40)$$

де $W[y_i(x)]$ – Вронскіан фундаментальної системи розв'язків (у наступному ФСР). Умова (2.40) забезпечує лінійну незалежність ФСР однорідного рівняння $L_n(y(x)) = 0, x \in (a; b)$. Граничні умови з (2.39) є неособливими. *Неособливими* будемо вважати умови, для яких виконується $\det \|V_i[y_j(x)]\|_{i,j=0}^{n-1} \neq 0$. (У протилежному випадку умови

будемо називати особливими.) Проведено також класифікацію одновимірних задач. Розглянемо три наступні одновимірні крайові задачі:

$$\begin{cases} L_n(y(x))=0, & a < x < b, \\ V_i[y(x)]=0, & i=\overline{0, n-1}; \end{cases} \quad \begin{cases} L_n(y(x))=f(x), & a < x < b, \\ V_i[y(x)]=0, & i=\overline{0, n-1}; \end{cases} \quad (2.41)$$

$$\begin{cases} L_n(y(x))=f(x), \\ V_i[y(x)]=\gamma_i, & i=\overline{0, n-1}. \end{cases}$$

Перша задача з (2.41) є однорідною одновимірною крайовою задачею, друга – півнеоднорідною одновимірною крайовою задачею, а третя – повністю неоднорідною. Спершу вивчимо одновимірні однорідні крайові задачі.

Теорема. Якщо граничні умови однорідної одновимірної крайової задачі є неособливими, то однорідна крайова задача має тільки тривіальний розв’язок.

Доведення

Загальний розв’язок диференціального рівняння зобразимо у вигляді суперпозиції його ФСР: $y(x)=\sum_{j=0}^{n-1} C_j y_j(x)$. Задовольнимо крайові умови:

$$V_i[y(x)]=V_i\left[\sum_{j=0}^{n-1} C_j y_j(x)\right]=\sum_{j=0}^{n-1} C_j V_i[y_j(x)]=0.$$

Таким чином, отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $C_j, j=\overline{0, n-1}$. Визначник цієї системи відмінний від нуля за рахунок властивості ФСР (2.40). Тобто всі коефіцієнти $C_j=0, j=\overline{0, n-1}$. Отже, $y(x)=0$.

Для півнеоднорідної одновимірної крайової задачі розглянемо функцію Гріна та її властивості. За допомогою цієї функції розв’язок рівняння відповідної задачі запишемо у вигляді:

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (2.42)$$

У випадку неоднорідної одновимірної крайової задачі для побудови розв'язку потрібно, окрім ФСР та функції Гріна, знайти ще базисну систему розв'язків (БСР) $\{\psi_k(x)\}$, $k=0, n-1$, кожен член якої має задовольняти задачі:

$$\begin{cases} L_n(\psi_k(x)) = 0, \\ V_i[\psi_k(x)] = \delta_{ik}, k=0, n-1, \end{cases} \quad (2.43)$$

де δ_{ik} – символ Кронекера.

Отримавши функцію Гріна та БСР, розв'язок неоднорідної задачі подаємо у зображенні:

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \psi_k(x). \quad (2.44) \text{ Доведемо це.}$$

Теорема. Зображення (2.44) є розв'язком неоднорідної одновимірної крайової задачі.

Доведення. Доведення буде складатися з двох частин. Спершу продемонструємо, що вираз (2.44) дійсно є розв'язком відповідного диференціального рівняння, для чого застосуємо до нього диференціальний оператор:

$$\begin{aligned} L_n(y(x)) &= L_n \left(\int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \psi_k(x) \right) = \\ &= L_n \left(\int_a^b G(x, \xi) f(x) d\xi + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k L_n(\psi_k(x)) \right). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Останній задаток у співвідношенні (2.45) дорівнює нулеві за рахунок ознаки БСР, а перший за рахунок формули (2.42) дорівнює $f(x)$.

Таким чином, доведено, що функція (2.44) задовольняє диференціальне рівняння. Перевіримо тепер, що вона задовольняє граничні умови. З цією метою застосуємо до неї крайовий функціонал:

$$V_i[y(x)] = V_i \left[\int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \right] + V_i \left[\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \psi_k(x) \right].$$

За рахунок того, що функція Гріна задовольняє півнеоднорідній крайовій задачі, перший доданок дорівнює нулеві. Другий доданок перепишемо у вигляді:

$$V_i \left[\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \psi_k(x) \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k [V_i(\psi_k(x))] = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k \delta_{ik} = \gamma_i.$$

Отже, $V_i[y(x)] = \gamma_i$.

Довели, що зображення (2.44) є розв'язком неоднорідної одновимірної крайової задачі.

Як бачимо, принципово важливим у побудові розв'язку є наявність функції Гріна. Розглянемо її основні властивості.

3.2. Теорема про єдність існування функції Гріна

Теорема. Якщо одновимірна крайова задача має неособливі крайові умови, то функція Гріна такої задачі є єдиною.

Доведення. Проводитиметься від протилежного. Припустимо, що існує дві різні функції Гріна $G_1(x, \xi)$, $G_2(x, \xi)$ такі, що

$$y_1(x) = \int_a^b G_1(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad y_2(x) = \int_a^b G_2(x, \xi) f(\xi) d\xi - \text{ є розв'язками}$$

крайової задачі. Побудуємо функцію $G(x, \xi) = G_1(x, \xi) - G_2(x, \xi)$. За

рахунок того, що $y_1(x)$, $y_2(x)$ є розв'язки рівнянь, запишемо:

$$L_n(y_1(x)) = f(x), L_n(y_2(x)) = f(x).$$

Побудуємо ще одну функцію $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ та застосуємо до неї диференціальний оператор:

$$L_n(y(x)) = L_n(y_1(x)) - L_n(y_2(x)) = f(x) - f(x) = 0.$$

З іншого боку,

$$L_n(y(x)) = \int_a^b G_1(x, \xi) f(\xi) d\xi - \int_a^b G_2(x, \xi) f(\xi) d\xi = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Отримали, що $\int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi = 0$ для будь-якої правої частини

рівняння $f(x)$. У зв'язку з тим, що функція є довільною, виберемо її

у формі: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (a; \xi - \Delta\xi) \cup (\xi + \Delta\xi; b) \\ \neq 0, & x \in (\xi - \Delta\xi, \xi + \Delta\xi) \end{cases}$. Розв'язок задачі у такому

випадку, застосувавши теорему про середнє, запишемо у вигляді:

$$y(x) = \int_{\Delta\xi} G(x, \xi) f(\xi) d\xi = G(x, x_{cp}) \int_{\Delta\xi} f(\xi) d\xi.$$

Згадаємо, що функція $y(x)$ є розв'язком однорідної крайової задачі, тобто має дорівнювати нулеві. Оскільки інтеграл у правій частині відмінний від нуля, то випливає, що $G(x, x_{cp}) = 0$. Функцію $f(x)$ вибрано довільним чином, тобто можемо зробити висновок, що $G(x, \xi) = 0$. Звідки випливає, що $G_1(x, \xi) = G_2(x, \xi)$. Єдність існування функції Гріна доведено.

З метою з'ясувати умови існування функції Гріна доведемо теорему про чотири визначальні властивості функції Гріна.

3.3. Теорема про чотири визначальні властивості функції Гріна

Теорема. Якщо функція $G(x, \xi)$, що задана у прямокутнику $a < x < b$, $a < \xi < b$, має чотири наступні властивості, то ця функція є функцією Гріна півнеоднорідної крайової задачі.

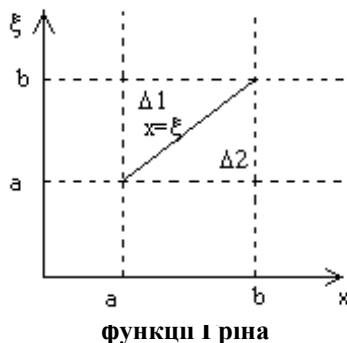
- 1) Функція Гріна та її похідні до $n-2$ порядку $\frac{\partial^m G(x, y)}{\partial x^m} = G^{(m)}(x)$, $m = \overline{0, n-2}$ є неперервними у всій області;
- 2) Похідна функції Гріна $n-1$ -го порядку є розривною на лінії $x = \xi$, та її стрибок дорівнює оберненому значенню коефіцієнта при старшій похідній $G^{(n-1)}(x, x-0) - G^{(n-1)}(x, x+0) = \frac{1}{p_0(x)}$;
- 3) Будь-яка похідна за змінною x від функції Гріна є неперервною у областях $a < x < \xi$ та $\xi < x < b$. У кожному з цих трикутників виконуватиметься рівняння $L_n G(x, \xi) = 0$.
- 4) Функція Гріна має задовольняти граничні умови:

$$V_i[G(x, \xi)] = 0, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad a < x < \xi, \quad \xi < x < b.$$

Доведення

Розглянемо рис. 6, та введемо позначення для областей $a < x < \xi$ та $\xi < x < b$ – Δ_1 та Δ_2 відповідно. Зобразимо розв’язок півнеоднорідної задачі (2.41), який має задовольняти функція Гріна, у вигляді:

$$x) = \int_a^x G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (2.46)$$



У кожній з областей Δ_1 та Δ_2 функція Гріна та її похідна є неперервними, тому при диференціюванні доданків у правій частині рівності (2.46) можна вносити похідну під знак інтеграла, враховуючи відомі формули:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^x F(x, \xi) d\xi = \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} F(x, \xi) d\xi + F(x, x) \quad \text{та} \quad \frac{\partial}{\partial x} \int_x^b F(x, \xi) d\xi = - \int_x^b \frac{\partial}{\partial x} F(x, \xi) d\xi - F(x, x).$$

З огляду на це, підрахуємо першу похідну:

$$y'(x) = \int_a^x G^{(l)}(x, \xi) f(\xi) d\xi + G(x, x-0) f(x) + \int_x^b G^{(l)}(x, \xi) f(\xi) d\xi - G(x, x+0) f(x).$$

Спростимо отриманий вираз:

$$y'(x) = \int_a^x G^{(l)}(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b G^{(l)}(x, \xi) f(\xi) d\xi + f(x) (G(x, x-0) - G(x, x+0)). \quad (2.47)$$

З умови неперервності функції Гріна останній доданок у рівності (2.47) дорівнює нулеві. За аналогічною схемою підрахуємо похідні функції Гріна до $n-1$ порядку:

$$y^{(k)}(x) = \int_a^x G^{(k)}(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b G^{(k)}(x, \xi) f(\xi) d\xi + f(x) [G^{(k-1)}(x, x-0) - G^{(k-1)}(x, x+0)], \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Останні доданки у всіх виразах дорівнювали нулеві за рахунок неперервності функції Гріна та її похідних за властивістю теореми. У випадку похідної n -го порядку матимемо:

$$y^{(n)}(x) = \int_a^x G^{(n)}(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b G^{(n)}(x, \xi) f(\xi) d\xi + f(x) \left[G^{n-1}(x, x-0) - G^{(n-1)}(x, x+0) \right] = \int_a^x G^{(n)}(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b G^{(n)}(x, \xi) f(\xi) d\xi + f(x) \frac{1}{p_0(x)}.$$

Остання рівність отримана за властивістю 2) теореми.

Підставимо тепер всі підраховані похідні у диференціальне рівняння:

$$L_n(y(x)) = p_0(x)y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_n(x)y(x) = \int_a^x L_n(G(x, \xi)) f(\xi) d\xi + \int_x^b L_n(G(x, \xi)) f(\xi) d\xi + f(x).$$

За рахунок властивості 3) теореми перші два доданки дорівнюють нулеві. Отже, отримано $L_n(y(x)) = f(x)$, тобто $y(x)$ є розв'язком диференціального рівняння задачі. Покажемо, що функція $y(x)$ задовольняє крайові умови. З цією метою запишемо граничний функціонал у вигляді:

$$V_i[y(x)] = V_i^a[y(x)] + V_i^b[y(x)] = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij} y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{ij} y^{(j)}(b). \quad (2.48)$$

Підрахуємо похідні, що входять до граничних умов:

$$y^{(j)}(a) = \int_a^b G^{(j)}(a, \xi) f(\xi) d\xi = \int_a^b V_i^a[G(x, \xi)] f(\xi) d\xi, \\ y^{(j)}(b) = \int_a^b G^{(j)}(b, \xi) f(\xi) d\xi = \int_a^b V_i^b[G(x, \xi)] f(\xi) d\xi,$$

та підставимо ці співвідношення у рівність (2.48):

$$V_i[y(x)] = \int_a^b V_i[G(x, \xi)] f(\xi) d\xi = 0, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (2.49)$$

Рівність (2.49) отримано за рахунок властивості 4) теореми.

Доведено, що функція, яка задовольняє умовам 1) – 4), є функцією Гріна.

Слідство. Якщо з чотирьох умов теореми виконано тільки три перші умови, то функція $G(x, \xi)$ буде фундаментальною функцією:

$$y(x) = \int_a^b \Phi(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

3.4. Теорема про існування функції Гріна.

Перший спосіб побудови

Теорема. Якщо крайові умови задачі є неособливими, то для такої задачі завжди існує функція Гріна.

Доведення. Проведемо доведення за конструктивним шляхом. Припустимо, що фундаментальна система розв'язків (ФСР) диференціального рівняння $y_j(x)$, $j=\overline{0, n-1}$ є відомою. Побудуємо функцію двох змінних таким чином, щоб як більше властивостей функції Гріна було б виконано. Наприклад:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{n-1} a_j(\xi) y_j(x), & x < \xi \\ \sum_{j=0}^{n-1} b_j(\xi) y_j(x), & x > \xi \end{cases} \quad (2.50)$$

Помітимо, що властивість 3) теореми для областей Δ_1 та Δ_2 виконано завдяки тому, що фундаментальні розв'язки мають неперервні похідні до n -го порядку.

Будемо намагатися виконати властивості, які залишилися. З цією метою підрахуємо m -ту похідну функції:

$$G^{(m)}(x, \xi) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{n-1} a_j(\xi) y_j^{(m)}(x), & x < \xi \\ \sum_{j=0}^{n-1} b_j(\xi) y_j^{(m)}(x), & x > \xi \end{cases} \quad m=\overline{0, n-1}$$

Для того, щоб виконувалась неперервність всіх похідних до n -го порядку, вимагатимемо умову:

$$\begin{aligned} G^{(m)}(x, x-0) - G^{(m)}(x, x+0) &= \sum_{j=0}^{n-1} b_j(x) y_j^{(m)}(x) - \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) y_j^{(m)}(x) = \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (b_j(x) - a_j(x)) y_j^{(m)}(x) \text{ при } m=\overline{0, n-2}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$G^{(m)}(x, x-0) - G^{(m)}(x, x+0) = \sum_{j=0}^{n-1} (b_j(x) - a_j(x)) y_j^{(m)}(x) = \frac{1}{p_0(x)} \quad (2.52)$$

при $\overline{m=n-1}$.

Рівності (2.51), (2.52) утворили неоднорідну систему n рівнянь з n невідомими коефіцієнтами $c_j(x) = b_j(x) - a_j(x)$, $\overline{j=0, n-1}$.

Визначник отриманої системи відмінений від нуля $\det \|y_j^{(m)}\|_{j,m=0}^{n-1} \neq 0$ за рахунок того, що $\{y_j(x)\} \in \text{ФСР}$. Отже, система має єдиний розв'язок, тобто коефіцієнти $c_j(x)$ відшукаємо єдиним чином. Першу та другу властивості теореми задоволено.

Для того, щоб виконувалась властивість 4), потрібно підібрати коефіцієнти. Підрахуємо похідні від функції $G(x, \xi)$ за першою змінною на обох кінцях інтервалу $x \in (a, b)$:

$$G^{(m)}(a, \xi) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(\xi) y_j^{(m)}(a), \quad G^{(m)}(b, \xi) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j(\xi) y_j^{(m)}(b).$$

Знайдемо тепер $V_i^a[G(x, \xi)]$ та $V_i^b[G(x, \xi)]$:

$$V_i^a[G(x, \xi)] = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_{im} G^{(m)}(a, \xi),$$

$$V_i^b[G(x, \xi)] = \sum_{m=0}^{n-1} \beta_{im} G^{(m)}(b, \xi).$$

Сформуємо граничний функціонал:

$$\begin{aligned} V_i[G(x, \xi)] &= V_i^a[G(x, \xi)] + V_i^b[G(x, \xi)] = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_{im} \sum_{j=0}^{n-1} a_j(\xi) y_j^{(m)}(a) + \\ &+ \sum_{m=0}^{n-1} \beta_{im} \sum_{j=0}^{n-1} b_j(\xi) y_j^{(m)}(b) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(\xi) V_i^a[y_j(x)] + \sum_{j=0}^{n-1} b_j(\xi) V_i^b[y_j(x)] \quad (2.53) \end{aligned}$$

Для виконання четвертої умови будемо вимагати, щоб граничний функціонал дорівнював нулеві:

$$V_i[G(x, \xi)] = 0.$$

Додамо та віднімемо у правій частині співвідношення (2.53) вираз $\sum_{j=0}^{n-1} a_j(\xi) V_i^b[y_j(x)]$:

$$V_i[G(x, \xi)] = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(\xi) V_i^a[y_j(x)] + \sum_{j=0}^{n-1} c_j(\xi) V_i^b[y_j(x)] - \sum_{j=0}^{n-1} a_j(\xi) V_i^b[y_j(x)] = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(\xi) V_i[y_j(x)] + \sum_{j=0}^{n-1} c_j(\xi) V_i^b[y_j(x)] = 0. \quad (2.54)$$

Коефіцієнти $c_j(\xi) = b_j(\xi) - a_j(\xi)$ було визначено раніше. Таким чином, отримано наступну рівність:

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j(\xi) V_i[y_j(x)] = - \sum_{j=0}^{n-1} c_j(\xi) V_i^b[y_j(x)] \quad (2.55)$$

Система (2.55) є системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $a_j(\xi)$. Визначник цієї системи відмінний від нуля $\det \|V_i[y_j(x)]\|_0^{n-1} \neq 0$. Це забезпечено тим, що крайові умови є неособливими. Отже, система є розв'язуємою, всі її коефіцієнти визначені. Виконано всі чотири умови та закінчено побудову функції Гріна.

3.5. Самоспряжені крайові задачі та їх зв'язки з задачею Штурма-Ліувилля

Нехай задано лінійний диференціальний оператор n -го порядку:

$$L_n y(x) = \sum_{j=0}^n p_j(x) y^{(n-j)}(x) = f(x). \quad (2.56)$$

Тоді спряжений до нього оператор має вигляд:

$$L_n^* y(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j [p_j(x) y(x)]^{(n-j)}. \quad (2.57)$$

У випадку, якщо $L_n y(x) = L_n^* y(x)$, оператор називають самоспряженим.

Введемо визначення самоспряженої крайової задачі.

Крайова задача
$$\begin{cases} L_n y(x) = f(x), & a < x < b \\ V_i[y(x)] = 0, & i = \overline{0, n-1} \end{cases}$$
 називається

самоспряженою, якщо виконано дві умови:

- 1) оператор задачі є самоспряжений;
- 2) існують дві функції $u(x)$ та $v(x)$, які задовольняють вихідну крайову задачу, то для них виконується інтегральна умова:

$$\int_a^b [v(x)L_n u(x) - u(x)L_n v(x)] dx = 0.$$

3.6. Теорема про симетричність функції Гріна самоспряженої крайової задачі

Теорема. Функція Гріна самоспряженої крайової задачі є симетричною: $G(x, \xi) = G(\xi, x)$.

Доведення. Нехай маємо самоспряжену крайову задачу:

$$\begin{cases} L_n y(x) = f(x), & x \in (a, b), \\ V_i[y(x)] = 0, & i = \overline{0, n-1}. \end{cases} \quad (2.58)$$

За ознакою самоспряженої крайової задачі випливає, що:

1) $L_n(y(x)) = L_n^*(y(x))$, тобто диференціальний оператор задачі є самоспряженим.

2) Виконується інтегральна умова для двох функцій, що задовольняють крайовій задачі (2.58):

$$\begin{cases} L_n \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} = f(x), & x \in (a, b), \quad i = \overline{0, n-1}, \\ V_i \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} = 0, \end{cases}$$

а саме:

$$\int_a^b [v(x)L_n u(x) - u(x)L_n v(x)] dx = 0. \quad (2.59)$$

Функція Гріна для обох розв'язків є однаковою:

$$u(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi, \quad v(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi.$$

Тоді, підставляючи ці вирази до співвідношення (2.59), отримаємо наступну рівність:

$$\begin{aligned} \int_a^b [v(x)L_n u(x)-u(x)L_n v(x)]dx &= \int_a^b f(x)(v(x)-u(x))dx = \\ &= \int_a^b f(x) \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi dx - \int_a^b f(x) \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi dx = 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Можна записати ці повторні інтеграли, як подвійні:

$$\int_a^b \int_a^b f(x)f(\xi)G(x,\xi)dxd\xi - \int_a^b \int_a^b f(x)f(\xi)G(x,\xi)d\xi dx = 0. \quad (2.61)$$

У першому доданку виразу (2.61) змінимо порядок інтегрування:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b f(\xi)f(x)G(\xi,x)dxd\xi - \int_a^b \int_a^b f(x)f(\xi)G(x,\xi)dxd\xi &= \\ &= \int_a^b \int_a^b f(\xi)f(x)[G(\xi,x)-G(x,\xi)]d\xi dx. \end{aligned}$$

З цього випливає рівність:

$$\int_a^b \int_a^b f(x)f(\xi)[G(x,\xi)-G(\xi,x)]dxd\xi = 0. \quad (2.62)$$

Зведемо позначення $F(x,\xi)=G(x,\xi)-G(\xi,x)$, за допомогою якого висновок (2.62) запишемо у вигляді:

$$\int_a^b \int_a^b f(x)f(\xi)F(x,\xi)dxd\xi = 0. \quad (2.63)$$

З рівності інтеграла нулю ще не випливає, що $F(x,\xi)=0$. Доведемо це, проводячи доведення теореми від протилежного. Нехай $F(x,\xi) \neq 0$, тоді існує деяка точка $x_0 \in (a,b)$ така, що $F(x_0,\xi_0) \neq 0$, наприклад, $F(x_0,\xi_0) > 0$. Оскільки розв'язок крайової задачі, зображений через функцію Гріна, може бути застосований для будь-якої неперервної функції $f(x)$, маємо право вибрати її наступним

чином. Припустимо, що $f(x)$ відмінна від нуля в околі деякої точки $x_0 \neq 0$, а зовні цього околу вона дорівнюватиме нулеві:

$$\begin{cases} f(x_0) \neq 0, & x_0 \in (a; b) \\ f(x) \equiv 0, & x \in (a; x_0) \cup (x_0; b) \end{cases}.$$

Аналогічну поведінку має функція $f(\xi)$

в околі точки ξ_0 . Такий вибір функцій базується на тому, що розв'язок існує для будь-якої неперервної функції у правій частині диференціального рівняння. У такому випадку, не обмежуючи загальності міркувань, можемо вважати, що $f(x_0) > 0$ та $f(\xi_0) > 0$.

Тоді рівність (2.63) прийме вигляд:

$$\int_{\Delta(x_0)} \int_{\Delta(\xi_0)} f(x) f(\xi) F(x, \xi) dx d\xi = 0.$$

Під інтегралом тут стоїть функція, значення якої у точці x_0, ξ_0 , є додатнім $F(x_0) f(\xi_0) F(x_0, \xi_0) > 0$. Отже, інтеграл від неї у лівій частині рівності має бути додатнім: $\int_{\Delta(x_0)} \int_{\Delta(\xi_0)} f(x) f(\xi) F(x, \xi) dx d\xi > 0$

Отримали протиріччя, з якого випливає, що функція $F(x, \xi) \equiv 0$, а з цього, у свою чергу, випливає, що $G(x, \xi) \equiv G(\xi, x)$.

3.7. Зведення задачі Штурма-Ліувилля до інтегрального рівняння

Необхідність розв'язання задачі Штурма-Ліувилля виникає кожного разу, коли необхідно звести диференціальне рівняння у часткових похідних до звичайного диференціального рівняння.

$$\begin{aligned} r_1(x) [p_1(x) u'(x, y)]' - q(x) u(x, y) + r_2(y) [p_2(y) u''(x, y)]'' - \\ - q_2(y) u(x, y) = f(x, y), \quad a_0 < x < a_1, \quad b_0 < y < b_1. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Під час застосування для цього методу інтегральних перетворень потрібно побудувати ядро перетворення, яке має задовольнити таку крайову задачу:

$$\begin{cases} r_1(x) [K_1'(x, \alpha) p_1(x)]' - q_1(x) K_1(x, \alpha) = -\alpha^2 K_1(x, \alpha), & a_0 < x < a_1 \\ V_i^m [K_1(x, \alpha)] = 0, & i=0, 1 \end{cases} \quad (2.65)$$

Спростимо цю задачу Штурма-Ліувилля та зведемо її до стандартного вигляду. Позначимо $\alpha^2 = \lambda$, $K_1(x, \alpha) = y_\lambda(x)$ та помножимо обидві частини рівняння (2.65) на $\left(-\frac{1}{r(x)}\right)$. Надалі будемо вважати $r_1(x) = r(x)$, $p_1(x) =$

$$= p(x), \frac{q_1(x)}{r_1(x)} = q(x). \quad \text{Тоді крайова задача (2.65) буде}$$

записуватися наступним чином:

$$\begin{cases} -[p(x)y'_\lambda(x)]' + q(x)y_\lambda(x) = \frac{\lambda y_\lambda(x)}{r(x)}, & a_0 < x < a_1 \\ V_i^m[y_\lambda(x)] = 0, & i=0,1 \end{cases} \quad (2.66)$$

Форма (2.66) є стандартною формою крайової задачі Штурма-Ліувилля. Введемо оператор Штурма-Ліувилля:

$$\begin{cases} Sy_\lambda(x) = \frac{\lambda y_\lambda(x)}{r(x)}, & a_0 < x < a_1 \\ V_i^m[y_\lambda(x)] = 0, & i=0,1 \end{cases}, \quad (2.67)$$

де $Sy_\lambda(x) = -[p(x)y'_\lambda(x)]' + q_\lambda(x)y_\lambda(x)$.

Існує два основних випадки задачі Штурма-Ліувилля (2.67):

1) регулярний випадок, якщо: а) інтервал, на якому змінюється змінна, є скінченний; б) всі функції та їх похідні є неперервними на цьому інтервалі; в) функція $r(x) > 0$, $x \in [a; b]$.

2) нерегулярний випадок, якщо порушена хоча б одна з умов а), б), в).

Розглянемо допоміжну крайову задачу та доведемо, що вона є самоспряженою:

$$\begin{cases} Sy(x) = f(x), & a < x < b \\ V_i^m[y(x)] = 0, & i=0,1 \end{cases} \quad (2.68)$$

Для цього спершу доведемо, що диференціальний оператор S є самоспряженим:

$$Sy(x) = -[p(x)y'(x)]' - q(x)y(x) = -p(x)y''(x) - p'(x)y'(x) + q(x)y(x).$$

Якщо згадати загальний вигляд диференціального оператора другого порядку

$L_2 y(x) = p_0(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x)$, та спряжений до нього можна записати наступним чином:

$$\begin{aligned} L_2^* y(x) &= [p_0(x)y(x)]'' - [p_1(x)y(x)]' + p_2(x)y(x) = \\ &= p_0(x)y'' + y'[2p_0'(x) - p_1(x)] + y(x)[p_0''(x) - p_1'(x) + p_2(x)]. \end{aligned}$$

Порівняємо оператор $L_2 y(x)$ з оператором Штурма-Ліувилля $Sy(x)$. Як бачимо, $p_0(x) = -p(x)$, $p_1(x) = -p'(x)$, $p_2(x) = q(x)$.

Тепер порівняємо коефіцієнти оператора Штурма-Ліувилля з коефіцієнтами спряженого оператора. Коефіцієнти при старшій похідній збігаються. Порівняємо їх при першій похідній: $-p'(x) = 2(-p'(x)) + p'(x) = -p'(x)$. Далі проведемо порівняння при значеннях функції $y(x)$:

$$q(x) = (-p(x))'' + (p'(x))' + q(x) = q(x).$$

Знайдемо умови, за виконання яких оператор Штурма-Ліувилля є самоспряженим: 1) $p_1(x) = p_0'(x)$; 2) $p_0''(x) - p_1'(x) = 0$.

Тепер залишається перевірити інтегральну умову. Нехай існує дві функції $u(x)$ та $v(x)$, що задовольняють дві наступні півдорідні крайові задачі:

$$\begin{cases} S \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} = f(x), & x \in (a; b) \\ V_i^m \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} = 0, & i=0,1 \end{cases}$$

Доведемо, що виконується рівність $\int_a^b [v(x)S(u(x)) - u(x)Sv(x)]dx = 0$. Дійсно, підставимо замість скороченого запису оператора Штурма-Ліувилля його повну форму:

$$\begin{aligned} &\int_a^b [v(x)[(-pu') + q(x)u(x)] - u(x)[(-pv')' + q(x)v(x)]]dx = \\ &= \int_a^b [-v(x)(pu')' + u(x)(pv')']dx. \end{aligned}$$

Отриманий інтеграл проінтегруємо за частинами:

$$-v(x)\beta u'(x)\Big|_a^b + u(x)p v'(x)\Big|_a^b + \int_a^b v'(x) p u'(x) dx - \int_a^b u'(x) p v'(x) dx. \quad (2.69)$$

Для того, щоб підрахувати у виразі (2.69) підстановки, використаємо крайові функціонали:

$$V_i^m \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{i0} u(a_i) - \alpha_{i1} u'(a_i) \\ \alpha_{i0} v(a_i) - \alpha_{i1} v'(a_i) \end{bmatrix} = 0, \quad i=0,1; \quad \alpha_{i1} \neq 0; \quad a_0=a, \quad a_1=b.$$

Звідки маємо, що $\begin{bmatrix} u'(a_i) \\ v'(a_i) \end{bmatrix} = -\frac{\alpha_{i0}}{\alpha_{i1}} \begin{bmatrix} u(a_i) \\ v(a_i) \end{bmatrix}$. Підставимо до виразу

(2.69) отримані співвідношення:

$$\begin{aligned} & -v(b)p(b)u'(b) + v(a_0)p(a_0)u'(a_0) + \\ & + u(b)p(b)v'(b) - u(a)p(a)v'(a) = -v(b)p(b)\left(-\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}u(b)\right) + \\ & + v(a)p(a)\left(-\frac{\alpha_{00}}{\alpha_{01}}u(a)\right) + u(b)p(b)\left(-\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}v(b)\right) - u(a)p(a)\left(-\frac{\alpha_{00}}{\alpha_{01}}v(a)\right) = 0 \end{aligned}$$

Інтегральну умову виконано. Тим самим доведено, що крайова задача Штурма-Ліувилля є самоспряженою, отже, її розв'язок можна записати за допомогою функції Гріна:

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (2.70)$$

Нехай маємо наступну крайову задачу:

$$\begin{cases} Sy(x) = \frac{\lambda}{r(x)} y(x), & x \in (a, b) \\ V_i^m[y(x)] = 0, & i=0,1 \end{cases} \quad (2.71)$$

Тут $y(x)$ – є власні функції задачі Штурма-Ліувилля. З доведеною вище формули (2.70) випливає, що розв'язок задачі (2.71) можна зобразити у формі:

$$y(x) = \lambda \int_a^b \frac{G(x, \xi)}{r(\xi)} y(\xi) d\xi; \quad Sy(x) = \lambda S \left[\int_a^b \frac{G(x, \xi)}{r(\xi)} y(\xi) d\xi \right]. \quad (2.72)$$

Тобто показано, що розв'язати задачу Штурма-Ліувилля є еквівалентним до розв'язання рівняння (2.72). Тепер потрібно

довести зворотнє: розв'язання рівняння (2.72) еквівалентно розв'язанню відповідної задачі Штурма-Ліувилля – будь-який розв'язок рівняння (2.72) є розв'язком крайової задачі Штурма-Ліувилля. Застосуємо до рівняння (2.72) диференціальний оператор, тобто отримано праву частину рівняння, а з цього випливає, що диференціальне рівняння задачі задоволено. Перевіримо, що виконуються граничні умови. Це має місце за рахунок того, що функцію Гріна побудовано таким чином, що граничні умови мають бути задоволені. Отже, показано, що розв'язок рівняння (2.72) є розв'язком задачі Штурма-Ліувилля. Доведемо повну еквівалентність задачі Штурма-Ліувилля та інтегрального рівняння.

Покажемо, що нетривіальний розв'язок задачі виникає лише для певних значень параметра λ , $\lambda = \overline{\lambda_n}$, $n=0, \infty$, яких є лічильна множина. З цією метою приведемо інтегральне рівняння (2.72) до стандартного вигляду, для чого помножимо обидві частини на $\frac{1}{\sqrt{r(x)}}$ та введемо

позначення $\varphi(x) = \frac{y(x)}{\sqrt{r(x)}}$. Рівняння (2.72) набуває вигляду:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad (2.73)$$

де $K(x, \xi) = \frac{G(x, \xi)}{\sqrt{r(x)}\sqrt{r(\xi)}}$. Або в іншій формі можна записати:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = 0, \quad x \in (a; b). \quad (2.74)$$

Це є однорідне інтегральне рівняння Фредгольма з симетричним ядром (останнє випливає з властивості функції Гріна самоспряженої задачі). З властивостей інтегрального рівняння (2.74) випливає:

1) Інтегральне рівняння з симетричним ядром, має лічильну множину власних чисел λ_n , $n=0, \infty$. Розв'язки, що їм відповідають, – власні функції $\varphi_n(x)$ задовольняють рівняння:

$$\varphi_n(x) - \lambda_n \int_a^b K(x, \xi) \varphi_n(\xi) d\xi = 0, \quad x \in (a; b).$$

2) Власні функції, що відповідають різним власним значенням є ортогональними:

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = (\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{n,m} \|\varphi_{n,m}\|^2. \quad (2.75)$$

Їх можна пронормувати. Якщо власні функції задачі Штурма-Ліувилля позначено $y(x)=Y(x)$, та, враховуючи, що власні функції інтегрального рівняння дорівнюють:

$$\varphi_n(x) = \frac{Y_n(x)}{\sqrt{r(x)}}, \quad (2.76)$$

отримаємо умову ортогональності власних функцій Штурма-Ліувилля. З цією метою підставимо вираз (2.76) до співвідношення (2.75):

$$\int_a^b \frac{Y_n(x)}{\sqrt{r(x)}} \cdot \frac{Y_m(x)}{\sqrt{r(x)}} dx = \int_a^b \frac{Y_n(x) Y_m(x)}{r(x)} dx = (Y_n, Y_m)_r = \delta_{n,m} \quad (2.77)$$

Доведена ортогональність власних функцій задачі Штурма-Ліувилля з вагою $\frac{1}{r(x)}$.

3) Доведемо тепер третю властивість власних функцій задачі Штурма-Ліувилля, що носить назву теореми розвинення Стеклова.

3.8. Теорема Стеклова

Теорема. Будь-яку функцію $h(x)$, двічі неперервно диференціюєму на інтервалі $[a, b]$ $h(x) \in C^2[a, b]$ та задовольняючу крайовим умовам Штурма-Ліувилля $V_i^m[h(x)] = 0$, можна розвинути в рівномірно збіжний ряд за власними функціями задачі Штурма-Ліувилля.

Доведення. Нагадаємо теорему Гільберта-Шмідта з теорії інтегральних рівнянь, яка стверджує, що якщо функцію $h^*(x)$ зображено у вигляді:

$$h^*(x) = \int_a^b K(x, \xi) g^*(\xi) d\xi, \quad (2.78)$$

то функцію $K(x, \xi)$ може бути розвинене у рівномірно збіжний ряд за власними функціями інтегрального рівняння (2.78):

$$h^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (h^*, \varphi_n) \varphi_n(x), \quad (2.79)$$

$$\text{де } (h^*, \varphi_n) = \int_a^b h^*(\xi) \varphi_n(\xi) d\xi.$$

Використаємо цю теорему надалі під час доведення теореми Стеклова.

Якщо за умовою теореми функція $h(x) \in C^2[a; b]$, то до неї можна застосувати оператор Штурма-Ліувилля: $S[h(x)] = g(x)$, де $g(x) \in C[a; b]$, $x \in [a; b]$. Згідно з умовами теореми, маємо $V_i[h(x)] = 0$, $i=0, 1$. Для отриманої крайової задачі вже раніше побудовано функцію Гріна $G(x, \xi)$. Отже, маємо записати розв'язок у вигляді:

$$h(x) = \int_a^b G(x, \xi) g(\xi) d\xi.$$

Домножимо обидві частини рівності на $\frac{1}{\sqrt{r(x)}}$ та під знаком інтеграла помножимо і поділимо на $\sqrt{r(x)}$. Введемо нові позначення

$$h_*(x) = \frac{h(x)}{\sqrt{r(x)}}, \quad g_*(\xi) = g(\xi) \sqrt{r(\xi)}.$$

Отримаємо інтегральне рівняння:

$$h_*(x) = \int_a^b K(x, \xi) g_*(\xi) d\xi,$$

тут $K(x, \xi) = \frac{G(x, \xi)}{\sqrt{r(\xi)} \sqrt{r(x)}}$. За теоремою Гільберта-Шмідта можемо зобразити функцію $h_*(x)$ у формі:

$$h_*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (h_*, \varphi_n) \varphi_n(x)$$

Запишемо скалярний добуток через власні функції задачі Штурма-Ліувилля:

$$\frac{h(x)}{\sqrt{r(x)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b h_*(\xi) \varphi_n(\xi) d\xi \frac{Y_n(x)}{\sqrt{r(x)}}, \quad (2.80)$$

$$\text{або } h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n Y_n(x),$$

$$\text{де } C_n = \int_a^b \frac{h(\xi)}{r(\xi)} \varphi_n(\xi) d\xi = \int_a^b \frac{h(\xi)}{\sqrt{r(\xi)}} \frac{Y_n(\xi)}{\sqrt{r(\xi)}} d\xi = (h, Y_n)_r.$$

Отже, теорему Стеклова доведено.

3.9. Виведення формули обернення для інтегрального перетворення на скінченному проміжку

Нехай маємо диференціальне рівняння вигляду (2.64), до якого застосовано інтегральне перетворення за змінною x з ядром перетворення $K_1(x, \alpha)$:

$$u_\alpha(y) = \int_{a_0}^{a_1} \frac{K_1(x, \alpha)}{r_1(x)} u(x, y) dx.$$

Як показано вище, ядро цього перетворення має задовольняти крайову задачу Штурма-Ліувилля і є її власною функцією $Y_n(x)$, яка відповідає певному власному значенню λ_n :

$$u_n(y) = \int_a^b \frac{Y_n(x)}{r(x)} u(x, y) dy. \quad (2.81)$$

На формулу (2.81) можна дивитися, як на зображення трансформанти інтегрального перетворення. Вихідна функція $u(x, y)$ має двічі неперервні похідні $u(x, y) \in C_1^2(a, b)$ та задовольняє граничні умови Штурма-Ліувилля $V_i^m[u(x, y)] = 0$. Згідно з теоремою Стеклова її можна розвинути в ряд за системою власних функцій $\{Y_n(x)\}$ відповідної задачі Штурма-Ліувилля:

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(y) Y_n(x). \quad (2.82)$$

Знайдемо зображення коефіцієнтів розвинення (2.82). З цією метою помножимо обидві частини рівності (2.82) на множник $\frac{Y_m(x)}{r(x)}$

та проінтегруємо на проміжку $x \in [a; b]$:

$$\int_a^b \frac{u(x, y) Y_m(x)}{r(x)} dx = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(y) \int_a^b \frac{Y_n(x) Y_m(x)}{r(x)} dx = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(y) (Y_n, Y_m)_r. \quad (2.83)$$

Скалярний добуток, що входить у вираз (2.83), дорівнюватиме:

$$(Y_n, Y_m)_r = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \int_a^b \frac{Y_n^2(x)}{r(x)} dx = N_n^2 & n = m \end{cases}$$

У випадку $n=m$ маємо $u_m(y) = C_m N_m^2$, звідки випливає, що $C_m = \frac{u_m(y)}{N_m^2}$. Підставивши отримане співвідношення до розвинення (40), здобудемо обернену формулу інтегрального перетворення на скінченному проміжку $x \in [a; b]$, з прямим перетворенням (39):

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(y)}{N_n^2} Y_n(x). \quad (2.84)$$

Таким чином, ми познайомилися з таким важливим поняттям як функція Гріна одномірних крайових задач та розглянули два різних методи її побудови.

Отже, зараз познайомимось з найважливішими методами розв'язання задач більш детально та ретельно дослідимо властивості рівнянь основних типів математичної фізики.

III. РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ З ЕЛЕМЕНТАМИ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛІВ

Матеріал цього розділу присвячено дослідженню еліптичних рівнянь (найважливішим прикладом якого є рівняння Лапласа та Пуасона), а також особливо важливий з точки зору різних застосувань теорії потенціалу.

1. Побудова фундаментальної функції рівняння Лапласа. Її фізичний сенс

Нехай функція $u(x)$ – функція багатьох змінних $u(x)=u(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тут x можна придати сенс вектора, а x_1, x_2, \dots, x_n – його проекцій на вісі. Як відомо, відстань між двома довільними точками x та y n – вимірному простору вводиться за формулою:

$$|x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\dots+(x_n-y_n)^2},$$

а для направляючих косинусів є вірною формула: $\cos \alpha_j = \frac{x_j - y_j}{|x - y|}$,

$j=\overline{1, n}$. Проілюструємо це наочно для просторового випадку ($n=3$)

Розглянемо рівняння Лапласа

$$\Delta u(x)=0, \quad (3.1)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

Покажемо, що функція $\Phi_n(x, y) = \frac{1}{|x-y|}$, $x \neq y$ є фундаментальним розв'язком рівняння (3.1). Для цього підрахуємо похідні $\frac{\partial \Phi_n(x, y)}{\partial x_j}$, $j=\overline{1, n}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_n(x, y)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right)^{-1/2} \right] = \\
&= - \frac{x_j - y_j}{\left(\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} = - \frac{x_j - y_j}{|x - y|^3} = - \frac{\cos \alpha_j}{|x - y|^2}.
\end{aligned}$$

Підрахуємо тепер другу похідну:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi_n(x, y)}{\partial y_j^2} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{x_j - y_j}{\left(\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right)^{3/2}} \right] = \\
&= - \left(\frac{3}{2} \frac{2(x_j - y_j)^2}{\left(\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right)^{5/2}} + \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right)^{3/2}} \right) = \\
&= \frac{3(x_j - y_j)^2}{\left(\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right)^{5/2}} - \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right)^{3/2}} = \\
&= \left[\frac{3(x_j - y_j)^2}{|x - y|^5} - \frac{1}{|x - y|^3} \right] = \frac{1}{|x - y|^5} \left(3(x_j - y_j)^2 - |x - y|^2 \right) \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Зображення другої похідної (3.2) підставимо до рівняння Лапласа (3.1):

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Phi_n(x, y)}{\partial x_j^2} = \frac{1}{|x - y|^5} \left[3 \sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 - n|x - y|^2 \right]. \quad (3.3)$$

Якщо у формулі (3.3) взяти за $n=3$ та врахувати, що $\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 = |x - y|^2$, то рівняння Лапласа (3.1) буде задовільнено автоматично, що і означає, що функція $\Phi_3(x, y) = \frac{1}{|x - y|}$ є його фундаментальним розв'язком.

Аналогічним чином можна показати, що для випадку $n=2$ фундаментальний розв'язок потрібно брати у вигляді $\Phi_2(x, y) = \ln \frac{1}{|x - y|}$. Доведемо цей факт. Нехай:

$$\Phi_2(x, y) = \ln \frac{1}{|x - y|} = \ln \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right)^{1/2}} = -1/2 \ln \left(\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right).$$

Знайдемо першу похідну функції:

$$\frac{\partial \Phi_2(x, y)}{\partial x_j} = -\frac{1}{2} \frac{2(x_j - y_j)}{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2} = -\frac{x_j - y_j}{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2} = -\frac{x_j - y_j}{|x - y|^2}.$$

Для другої похідної функції отримаємо:

$$\frac{\partial^2 \Phi_2(x, y)}{\partial x_j^2} = \frac{2(x_j - y_j)^2}{\left(\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right)^2} - \frac{1}{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2} = \frac{2(x_j - y_j)^2}{|x - y|^4} - \frac{1}{|x - y|^2}.$$

Одержані зображення для похідних підставимо до рівняння Лапласа (3.1), де візьмемо $n=2$:

$$\Delta \Phi_2(x, y) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 \Phi_2(x, y)}{\partial x_j^2} = \frac{2 \sum_{j=1}^2 (x_j - y_j)^2}{|x - y|^4} - \frac{2}{|x - y|^2} = \frac{2|x - y|^2}{|x - y|^4} - \frac{2}{|x - y|^2} = 0.$$

Встановимо фізичний сенс побудованого фундаментального розв'язку.

Використаємо закон всесвітнього тяжіння, який проілюструємо на прикладі. Нехай у просторі розташовано два тіла з масами m_1 та m_0 відповідно, що притягуються одне до одного з силою F ,

абсолютна величина якої прямо пропорціональна масам цих тіл та обернено пропорціональна квадрату відстані між ними: $|\vec{F}| = \frac{m_0 m_1}{|x-y|^2}$,

де $\vec{F} = F_1 \vec{i}_1 + F_2 \vec{i}_2 + F_3 \vec{i}_3$, \vec{i}_j – направляючі орти,

$$F_j = |\vec{F}| \cos \alpha_j = \frac{m_0 m_1 \cos \alpha_j}{|x-y|^2} = - \frac{m_0 m_1 (x_j - y_j)}{|x-y|^2 |x-y|}.$$

Якщо припустити, що $m_1=1$, то $F_j = - \frac{m_0 (x_j - y_j)}{|x-y|^3}$, $j=\overline{1,3}$.

Введемо означення *потенціалу силового поля*. Функція $V(x)$ є потенціалом силового поля, якщо її градієнт зображує силу тяжіння одиничної маси до заданої:

$$\nabla V(x) \equiv \text{grad} V(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \vec{i}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \vec{i}_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3} \vec{i}_3.$$

За цим означенням, як бачимо, фундаментальний розв'язок – це є потенціал силового поля, який визначає тяжіння одиничної маси, що зосереджена у точці x до одиничної маси, що зосереджена у точці y . Це і визначає *фізичний сенс фундаментальної функції*.

Наприклад, у випадку $n=3$ маємо:

$$\begin{aligned} \nabla \Phi_3(x, y) &= \nabla \left(\frac{1}{|x-y|} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{|x-y|} \vec{i}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{|x-y|} \vec{i}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{|x-y|} \vec{i}_3 = \\ &= - \frac{(x_1 - y_1)}{|x-y|^3} \vec{i}_1 - \frac{(x_2 - y_2)}{|x-y|^3} \vec{i}_2 - \frac{(x_3 - y_3)}{|x-y|^3} \vec{i}_3 = F_1 \vec{i}_1 + F_2 \vec{i}_2 + F_3 \vec{i}_3. \end{aligned}$$

Розглянемо випадок, коли у точках $y^{(j)} (j=\overline{1, n})$ зосереджені маси $m_j (j=\overline{1, n})$. Потенціал, який створюється цими масами та притягуючи одиничну масу, зосереджену у точці x , описується за формулою:

$$V(x) = \frac{m_1}{|x-y^{(1)}|} + \frac{m_2}{|x-y^{(2)}|} + \dots + \frac{m_n}{|x-y^{(n)}|} = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{|x-y^{(j)}|}.$$

2. Об'ємні та поверхневі потенціали

З'ясуємо, який потенціал буде утворюватися масою, що розподілена у деякому об'ємі D . Для цього розіб'ємо об'єм на нескінченно малі паралелепіпеди. Виберемо серед них елементарний паралелепіпед довільного об'єму $dx_1 dx_2 dx_3$ та знайдемо його елементарну масу $m = \rho(y) dx_1 dx_2 dx_3 = \rho(y) dD$, де $\rho(y)$ – густина. Припускаючи, що тіло є однорідним, підсумовуємо потенціали кожного елементу $\frac{\rho(y) dD}{|x-y|}$. Підсумовування нескінченно малих приведе до інтеграла:

$$V_0(x) = \iiint_D \frac{\rho(y) dD}{|x-y|} = \iiint_D \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy_1 dy_2 dy_3 = \iiint_D \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy \quad (3.4)$$

Формула (3.4) описує *об'ємний (Ньютоновський) потенціал*. Якщо $n=2$, то, використовуючи описану вище технологію, отримаємо:

$$\tilde{V}_0(x) = \iint_{\Omega} \ln \frac{1}{|x-y|} \rho_*(y) dy_1 dy_2. \quad (3.5)$$

Це і є *логарифмічний потенціал* маси, що розподілений на площині Ω з густиною $\rho_*(y)$.

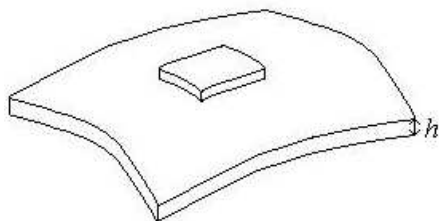


Рис. 7. Нескінченно малий елемент оболонки

Розглянемо масу, що розподілена на поверхні (див. рис. 7), де розташована оболонка товщини h .

Виділимо нескінченно малий елемент оболонки, його об'єм дорівнюватиме $hd\sigma$, а маса у точці y на серединній поверхні визначатиметься виразом $\rho_0(y)hd\sigma$ або, якщо ввести функцію $\tilde{\rho}_0(y) = \rho_0(y)h$, то маса дорівнюватиме $\tilde{\rho}_0(y)d\sigma$. Тоді потенціал *простого шару* запишемо за формулою:

$$V_1(x) = \int_{\sigma} \frac{\tilde{\rho}_0(y) d\sigma}{|x-y|}.$$

Якщо $n=2$, замість поверхні розглянемо вісь стрижня довжини l . Вибираючи його елементарну ділянку dl та припускаючи, що

густину, що віднесена до одиниці довжини стрижня $\tilde{S}(y)$, запишемо логарифмічний потенціал простого шару:

$$V_1(x) = \int_l \ln \frac{1}{|x-y|} \tilde{\rho}(y) dl.$$

3. Діполі та потенціал подвійного шару

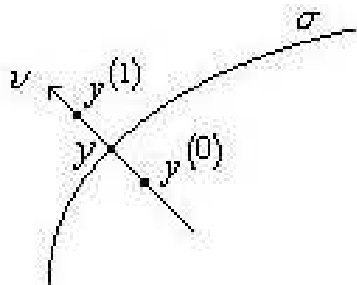


Рис. 8. Напрямок нормалі

Під час викладення наступного матеріалу буде застосовано поняття “від’ємна маса”, що з фізичної точки зору є неможливим. Для того, щоб внести фізичну трактовку цього поняття, легше уявити від’ємно та додатне заряджені маси, що, як відомо, має місце в електростатиці.

Розглянемо поверхню та виберемо на ній точку y (рис. 8). Проведемо нормаль v в цій точці та візьмемо на нормалі точки y^1 та y^0 . Будемо вважати, що у точці y^1 зосереджена додатна маса, а у точці y^0 – від’ємна. Відшукаємо потенціал силового поля, що утворюється цими масами:

$$V_1(x) = \frac{m_0}{|x-y^1|} - \frac{m_0}{|x-y^0|}. \quad (3.6)$$

Формула (3.6) нагадує формулу з механіки, де визначено пару сил. Диполем будемо називати дві маси, що однакові за величиною та протилежно заряджені. Визначимо момент диполя за формулою: $m(y) = m_0 |y^1 - y^0|$. Знайдемо межу потенціалу силового поля, прямуючи y^1, y^0 до точки y (враховуючи при цьому, що $|y^1 - y^0| \rightarrow 0$, коли $y^1, y^0 \rightarrow y$):

$$\begin{aligned} \lim_{y^1, y^0 \rightarrow y} V_1(x) &= \lim_{y^1, y^0 \rightarrow y} \left(\frac{m_0}{|x-y^1|} - \frac{m_0}{|x-y^0|} \right) \frac{|y^1 - y^0|}{|y^1 - y^0|} = \\ &= \lim_{y^1, y^0 \rightarrow y} \left(m_0 |y^1 - y^0| \left(\frac{1}{|x-y^1|} - \frac{1}{|x-y^0|} \right) \frac{1}{|y^1 - y^0|} \right). \end{aligned}$$

Множник $\frac{1}{|y^1 - y^0|} \left(\frac{1}{|x - y^1|} - \frac{1}{|x - y^0|} \right) -$ це приращення фундаментальної функції $\Phi = \frac{1}{|x - y|}$, а множник $m_0 |y^1 - y^0| -$ момент диполя. Отже, отримано:

$$\lim_{y^1, y^0 \rightarrow y} V_1(x) = m(y) \frac{\partial}{\partial v_y} \left(\frac{1}{|x - y|} \right). \quad (3.7)$$

Формула (3.7) визначає *силове поле диполя*.

Маємо зазначити, що аналогічні міркування проводяться в механіці під час виведення величини зосередженого моменту в заданій точці. Процедура виведення складається з того, що зближають сили, які утворюють пару сил, збільшуючи їх величину так, щоб момент пари залишався незмінним та рівним зосередженому моменту. Аналогічним чином, під час виведення формули (3.7), зближуючи відстань, водночас збільшуємо масу так, щоб момент диполя залишався незмінним.

Введемо до розгляду *потенціал подвійного шару*. З цією метою уявимо два шари, серединні поверхні яких паралельні одна до одної та паралельні поверхні (рис. 9). Припустимо, що один з шарів заряджене додатне, а інший – від’ємне.

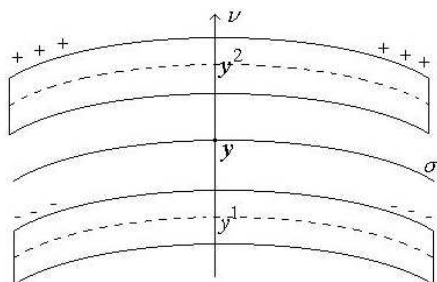


Рис. 9. Два різнозаряджені шари

Проведемо нормаль v до поверхні у точці y . В кожному з шарів виберемо на нормалі v точки y^1 та y^2 симетрично відносно точки y таким чином, щоб напрямок від y^1 до y^2 збігався з напрямком вектора v . У точках y^1 та y^2 кожного з шарів розташуємо маси, що заряджені

протилежними за знаком зарядами.

Це утворює різницю потенціалів:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \mu_0 \Phi_n(x, y^2) - \mu_0 \Phi_n(x, y^1) = \mu_0 \frac{1}{|x - y^2|} - \mu_0 \frac{1}{|x - y^1|} = \\ &= \mu_0 |y^1 - y^2| \left(\frac{1}{|x - y^2|} - \frac{1}{|x - y^1|} \right) \cdot \frac{1}{|y^1 - y^2|}. \end{aligned}$$

Спрямуємо y^1, y^2 до y так, щоб величина моменту диполя $\mu_0 |y^1 - y^2| = m(y)$ залишалася постійною. Тоді потенціал диполя у точці x буде наступним:

$$u_0(x) = \lim_{|y^2 - y^1| \rightarrow 0} m(y) \frac{\Phi_n(x, y^2) - \Phi(x, y^1)}{|y^2 - y^1|} = m(y) \frac{\partial \Phi_n(x, y)}{\partial v_y}. \quad (3.8)$$

Отже, силове поле нескінченно малої ділянки дорівнюватиме $u_0(x) d\sigma$. Знайдемо потенціал у точці x , що утворюється всіма диполями, які розподілені на поверхні σ :

$$V_2(x) = \int_{\sigma} m(y) \frac{\partial \Phi_n(x, y)}{\partial v_y} d\sigma_y. \quad (3.9)$$

Якщо $n=3$, то інтеграл (III.9) називають *потенціалом подвійного шару*. Якщо $n=2$ то *логарифмічним потенціалом подвійного шару*:

$$V_2(x) = \int_{\sigma} m(y) \frac{\partial}{\partial v_y} \ln \frac{1}{|x-y|} d\sigma_y. \quad (3.10)$$

4. Основна властивість потенціалів

Покажемо, що всі потенціали задовольняють рівняння Лапласа, тобто є *гармонічними функціями*. Це основна властивість потенціалів.

Теорема. Потенціали $V_j(x)$, $j=0, 2$ задовольняють рівняння Лапласа:

$\Delta V_j(x) = 0$, $j=0, 2$ у будь-якій точці, крім точок області інтегрування.

Доведення

Покажемо, що теорема виконується для найбільш складного випадку потенціалу подвійного шару. У решті випадків доведення проводитиметься за аналогічною схемою.

Доведемо, що $\Delta V_2(x) = 0$, якщо точка x не належить поверхні σ (отже, під інтегралом $x \neq y$). Підрахуємо похідну:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_y} \frac{1}{|x-y|} &= \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{|x-y|} \cos(v_y, y_1) + \frac{\partial}{\partial y_2} \frac{1}{|x-y|} \cos(v_y, y_2) + \frac{\partial}{\partial y_3} \frac{1}{|x-y|} \cos(v_y, y_3) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{|x-y|} \cos(v_y, y_i). \end{aligned}$$

З математичного аналізу відомо, що для того, щоб диференціальний оператор можна було внести під знак інтеграла, достатньо, щоб підінтегральна функція була неперервною.

В нашому випадку це має місце, бо всі похідні неперервні при $x \neq y$. Внесемо похідну під знак інтеграла в операторі Лапласа, використовуючи формулу (3.9):

$$\Delta V_2(x) = \Delta \int_{\sigma} m(y) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{|x-y|} \cos(v_y, y_i) d\sigma_y. \quad (3.11)$$

У правій частині формули (3.11) внесемо оператор Лапласа у кожний доданок:

$$\Delta V_2(x) = \sum_{i=1}^3 \int_{\sigma} m(y) \cos(v_y, y_i) \frac{\partial}{\partial y_i} \Delta \frac{1}{|x-y|} d\sigma_y = 0. \quad (3.12)$$

Довели, що $\Delta V_2(x) = 0$, якщо $x \neq y$.

5. Формула Гріна.

Теорема про нормальну похідну гармонічної функції

Доведення формули Гріна базується на формулі Остроградського.

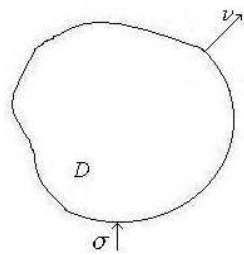


Рис. 10

Нехай функції $Q_i(x)$, $i=1, 3$ задано у області D , яка обмежена кусково-гладкою поверхнею (рис. 10), а v нормаль у будь-якій точці цієї поверхні. Тоді формула Остроградського записується у вигляді:

$$\iiint_D \sum_{i=1}^3 \frac{\partial Q_i(y)}{\partial y_i} dy_1 dy_2 dy_3 = \iint_{\sigma} \sum_{i=1}^3 Q_i(y) \cos(v, y_i) d\sigma_y. \quad (3.13)$$

Формула (3.13) є справедливою, якщо функції $Q_i(y) \in C(D)$, а також $Q_i(y) \in C(\sigma)$ ($i=1, 3$). Візьмемо за ці функції такі:

$Q_i(y) = u(y) \frac{\partial v(y)}{\partial y_i}$, де $u(y), v(y)$ є також двічі диференційованими – $u(y), v(y) \in C(D)$. Підрахуємо похідні функцій:

$$\frac{\partial Q_i(y)}{\partial y_i} = u(y) \frac{\partial^2 v(y)}{\partial y_i^2} + \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} \frac{\partial v(y)}{\partial y_i},$$

після чого проведемо підсумовування:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial Q_i(y)}{\partial y_i} = u(y) \Delta v_y + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} \frac{\partial v(y)}{\partial y_i}. \quad (3.14)$$

Підставимо отриману суму (3.14) у ліву частину формули Остроградського (3.3):

$$\iiint_D \left[u(y) \Delta v(y) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} \frac{\partial v(y)}{\partial y_i} \right] dy = \iint_{\sigma} u(y) \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\partial v(y)}{\partial y_i} \cos(v, y_i) \right] d\sigma_y. \quad (3.15)$$

Можна помітити, що $\sum_{i=1}^3 \frac{\partial v(y)}{\partial y_i} \cos(v, y_i) = \frac{\partial v(y)}{\partial v}$. Якщо тепер для

функції $Q_i(y)$ взяти зображення $Q_i(y) = v(y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} \ (i=\overline{1,3})$ та провести аналогічні міркування, то отримаємо:

$$\begin{aligned} \iiint_D \left[v(y) \Delta u(y) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v(y)}{\partial y_i} \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} \right] dy \\ = \iint_{\sigma} v(y) \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} \cos(v, y_i) \right] d\sigma_y. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Від формули (3.15) віднімемо формулу (3.16):

$$\iiint_D \left[u(y) \Delta v(y) - v(y) \Delta u(y) \right] dy = \iint_{\sigma} \left[u(y) \frac{\partial v(y)}{\partial v} - v(y) \frac{\partial u(y)}{\partial v} \right] d\sigma_y. \quad (3.17)$$

Помітимо, що для того, щоб формула Гріна (3.17) була справедливою, необхідно виконання наступних умов:

$$u(y) \in C^2(D), v(y) \in C^2(D), u(y) \in C^1(\sigma), v(y) \in C^1(\sigma).$$

Слідство. Якщо функція є гармонічною в деякій області, то інтеграл по замкненій області, що цілком лежить в області гармонічності, дорівнює нулеві.

Доведення. Припустимо, що у формулі (3.18) функція $v(y) \equiv 1, y \in D$. Нехай $u(y)$ - функція, яка є гармонічною в області D , отже, $\Delta u(y) = 0, y \in D$. Для функції $v(y)$ маємо $\Delta v(y) \equiv 0$, а також $\frac{\partial v(y)}{\partial v} = 0$ (бо нормальна похідна зображує собою комбінацію основних частинних похідних, які дорівнюють нулеві). Виходячи з формули Гріна, отримаємо:

$$\iint_{\sigma} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} d\sigma y = 0. \quad (3.18)$$

6. Інтегральне зображення гармонічної функції

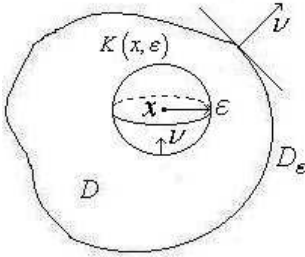


Рис. 11. Область гармонічності функції

Нехай $u(y)$ – функція, гармонічна у області D (рис. 11), що обмежена поверхнею, тобто $\Delta u(y) = 0$ для будь-якої точки $y \in D$.

Нехай $V(y) = \frac{1}{|x-y|}$ – фундаментальний

розв'язок рівняння Лапласа, тобто $\Delta V(y) = 0$,

якщо $x \neq y$. У випадку, коли точка x лежить у

області D , то з метою використання формули Гріна потрібно виключити цю точку з області

D , обмежуючи її сферою радіуса

$\varepsilon = \sigma(x, \sigma)$, $|x-y| = \varepsilon$. Введемо позначення: $K(x, \varepsilon) : |x-y| \leq \varepsilon$ (це є вся

область усередині сфери та на її поверхні), $D_\varepsilon = D - K(x, \varepsilon)$. В області

D використання формули Гріна є справедливим. Будемо

враховувати, що поверхня області D складається з двох частин та

$\sigma(x, \varepsilon)$. Тоді формула Гріна (3.17) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \iint_D [u(y) \Delta V(y) - V(y) \Delta u(y)] d\sigma_y &= \int_{\sigma} \left[u(y) \frac{\partial V(y)}{\partial \nu} - V(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \right] d\sigma_y + \\ &+ \int_{\sigma(x, \varepsilon)} \left[u(y) \frac{\partial V(y)}{\partial \nu} - V(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \right] d\sigma(x, \varepsilon). \end{aligned} \quad (3.19)$$

За умовою маємо, що $\Delta u(y) = 0$; оскільки сфера, що містить точку x , виключена з розгляду, то $\Delta V(y) = 0$. Розглянемо докладніше другий доданок правої частини формули (3.19), який запишемо у формі:

$$R = \int_{\sigma(x, \varepsilon)} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} \right] d\sigma(x, \varepsilon) \quad (3.20)$$

Введемо сферичну систему координат r, θ, φ з центром у точці x . Напрямок збільшення змінної r (у цієї системі координат це радіус сфери) протилежний напрямку нормалі. Тоді:

$$\frac{\partial}{\partial v_y} = -\frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{\varepsilon},$$

та отже,

$$\left. \frac{\partial}{\partial v_y} \frac{1}{|x-y|} \right|_{y \in \sigma(x, \varepsilon)} = -\left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \right|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Тут маємо підкреслити, що похідна підраховується у точках сфери $\sigma(x, \varepsilon)$.

У формулі (3.20) застосуємо теорему про середнє:

$$\int_{\sigma(x, \varepsilon)} F(y) d\sigma(x, \varepsilon) = F(y_{cp.}) \int_{\sigma(x, \varepsilon)} d\sigma(x, \varepsilon) \quad (3.21)$$

та отримаємо наступне співвідношення:

$$\begin{aligned} R &= \left[u(y_{cp.}) \frac{\partial}{\partial v_y} \frac{1}{|x-y_{cp.}|} - \frac{1}{|x-y_{cp.}|} \frac{\partial u(y)}{\partial v_y} \right]_{y=y_{cp.}} 4\pi\varepsilon^2 = \\ &= \left[\frac{u(y_{cp.})}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u(y)}{\partial v_y} \right]_{y=y_{cp.}} 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi u(y_{cp.}) - 4\pi\varepsilon \frac{\partial u(y)}{\partial v_y} \bigg|_{y=y_{cp.}}, \quad (3.22) \end{aligned}$$

$$\text{де } 4\pi\varepsilon^2 = \int_{\sigma(x, \varepsilon)} d\sigma(x, \varepsilon).$$

Для того, щоб перейти до розгляду всієї області D , зробимо у формулі (3.21) перехід до межі, прямуючи ε до нуля:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R = 4\pi u(x).$$

(Тут враховано, що оскільки $y_{cp.}$ – це довільна точка на сфері $\sigma(x, \varepsilon)$, при $\varepsilon \rightarrow 0$, $y_{cp.} \rightarrow x$).

Тоді формула Гріна буде записуватися у вигляді:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \left[\int_{\sigma} \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u(y)}{\partial v_y} - u(y) \frac{\partial}{\partial v_y} \frac{1}{|x-y|} \right] d\sigma_y \quad (3.23)$$

У випадку, коли $n=2$, співвідношення (3.23) набуває форму:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_l \left[\ln \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u(y)}{\partial v_y} - u(y) \ln \frac{1}{|x-y|} \right] dl_y. \quad (3.24)$$

7. Принцип максимуму для гармонічної функції

Принцип максимуму формулюється наступним чином.

Якщо задана функція, яка є гармонічною у області D , що обмежена поверхнею s , то своїх екстремальних значень ця функція дістає тільки на границі області.

Для того, щоб довести сформульований вище тезис максимуму, доведемо попередньо лему.

Лема. Будь-який розв'язок рівняння Пуасона $\Delta u(x) = f(x)$, $x \in D$ у області D не може сягати свого максимального значення у точці y , де $f(y) > 0$ та не може сягати свого мінімального значення у точці y , де $f(y) < 0$.

Доведення. Буде проводитиметься від протилежного. Припустимо, що існує точка y в середині області D така, що $f(y) > 0$ та функція $u(x)$ дістає у цієї точці свій максимум ($u(y) = \max u(x)$).

Отже, випливає, що $\frac{\partial u(y)}{\partial y_j} = 0$, $j = \overline{1, 3}$. Друга похідна функції має бути

від'ємною $\frac{\partial^2 u(y)}{\partial y_j^2} < 0$ ($j = \overline{1, 3}$) (цей факт випливає з математичного

аналізу, де, як відомо, доведено, що функція, яка сягає максимуму у точці, має у цій точці від'ємну другу похідну), а з цього, у свою

чергу, випливає, що $\Delta \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u(y)}{\partial y_j^2} < 0$. Тоді припущено, що у правій

частині маємо додатно визначену функцію $f(y) > 0$. Отримано суперечність, чим і доведено лему.

Застосуємо лему для доведення *принципу максимуму*.

Нехай $y \in D$ – внутрішня точка області така, що гармонічна функція $V(x)$ сягає в ній свого максимуму, тобто $V(y) = \max V(x)$, $x \in D$. Це ж саме можна сформулювати так:

$V(x)+\varepsilon < V(y)$, де $\varepsilon > 0$ – будь-яка мала величина. Введемо функцію $u(x) = V(x) + \gamma|x-y|^2$, де $\gamma > 0$, $|x-y|^2 = (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2$. Виберемо число $\delta > 0$ таке, що $|x-y| < \delta$, та застосуємо до функції $u(x)$ оператор Лапласа:

$$\Delta u(x) = \Delta V(x) + \gamma \Delta(|x-y|^2) = \gamma \Delta(|x-y|^2) = 6\gamma.$$

Виразимо вихідну функцію $V(x)$ через функцію $u(x)$: $V(x) = u(x) - \gamma|x-y|^2$. Оцінимо значення виразу $V(x)+\varepsilon$, вибираючи γ досить малим:

$$V(x)+\varepsilon = u(x) - \gamma|x-y|^2 + \varepsilon > \varepsilon - \gamma|x-y|^2 + u(x) > \frac{\varepsilon}{2} + u(x).$$

Виходячи з того, що у точці y маємо максимум, можна записати:

$$V(y) > u(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

З іншого боку, так як $V(y) = u(y)$, маємо, що $u(y) > V(x) + \varepsilon/2$, тобто у точці y функція $u(x)$ сягає також свого максимуму. Але функція $u(x)$ задовольняє рівняння Пуасона $\Delta u(x) = f(x)$, де $f(x) = 6\gamma$. Як бачимо, $f(y) > 0$, а з іншого боку, y є точка, у якій функція дістає максимум. Відповідно до доведеної вище леми, такий факт не може мати місця. Отже, отримано суперечність, що доводитиме те, що функція може сягати свого мінімального та максимального значення лише на границі області.

Слідство 1. Якщо гармонічна функція дорівнює на границі області гармонічності нулеві $u(x)|_{\sigma} = 0$, то вона дорівнює нулеві всюди усередині області.

Доведення. Доведення проводитиметься від протилежного. Припустимо, що усередині області гармонічності існує точка y , де функція відмінна від нуля - $u(y) \neq 0, y \in D$. Тоді можливі два випадки: або функція у цій точці додатна, або від'ємна – 1) $u(y) > 0$, 2) $u(y) < 0$.

Відповідно до доведеного вище принципу максимуму у першому випадку функція дістає свого максимуму у точці y , що розташована усередині області. Прийшли до суперечності з принципом. У другому

випадку функція дістає у точці y свого мінімального значення, що також є неможливим.

Таким чином, слідство доведено.

Слідство 2. Якщо значення двох гармонічних функцій $u(x), v(x)$ на границі області гармонічності співпадає $u(x)|_{\sigma} = v(x)|_{\sigma}$, то вони співпадають і всюди усередині області гармонічності: $u(x) = v(x), x \in D$.

Доведення. Введемо нову функцію $w(x) = u(x) - v(x)$, тоді на границі області гармонічності функція $w(x)$ дорівнює нулеві: $w(x)|_{\sigma} = 0$. Функція $w(x)$ задовольняє рівнянню Лапласа – $\Delta w(x) = 0$. В силу слідства 1 функція $w(x)$ дорівнює нулеві всюди усередині області, тобто $w(x) = 0, x \in D$, звідки випливає, що $u(x) = v(x), x \in D$.

8. Основні крайові гармонічні задачі

Під гармонічними задачами маються на увазі задачі, що пов'язані з рівняннями Лапласа або Пуассона. Їх існує три типи.

Перша основна гармонічна задача (задача Діріхле) складається з того, що потрібно відшукати гармонічну функцію усередині області гармонічності, якщо функція задана на границі цієї області.:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in D, \\ u(x)|_{\sigma} = f(x), x \in \sigma, f(x) \in C(\sigma). \end{cases} \quad (3.25)$$

Друга основна гармонічна задача (задача Неймана) – потрібно відшукати значення гармонічної функції усередині області гармонічності, якщо на границі задана нормальна похідна функції:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in D, \\ \left. \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right|_{\sigma} = f(x), x \in \sigma, f(x) \in C(\sigma). \end{cases} \quad (3.26)$$

Тут ν – зовнішня нормаль до границі.

Третя основна задача вимагає відшукати значення функції усередині області гармонічності, якщо на границі області задано умови третього роду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u(x)=0, \quad x \in D, \\ \left[\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + \beta(x)u(x) \right]_{\sigma} = f(x), x \in \sigma, \beta(x), f(x) \in C(\sigma). \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Також розглядаються в математичній фізиці *мішані задачі*, коли на частині області задано умови одного типу, а на другий її частині – умови іншого типу. Розглянемо деякі властивості задачі Діріхле.

Теорема: *задача Діріхле завжди має не більше, ніж один розв’язок.*

Доведення. Проводимо доведення від протилежного. Нехай існує два розв’язки задачі Діріхле (III.25) $u(x)$ та $v(x)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} = 0, x \in D, \\ u(x)|_{\sigma} = v(x)|_{\sigma} = f(x), x \in \sigma, f(x) \in C(\sigma). \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Введемо нову функцію $w(x) = u(x) - v(x)$. Як бачимо, ця функція задовольняє задачу Діріхле:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w(x) = 0, x \in D, w(x) \in C(\sigma), \\ w(x)|_{\sigma} = 0, x \in \sigma. \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Розв’язок такої задачі – $w(x) \equiv 0$. Звідки випливає, що $u(x) = v(x)$.

Теорема. Задача Діріхле є стійкою, тобто малим змінам заданих функцій відповідають мали зміни шуканої функції.

Доведення. Нехай маємо, що функції $u(x)$ та $v(x)$ задовольняють задачу Діріхле:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} = 0, \\ u(x)|_{\sigma} = f_1(x), v(x)|_{\sigma} = f_2(x), f_1(x), f_2(x) \in C(\sigma). \end{array} \right.$$

Тоді, якщо виконується, що $|f_1(x) - f_2(x)| < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ як завгодно мале число, то і $|u(x) - v(x)| < \varepsilon$. Потрібно довести цей факт.

Введемо нову функцію $w(x)=u(x)-v(x)$. Тоді крайові умови для неї набувають вигляду $w(x)|_{\sigma}=f_1(x)-f_2(x)$. З умови теореми випливає, що

$$|w(x)|_{\sigma} < |f_1(x)-f_2(x)| < \varepsilon. \quad (3.30)$$

З принципу максимуму випливає, що усередині області значення не можуть бути більшими, ніж на границі. Тобто маємо, що $|w(x)|_D < \varepsilon$. Звідки випливає, що $|u(x)-v(x)| < \varepsilon$, коли $x \in D$.

Відмітимо, що для другої задачі Неймана довести єдність розв'язку є неможливим. Виходячи з властивості гармонічних функцій, маємо $\int_{\sigma} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} d\sigma = 0$. З цього випливає, що для того, щоб задача Неймана була розв'язана, потрібно, щоб виконувалась рівність $\int_{\sigma} f(x) d\sigma = 0$.

Для того, щоб довести коректність задачі Діріхле, потрібно довести три умови: єдність, стійкість та розв'язання задачі. З метою довести цю останню властивість розглянемо деякі додаткові поняття.

9. Властивості поверхневих потенціалів.

Поверхні Ляпунова

Відповідно до того, як були введені потенціали для випадку поверхневого потенціалу простого шару, маємо формулу

$$V_1(x) = \int_{\sigma} \frac{\rho(y)}{|x-y|} d\sigma_y. \text{ У двовимірному випадку він зображується за}$$

$$\text{формулою } \tilde{V}_1(x) = \int_l \rho(y) \ln \frac{1}{|x-y|} dl_y. \text{ Потенціали подвійного шару}$$

$$\text{зображуються наступним чином: } V_2(x) = \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|x-y|} m(y) d\sigma_y - \text{ у}$$

$$\text{трьохвимірному випадку, та } \tilde{V}_2(x) = \int_l \frac{\partial}{\partial \nu_y} \ln \frac{1}{|x-y|} m(y) dl_y - \text{ у}$$

двовимірному.

Як було доведено раніше, якщо точка x не належить поверхні $x \notin (\sigma, l)$ та $x \neq y$, то усі потенціали є гармонічними функціями.

σ

Проілюструємо на рис. 12 основні позначення: внутрішню область, де функція є гармонічною, позначимо як D^+ , зовнішню як D^- , ν_y - нормаль.

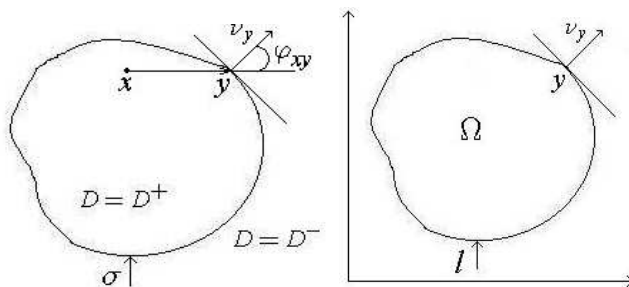


Рис. 12. Область гармонічності обмежена поверхнею

Якщо точка x належить поверхні, то гармонічність може бути порушено, бо підінтегральна функція може перетворюватися на нескінченність, тобто буде отримано невластний інтеграл. На питання умов його існування дав відповідь видатний російський вчений О. Г. Ляпунов. Їм було введено для цього нове поняття – поверхні Ляпунова. Поверхню називають *поверхнею Ляпунова*, якщо виконано три умови:

- 1) У кожній точці поверхні існує дотична площина;
- 2) Якщо у будь-якій точці дотику побудувати кулю достатньо малого радіусу, то ця куля ділитиме всю поверхню, на дві – поверхню, що лежить усередині сфери та зовні: $\sigma = \sigma_\epsilon + \sigma'_\epsilon$. Або, інакше кажучи: якщо з будь-якої точки кулі провести лінію,

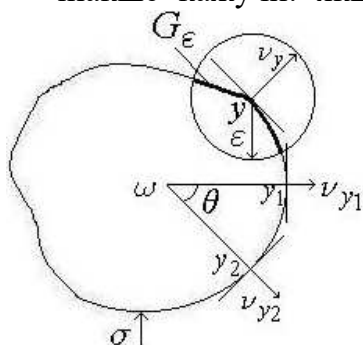


Рис. 13. Поверхня Ляпунова

паралельну до нормалі, то вона перетинатиме поверхню тільки один раз (що дозволяє ввести локальну систему координат $y = (y_1, y_2, y_3)$, $y_3 = f(y_1, y_2)$) (рис. 13).

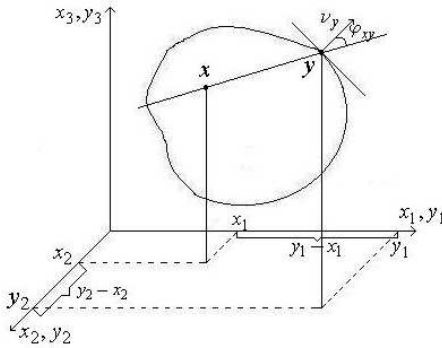
- 3) Якщо взяти дві точки y^1 та y^2 на поверхні та провести нормалі до них ν_{y^1} та ν_{y^2} ,

$$\text{то } |\nu_{y^1} - \nu_{y^2}| \leq c |y^1 - y^2|^\alpha, \quad \text{де } c \equiv \text{const}, 0 < \alpha \leq 1, \text{ або } |\theta| \leq c |y^1 - y^2|^\alpha$$

Таким чином, якщо поверхня є поверхнею Ляпунова, то невластний інтеграл буде існувати.

10. Інтеграл Гауса

Відомо формулу для підрахунку похідної за будь-яким



14. Геометрія задачі

$$\frac{\partial}{\partial v_y} \frac{1}{|x-y|} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x-y|} \cos(\vec{v}_y, x_j) \quad (3.31)$$

Розкриємо похідну під знаком суми:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x-y|} &= -\frac{1}{2} \frac{2(x_j - y_j)}{|x-y|^3} = \frac{y_j - x_j}{|x-y|^3} = \\ &= \frac{y_j - x_j}{|x-y|} \frac{1}{|x-y|^2}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

На відношення $\frac{y_j - x_j}{|x-y|}$ можна дивитися, як на відношення катета до гіпотенузи, яке дорівнюватиме (рис. 14): $\frac{y_j - x_j}{|x-y|} = \cos\left(\left(\vec{x-y}\right), x_j\right)$.

Співвідношення (3.32) перепишемо у вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x-y|} = \frac{\cos\left(\left(\vec{x-y}\right), x_j\right)}{|x-y|^2}. \quad (3.33)$$

Підставимо вираз (3.33) під знак суми у формулі (3.31):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_y} \frac{1}{|x-y|} &= \sum_{j=1}^3 \frac{\cos\left(\left(\vec{x-y}\right), x_j\right) \cos(\vec{v}_y, x_j)}{|x-y|^2} = \frac{\cos\left(\left(\vec{x-y}\right), \vec{v}_y\right)}{|x-y|^2} = \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2}, \\ \text{де } \varphi_{xy} &= \left(\left(\vec{x-y}\right), \vec{v}_y\right). \end{aligned}$$

Отже, остаточно отримано:

$$\frac{\partial}{\partial v_y} \frac{1}{|x-y|} = \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2}. \quad (3.34)$$

Потенціал подвійного шару прийме вигляд:

$$V_2(x) = \int_{\sigma} \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} m(y) d\sigma_y. \quad (3.35)$$

Якщо у формулі (3.35) взяти $m(y) \equiv 1, y \in \sigma$, то отримаємо інтеграл Гауса:

$$J(x) = \int_{\sigma} \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} d\sigma_y. \quad (3.36)$$

Вважаємо, що x – це довільна фіксована точка $x \in D^-$, а точка y – змінна. Тоді зможемо підрахувати важливе співвідношення:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_y} \frac{1}{|x-y|} &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{1}{|x-y|} \cos(\vec{v}_y, y_j); \\ \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{1}{|x-y|} &= -\frac{1}{2} \frac{2(y_j - x_j)}{|x-y|^3} = -\frac{y_j - x_j}{|x-y|^3} = \frac{-\cos\left(\left(\vec{x-y}, x_j\right)\right)}{|x-y|^2}; \\ \frac{\partial}{\partial v_y} \frac{1}{|x-y|} &= \frac{-\cos\left(\left(\vec{x-y}, \vec{v}_y\right)\right)}{|x-y|^2} = \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2}. \end{aligned}$$

Звідки, враховуючи формулу (3.36), отримаємо:

$$J(x) = - \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial v_y} \frac{1}{|x-y|} d\sigma_y. \quad (3.37)$$

Як відомо, інтеграл по замкненому контуру, що лежить усередині області гармонічності від функції нормальної похідної, дорівнює нулеві. Отже, якщо точка $x \in D^-$, то $J(x) = 0$. Якщо точка x функції належить контуру інтегрування $x \in \sigma$, то інтеграл маємо розуміти в невластному сенсі, та збіжним він буде, тільки якщо поверхня є поверхнею Ляпунова.

Підрахуємо інтеграл Гауса для випадку $x \in D^+$, тобто точка лежить усередині області гармонічності. Побудуємо біля точки x кулю з центром в точці x , радіуса $[\varepsilon - \sigma_\varepsilon = a(x, \varepsilon)]$ так, щоби коло цілком лежало у області гармонічності D_+ .

У той часті простору, що лежить за кулею (на рис. 15) відповідає заштрихованій області) функція $u(y) = \frac{1}{|x-y|}$ є гармонічною

Враховуючи, що замкнені контури σ_a повністю лежать у області гармонічності, можна використати теорему про нормальну похідну, записавши рівність:

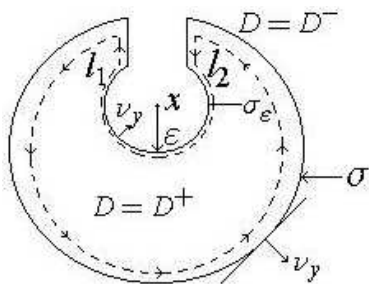


Рис. 15. Геометрія задачі

$$\int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{\|x-y\|} d\sigma_y + \int_{\sigma_a} \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|x-y|} d\sigma_{ay} = 0. \quad (3.38)$$

Якщо у точці x розташувати початок локальної сферичної системи координат (r, θ, ϕ) , то поверхня σ_a у цієї системи координат визначатиметься рівнянням $r=a$, а $\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{r}$. Зовнішня нормаль для області

D_a на σ_a буде направлена у напрямок, протилежний напрямку зміни змінної r .

Отже, з цього випливає: $\frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|x-y|} = \left(-\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right) \Big|_{r=a} = \frac{1}{a^2}$. Виходячи з отриманого результату, рівність (3.38) можна записати наступним чином:

$$-J(x) + \frac{1}{a^2} \int_{\sigma_a} d\sigma_{ay} = 0 \quad (3.39)$$

Другий доданок у лівій частині рівності (3.39) зображує площу кулі та дорівнює $4\pi a^2$. З цього випливає:

$$J(x) = 4\pi, \quad x \in D_+. \quad (3.40)$$

Підрахуємо значення інтеграла $J(x)$ при $x \in \sigma$. У цьому випадку інтеграл є невластим і для його підрахування потрібно використати властивості поверхні як ляпуновської. Уникаючи доведення, приведемо остаточний результат $J(x) = 2\pi$, коли $x \in \sigma$.

Остаточо маємо:

$$Y(x) = \begin{cases} 0, & x \in D^- \\ 4\pi, & x \in D^+ \\ \frac{1}{2} 4\pi, & x \in \sigma \end{cases} \quad (3.41)$$

11. Розривні властивості потенціалу подвійного шару

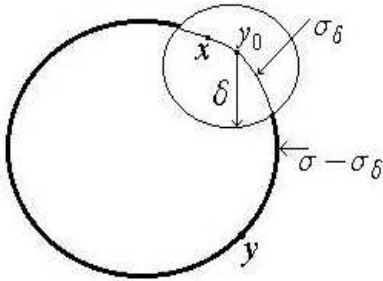


Рис. 16. Геометрія задачі

Нехай точки x, y належать поверхні σ . Виберемо точку y_0 , що також лежить на цій поверхні, та побудуємо коло з центром у точці y_0 радіуса (рис. 16).

Введемо допоміжну функцію:

$$w(x) = \int_{\sigma} \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} [m(y) - m(y^0)] d\sigma_y, \quad (3.42)$$

$\sigma = \sigma_+ + \sigma_-$, де $\sigma_- = \sigma - \sigma_+$, — поверхня Ляпунова.

Покажемо, що якщо $|y - y^0| \leq \delta$, де $\delta > 0$ — будь-яка мала величина, то має місце оцінка:

$$|m(y) - m(y^0)| \leq \frac{\varepsilon}{A_\sigma}, \quad (3.43)$$

де $c = \text{const}$, $\varepsilon > 0$ — як завгодно мале число.

Для доведення цього факту виведемо певні попередні оцінки.

Нехай σ_* — деяка частина поверхні σ . Доведемо оцінку інтеграла

$$\int_{\sigma_*} \frac{|\cos \varphi_{xy}|}{|x-y|^2} d\sigma_y \leq c, \quad c = \text{const}. \quad \text{Розглянемо для цього дві функції:}$$

$$w_\delta(x) = \int_{\sigma_\delta} \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} [m(y) - m(y^0)] d\sigma_y, \quad (3.44)$$

$$w_0(x) = \int_{\sigma_*} \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} [m(y) - m(y^0)] d\sigma_y.$$

Побудуємо їх різницю та покажемо, що вона може бути як завгодно малою:

$$w(x) - w(y^0) = w_\delta(x) + w_0(x) - w_\delta(y^0) - w_0(y^0). \quad (3.45)$$

Тут x — довільна точка, що може лежати як усередині, так і зовні. Продовжимо міркування у правій частині рівності (3.45):

$$w(x) - w(y^0) = w_\delta(x) - w_\delta(y^0) + |w_0(x) - w_0(y^0)|. \quad (3.46)$$

Виходимо з відомої нерівності, що
 $|w_{\delta}(x) - w_{\delta}(y^0)| \leq |w_{\delta}(x)| + |w_{\delta}(y^0)|$. Враховуючи це, запишемо:

$$|w(x) - w(y^0)| \leq |w_{\delta}(x)| + |w_{\delta}(y^0)| + |w_0(x) - w_0(y^0)|. \quad (3.47)$$

$$|w_{\delta}(x)| \leq \int_{\sigma_{\delta}} \frac{|\cos \varphi_{xy}| |m(y) - m(y^0)|}{|x - y|^2} d\sigma_y \leq \frac{\varepsilon}{4c} \int_{\sigma_{\delta}} \frac{|\cos \varphi_{xy}|}{|x - y|^2} d\sigma_y \leq \frac{\varepsilon}{4c} \quad (3.48)$$

$$|w_{\delta}(y^0)| \leq \int_{\sigma_{\delta}} \frac{|\cos \varphi_{y^0 y}| |m(y) - m(y^0)|}{|y^0 - y|^2} d\sigma_y \leq \frac{\varepsilon}{4c} \int_{\sigma_{\delta}} \frac{|\cos \varphi_{y^0 y}|}{|y^0 - y|^2} d\sigma_y \leq \frac{\varepsilon}{4c} c.$$

Далі отримаємо оцінку останнього доданку в нерівності (3.47):

$$w_0(x) - w_0(y^0) = \int_{\sigma_0} [m(y) - m(y^0)] \left[\frac{\cos \varphi_{xy}}{|x - y|^2} - \frac{\cos \varphi_{y^0 y}}{|y^0 - y|^2} \right] d\sigma_0. \quad (3.49)$$

або:

$$|w_0(x) - w_0(y^0)| \leq \int_{\sigma_0} |m(y) - m(y^0)| \left| \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x - y|^2} - \frac{\cos \varphi_{y^0 y}}{|y^0 - y|^2} \right| d\sigma_0.$$

Якщо припустимо, що у всій області густини обмежені, то з цього випливає, що $|m(y) - m(y^0)| \leq c_1$. А якщо $\sigma \left| \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x - y|^2} - \frac{\cos \varphi_{y^0 y}}{|y^0 - y|^2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2c_1}$, то остаточно отримаємо з урахуванням нерівності (3.49):

$$|w_0(x) - w_0(y^0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.50)$$

Отже, враховуючи отримані оцінки (3.48) та (3.50), завершимо оцінку (3.47):

$$|w(x) - w(y^0)| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (3.51)$$

Ми показали, що допоміжне введена функція $w(x)$ за формулою (3.42) є неперервною і можна записати її у формі:

$$w(x) = \int_{\sigma} \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x - y|^2} m(y) d\sigma_y - m(y^0) J(x), \quad (3.52)$$

або:

$$w(x) = V_2(x) - m(y^0)J(x). \quad (3.53)$$

Розглянемо три випадки розташування точки y^0 :

- 1) Якщо $x \in D^-$, то $J(x) = 0$, звідки маємо $w(x) = V_2(x)$.
- 2) Якщо $x \in D^+$, то $J(x) = 4\pi$, звідки маємо $w(x) = V_2(x) - m(y^0)4\pi$.
- 3) Якщо $x \in \sigma$ – $w(x) = V_2(y^0) - m(y^0)2\pi$.

У випадку, коли x належить поверхні, можемо взяти $x = y^0$. Матимемо значення потенціалу $w(y^0) = V_2(y^0)$, яке називають *прямим значенням потенціалу*.

Розглянемо граничні значення. З формули 2) випливає, що якщо $x \rightarrow y^0$ (тобто підходом до неї з боку D^+) (так як $\lim_{x \rightarrow y^0} V(x) = V_2^+(y^0)$), то можна записати $w(y^0) = V_2^+(y^0) - m(y^0)4\pi$. З іншого боку, з 1) випливає, що $w(y^0) = V_2^-(y^0)\pi$, якщо підходимо до точки з боку області D^- . Отже, маємо:

$$V_2^-(y^0) - V_2^+(y^0) = -4\pi m(y^0). \quad (3.54)$$

Співвідношення (3.54) визначає стрибок потенціалу подвійного шару під час переходу через поверхню.

12. Зведення задачі Діріхле до інтегрального рівняння.

Доведення існування його розв'язку

Для задачі Діріхле, де потрібно відшукати гармонічну функцію $u(x)$ в області D , тобто $\Delta u(x) = 0, x \in D$, якщо на границі області гармонічності задано значення функції $u(y^0) = f(y^0), y^0 \in \sigma$, раніше було доведено єдність розв'язку та його стійкість (рис. 17).

Щоб завершити доведення коректності задачі Діріхле, потрібно доказати її розв'язуємість. Нехай $u(x) = V_2(x) = \int_{\sigma} \frac{\cos \varphi_{xy} m(y)}{|x-y|^2} d\sigma_y$.

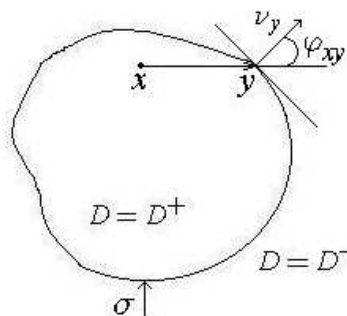


Рис. 17

Якщо точка x не належить поверхні, то функція $V_2(x)$ є гармонічною функцією:

$$\Delta V_2(x) = 0.$$

Задовольнимо умові на границі, для чого спрямуємо x до y , тоді використаємо доведену властивість 2) та з одного боку отримаємо:

$$w(y^0) = V_2^+(y^0) - m(y^0)4\pi,$$

з іншого боку з властивості 3) випливає:

$$w(y^0) = V_2(y^0) - m(y^0)2\pi.$$

Прирівнявши ліві частини рівностей, маємо:

$$V_2^+(y^0) - 4\pi m(y^0) = V_2(y^0) - 2\pi m(y^0),$$

або:

$$V_2^+(y^0) = V_2(y^0) + 2\pi m(y^0).$$

Остаточно отримано:

$$u(y^0) = V_2^+(y^0) = V_2(y^0) + 2\pi m(y^0).$$

З іншого боку, $u(y^0) = f(y^0)$. Дорівнявши обидві частини цих рівностей, маємо:

$$2\pi m(y^0) + V_2(y^0) = f(y^0). \quad (3.55)$$

Поділимо обидві частини співвідношення (3.55) на 2π та запишемо зображення потенціалу подвійного шару:

$$m(y^0) + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{\cos \varphi_{y^0 y} m(y)}{|y^0 - y|^2} d\sigma_y = \tilde{f}(y^0), \quad \tilde{f}(y^0) = \frac{f(y^0)}{2\pi}, \quad y^0 \in \sigma. \quad (3.56)$$

Отримали інтегральне рівняння (3.56) відносно невідомої функції густини потенціалу $m(y)$. Доведемо його розв'язуємість.

З цією метою спершу розглянемо наступне інтегральне рівняння Фредгольма:

$$\mu(x) - \lambda \int_{\sigma} K(x, y) \mu(y) d\sigma_y = f(x), \quad x \in \sigma, \quad K(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x - y|^2}. \quad (3.57)$$

Якщо у рівнянні (3.57) взяти $\lambda = -1$, а $x = y^0$, то отримаємо вихідне інтегральне рівняння (3.56). Відповідно до відомої

альтернативи Фредгольма, для єдиності та розв'язуємості інтегрального рівняння (3.57) з неперервним ядром (або ядром з особливістю типу полюсу) при неперервній правій частині, необхідно та достатньо, щоб однорідне рівняння (3.57)

$$\mu(x) - \lambda \int_{\sigma} K(x, y) \mu(y) d\sigma_y = 0 \quad (3.58)$$

має тільки тривіальний розв'язок. Ті значення λ , при яких існує ненульовий розв'язок, називають *власними числами інтегрального рівняння*.

У відповідності з вищезазначеним, мусимо довести, що однорідне рівняння:

$$m(y^0) + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{m(y) \cos \varphi_{y^0 y}}{|y^0 - y|^2} d\sigma_y = 0 \quad (3.59)$$

має тільки тривіальний розв'язок. Це можна зробити, якщо довести, що $\lambda = -1$ не є власним числом для рівняння:

$$m(y^0) - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\sigma} m(y) \frac{\cos \varphi_{y^0 y}}{|y - y^0|^2} d\sigma_y = 0. \quad (3.60)$$

Припустимо, що поверхня σ є поверхнею Ляпунова, причому опуклою. Тоді $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_{y^0 y} \leq \frac{\pi}{2}$. З останнього випливає, що $\cos \varphi_{y^0 y} > 0$. Це є справедливим тільки для опуклої поверхні. Будемо вважати, що $m(y) \neq \text{const}$ та є неперервною функцією на поверхні σ , $m(y) \in C(\sigma)$. Отже, відшукується така точка x_0 , в якій функція $m(y)$ сягає свого максимуму. З рівності (3.60) маємо:

$$m(y^0) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{m(y) \cos \varphi_{y^0 y}}{|y^0 - y|^2} d\sigma_y. \quad (3.61)$$

Зробимо наступну оцінку:

$$|m(y_0)| < \frac{|\lambda|}{2\pi} |m(x^0)| \int_{\sigma} \frac{\cos \varphi_{y^0 y}}{|y^0 - y|^2} d\sigma_y. \quad (3.62)$$

Останній множник у правій частині нерівності (3.62) є інтегралом Гауса на поверхні. Раніше було доведено, що його значення дорівнює 2π . З цього випливає, що:

$$\left| \mu(y^0) \right| < |\lambda| \left| \mu(x^0) \right|. \quad (3.63)$$

Щоб така строга нерівність виконувалася, необхідно, щоб $|\lambda| > 1$, а з цього маємо, що $\lambda = -1$ не може бути власним числом. Отже, рівняння (3.60) має тільки тривіальний розв'язок, а вихідне рівняння у такому випадку має єдиний розв'язок, який завжди існує.

Розглянемо випадок, коли $m(y) = \text{const}$. Відповідне однорідне рівняння (3.60) прийме вигляд:

$$c + c \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{\cos \varphi_{y^0 y}}{|y - y^0|^2} d\sigma_y = 0,$$

або $c + c = 0$, $2c = 0$. Звідки отримаємо, що c дорівнюватиме нулеві.

IV. РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Фізичні явища, пов'язані з процесами теплопровідності та дифузії, з розповсюдженням електромагнітних полів, з рухом в'язкої рідини, описується рівнянням параболічного типу. Найпростішим їх прикладом є рівняння теплопровідності.

1. Постановка початково-крайової задачі

Типовим представником цього класу рівнянь є рівняння нестационарної теплопровідності.

Будемо позначати через $u(x_1, x_2, x_3, t)$ температуру у точці x трьохвимірному простору $x=(x_1, x_2, x_3)$ в момент часу t . Ця функція задовольняє рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x, t), \quad (4.1)$$

де $x \in \mathbb{R}^3$, $0 \leq t \leq T$, $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, k – коефіцієнт теплопровідності, c –

коефіцієнт теплоємності, ρ – густина, $f(x, t) = \frac{F(x, t)}{c\rho}$, $F(x, t)$ –

потужність джерел тепла, Δu – оператор Лапласа: $\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$.

Рівняння (4.1) є рівнянням параболічного типу та має нескінченну множину розв'язків. З метою відокремлення єдиного розв'язку потрібно задати крайові умови та початкові умови. Доведемо, що якщо такі умови задано, то задача буде мати не більше одного розв'язку.

Постановка початково-крайової задачі

Потрібно відшукати функцію $u(x, t)$, яка задовольняє диференціальне рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x, t), x \in \mathbb{R}^3, 0 \leq t \leq T \quad (4.2)$$

та крайові умови

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha_0 u\right) = g(x, t), \quad (4.3)$$

де n – нормаль до поверхні, що обмежує область G , $x \in \sigma = \partial G$, $0 \leq t \leq T$. Також мають виконуватися початкові умови:

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in G. \quad (4.4)$$

Примітка: якщо у рівнянні (4.2) $\alpha_1 = 0$, то отримаємо першу крайову задачу; якщо $\alpha_1 \neq 0, \alpha_0 = 0$, то отримаємо другу крайову задачу; якщо $\alpha_1 \neq 0, \alpha_0 \neq 0$, то отримаємо загальний випадок – третю крайову задачу.

2. Принцип максимуму

Розглянемо випадок, коли $f(x, t) = 0$ та припустимо, що $u(x, t)$ неперервна при $x \in \bar{G} = G \cup \partial G$. Будемо вважати, що функція $u(x, t)$ сягає свого максимуму або у деякій точці (x_0, y_0) , тобто $M = \max u(x, t) = u(x_0, t_0)$, $x \in \partial G, 0 \leq t \leq T$, або вона сягає свого максимуму в початковий момент часу: $m = \max u(x, t)$, $x \in \bar{G}, t = 0$. Взагалі кажучи, має місце нерівність $m \leq M$.

Теорема

Якщо виконуються наступні умови, а саме:

- 1) $u(x, t)$ – неперервна функція при $x \in \bar{G}, 0 \leq t \leq T$;
- 2) виконується однорідне рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0 \quad \text{при } x \in G, 0 \leq t \leq T;$$

- 3) функція $u(x, t)$ сягає свого максимуму у точці (x_0, t_0) :

$$M = \max u(x, t) = u(x_0, t_0),$$

$$x \in \bar{G}, 0 \leq t \leq T,$$

то ця точка або лежить на границі нагрітого тіла, або цього максимуму функція сягає в початковий момент часу:

$$(x_0, t_0) \in \{x \in \partial G, 0 \leq t \leq T\} \cup \{x \in \bar{G}, t = 0\}$$

Доведення

Розглянемо одновимірний випадок: $x = x \in R^1$ (рис. 18). Доведення проводитиметься від протилежного, а саме – припустимо,

що точка (x_0, y_0) лежить усередині області: $(x_0, y_0) \in \{x \in G, t \in [0; T]\}$.

Доведемо, що тоді існує точка (x_1, y_1) , де порушено рівняння (4.1).

Розглянемо функцію $v(x, t)$

$$v(x, t) = u(x, t) + w(x, t), \quad (4.5)$$

$$\text{де } w(x, t) = \frac{M-m}{2l^2} (x-x_0)^2.$$

Знайдемо її максимум:

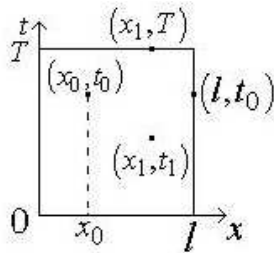


Рис. 18. Одновірний випадок

$$\max_{x \in G, 0 \leq t \leq T} v(x, t) = v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) + w(x_0, t_0) = M + 0, \quad (4.6)$$

З іншого боку:
якщо

$$\max v(x, t) \leq m + \frac{M-m}{2l^2} l^2 = m + \frac{M}{2} - \frac{m}{2} < M, \quad (4.7)$$

або $v \in [0; l], t=0$, або $x=0, 0 \leq t \leq T$, $x=l, 0 \leq t \leq T$.

У (4.7) враховано, що $|x-x_0| \leq l$. З нерівностей (4.6) та (4.7) випливає наступне: функція $v(x, t)$ сягає свого максимуму усередині області $\{x \in G, 0 \leq t \leq T\}$. Позначимо цю точку (x_1, t_1) . Тоді по означенню максимуму маємо, що $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, звідки:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Big|_{(x_1, t_1)} = \frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} > 0.$$

Отримано, що рівняння (1) порушено у точці (x_1, t_1) . Теорему доведено.

З принципу максимуму легко отримати такі ствердження:

1) Розв'язок рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ сягає свого мінімального значення в початковий момент часу або на границі області.

Доведення базується на той самій схемі, що і доведення принципу максимуму для функції $u(x, t) = -u(x, t)$.

2) Функція $|u(x,t)|$ сягає свого максимального значення в початковий момент часу або на границі області.

3. Теореми єдності та стійкості розв'язку початково-крайової задачі

Теорема єдності

Початково-крайова задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), x \in [0;l], 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\begin{cases} u(0,t) = g_0(t), u(l,t) = g_l(t), \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\begin{cases} u(x,0) = g(x). \end{cases} \quad (4.10)$$

має не більше ніж один розв'язок.

Доведення

Припустимо, що $u_1(x,t), u_2(x,t)$ є розв'язками задачі (4.8) – (4.10). Введемо нову функцію $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Як бачимо, функція $w(x,t)$ задовольняє рівняння (4.8). Також для неї виконуються крайові умови $w(0,t) = 0, w(l,t) = 0, 0 \leq t \leq T$ та початкова умова $w(x,0) = 0, 0 \leq x \leq l$.

З принципу максимуму випливає, що $w(x,t) = 0$. А звідки і те, що $u_1(x,t) = u_2(x,t)$.

Теорема стійкості

Малим змінам заданих функцій у початково-крайовій задачі:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\begin{cases} u(0,t) = g_0(t), u(l,t) = g_l(t), 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (4.13)$$

відповідають мали зміни розв'язку, який розшукуємо.

Доведення

Розглянемо задачу з похибкою у початкових та крайових умовах:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = f(x, t), t \in [0; T], x \in [0; l], \end{array} \right. \quad (4.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}(0, t) = \tilde{g}_0(t) = g_0(t) + \varepsilon_0(t), \quad \tilde{u}(l, t) = \tilde{g}_l(t) = g_l(t) + \varepsilon_l(t), t \in [0; T], \end{array} \right. \quad (4.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}(x, 0) = \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) + \varepsilon(x), x \in [0, l]. \end{array} \right. \quad (4.16)$$

За ε^* візьмемо $\varepsilon^* = \max \left\{ \max \left\{ |\varepsilon_0(t)|, |\varepsilon_l(t)| \right\}, \max |\varepsilon(x)| \right\}, 0 \leq x \leq l$ – максимальну похибку в умовах (4.15), (4.16). Покажемо, що для будь-яких (x, t) похибка у розв’язку не перевищує похибки у крайових та початкових умовах: $|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| \leq \varepsilon^*$.

Побудуємо функцію $w(x, t) = \tilde{u}(x, t) - u(x, t)$. Вона є розв’язком відповідної початково-крайової задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \end{array} \right. \quad (4.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w(0, t) = \varepsilon_0(t), w(l, t) = \varepsilon_l(t), 0 \leq t \leq T, \end{array} \right. \quad (4.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w(x, 0) = \varepsilon(x), 0 \leq x \leq l. \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Відповідно до принципу максимуму для будь-якої точки (x, t) виконується

$$|w(x, t)| \leq \varepsilon^*,$$

що і потрібно було довести.

4. Задача Коші

Постановка задачі

Під час дослідження процесу теплопровідності у точках, що розташовані на досить великій відстані від границі тіла, впливом граничних умов можна нехтувати та вважати тіло нескінченним. У такій постановці виникає задача Коші – потрібно відшукати розв’язок рівняння теплопровідності при заданих початкових умовах:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), -\infty < x < +\infty, 0 \leq t \leq T, \end{array} \right. \quad (4.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = \varphi(x), -\infty < x < +\infty. \end{array} \right. \quad (4.21)$$

У більшості випадків до задачі Коші додається умова або обмеженості розв'язку $|u(x,t)| \leq M$, або прямування його до нуля на нескінченності $u(x,t) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$.

Єдність розв'язку

Теорема

Задача Коші (4.20), (4.21) має не більш ніж один обмежений розв'язок.

Доведення. Проводитиметься від протилежного. Нехай існує два різні обмежені розв'язки задачі Коші $u_1(x,t) \neq u_2(x,t)$. Побудуємо нову функцію $w(x,t)$ за формулою $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, відносно якої запишемо задачу Коші:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, & 0 \leq t \leq T, -\infty < x < \infty, \end{cases} \quad (4.22)$$

$$\begin{cases} w(x,0) = 0, & -\infty < x < \infty. \end{cases} \quad (4.23)$$

З умови обмеженості розв'язків $u_1(x,t), u_2(x,t)$ випливає обмеженість функції $w(x,t)$:

$$|w(x,t)| \leq |u_1(x,t)| + |u_2(x,t)| \leq 2M \quad (4.24)$$

для будь-яких x та t .

Введемо ще одну допоміжну функцію наступного вигляду:

$$v(x,t) = \frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right). \quad (4.25)$$

Легко переконатися, що зображення (4.25) є розв'язком рівняння теплопровідності. Зафіксуємо будь-яке значення $L > 0$, та порівняємо обидві функції $w(x,t)$ та $v(x,t)$ в області $-L \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T$.

Якщо $t=0, -L < x < L$, то $w(x,0) = 0 \leq \frac{4M}{L^2} \frac{x^2}{2} = v(x,0)$. Якщо $0 \leq t \leq T, |x| = L$,

то:

$$|w(\pm L, t)| \leq 2M \leq \frac{4M}{L^2} \left(\frac{L^2}{2} + a^2 t \right) = v(\pm L, t).$$

Враховуючи отримані оцінки та користуючись принципом максимуму, довели, що для будь-якого $x \in [-L; L]$, $t \in (0; T)$ виконано нерівності $|w(x, t)| \leq v(x, t)$.

Зафіксуємо точку (x, t) та спрямуємо L до нескінченності. Отримаємо, що $v(x, t) \rightarrow 0$.

Функція $w(x, t)$ від величини L не залежить, звідки маємо, що $w(x, t) = 0$. Отже, розв'язки $u_1(x, t)$ та $u_2(x, t)$ співпадають.

5. Побудова фундаментального розв'язку рівняння теплопровідності

Фундаментальний розв'язок однорідного рівняння теплопровідності $a^2 \Delta u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}$, де $x \in E_n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $0 < t < \infty$ зображується за формулою:

$$\Phi_n(x, y, t) = \frac{\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}\right)}{(2a\sqrt{t})^n}, \quad (4.26)$$

де відстань між точками введена як $|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$.

Доведемо цей факт. З цією метою покажемо, що функція (4.26) задовольняє рівняння теплопровідності, а для цього підрахуємо відповідні похідні:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \frac{\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}\right) \left(\frac{|x-y|^2}{4a^2t^2}\right)}{(2a\sqrt{t})^n} - \frac{\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}\right)}{(2a)^n} \cdot \frac{n}{2t^{n/2}t} = \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}\right)}{2t(2a\sqrt{t})^n} \cdot \left(\frac{|x-y|^2}{2a^2t} - n\right), \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_j} &= \frac{\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}\right)}{(2a\sqrt{t})^n} \cdot \left(-\frac{2(x_j-y_j)}{4a^2t}\right), \\
\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x_j^2} &= -\frac{\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}\right)}{(2a\sqrt{t})^n 2a^2t} - \frac{(x_j-y_j)\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}\right)}{2a^2t(2a\sqrt{t})^n} \left(-\frac{x_j-y_j}{2a^2t}\right) = \\
&= \frac{\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}\right)}{2a^2t(2a\sqrt{t})^n} \left[\frac{(x_j-y_j)^2}{2a^2t} - 1\right]. \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Підставимо співвідношення (4.27), (4.28) до рівняння теплопровідності:

$$a^2 \Delta \Phi_n = a^2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x_j^2} = \frac{\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}\right)}{(2a\sqrt{t})^n 2t} \left[\frac{|x-y|^2}{2a^2t} - n\right]. \tag{4.29}$$

Як бачимо, порівнявши вирази (4.29) та (4.27), обидві частини рівняння співпадають. Доведено, що функція (4.26) є фундаментальним розв'язком рівняння теплопровідності.

Введемо для скорочення запису диференціальний оператор L_1 : $L_1 u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u$ – оператор теплопровідності. Доведено, що $L_1 \Phi_n(x, y, t) = 0$. Покажемо, як зображується розв'язок задачі Коші через фундаментальну функцію:

$$\begin{cases} L_1 u(x, t) = 0, & x \in E_n, 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in E_n, \varphi(x) \in C(E_n), \end{cases} \tag{4.30}$$

$\varphi(x)$ – неперервна та обмежена функція.

Доведемо, що розв'язок задачі Коші (4.30) має вигляд:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{E_n} \Phi_n(x, y, t) \varphi(y) dy. \tag{4.31}$$

Розглянемо випадок $n=1$ – одновимірну задачу.

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}\right)}{2a\sqrt{t}}\varphi(y)dy. \quad (4.32)$$

Щоби довести, що $L_1u(x,t)=0$, потрібно внести диференціальний оператор під знак інтеграла:

$$L_1u(x,t)=L_1\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_1(x,y,t)\varphi(y)dy\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}L_1\Phi_1(x,y,t)\varphi(y)dy=0.$$

Але для цього маємо попередньо довести, що вихідний невластний інтеграл (4.32) є рівномірно збіжним за обома змінними, це по-перше. По-друге, маємо показати, що після внесення оператора він також залишається рівномірно збіжним.

З цією метою зробимо заміну змінних $x-y=2\sqrt{t}\tan\eta$, $y=x-2\sqrt{t}\tan\eta$,
 $dy=-2\sqrt{t}d\tan\eta$; $y=-\infty, \eta=-\infty$; $y=+\infty, \eta=+\infty$. У нових змінних інтеграл (4.32) прийме вигляд:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}I(x,t), I(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\eta^2}\varphi(x-2\sqrt{t}\tan\eta)d\eta. \quad (4.33)$$

Покажемо рівномірну збіжність відносно параметрів x та t невластного інтеграла (4.33). Промажоруюємо цей інтеграл інтегралом, який буде у свою чергу збіжним та не буде залежати від цих параметрів:

$$|I(x,t)|\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\eta^2}|\varphi(x-2\sqrt{t}\tan\eta)|d\eta\leq\frac{c}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\eta^2}d\eta \quad (4.34)$$

Інтеграл, що отримано у нерівності (4.34), є збіжним, звідки за критерієм Вейерштраса випливає, що інтеграл (4.32) є рівномірно збіжним за змінними x та t .

Внесемо оператор L_1 під знак інтеграла та доведемо його збіжність:

$$I^*(x,t)=\frac{1}{t^\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}\eta^me^{-\eta^2}\varphi(x-2\sqrt{t}\tan\eta)d\eta.$$

Підберемо для цього інтеграла мажоруючий. Якщо взяти за δ максимальне значення t , то отримаємо:

$$|I^*(x,t)| \leq \frac{c}{\delta^\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^m e^{-\eta^2} d\eta.$$

Інтеграл тут є незалежним від змінних x та t і збіжним. Отже, доведено, що вихідний інтеграл є рівномірно збіжним за змінними x та t і після застосування оператора диференціювання він також є рівномірно збіжний.

Покажемо, що початкові умови також задоволено. Використаємо той факт, що $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = 1$, звідки маємо $\varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta$.

Розглянемо різницю:

$$u(x,t) - \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} [\varphi(x - 2\sqrt{t}\eta) - \varphi(x)] d\eta. \quad (4.35)$$

Розіб'ємо інтервал інтегрування у (4.35) на $(-\infty; -N) \cup (-N; N) \cup (N; +\infty)$, де $N > 0$. Отже, різниця функцій (4.35) запишеться за формулою:

$$u(x,t) - \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-N} e^{-\eta^2} [\varphi(x - 2\sqrt{t}\eta) - \varphi(x)] d\eta + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N e^{-\eta^2} [\varphi(x - 2\sqrt{t}\eta) -$$

$$-\varphi(x)] d\eta + \int_N^{\infty} e^{-\eta^2} [\varphi(x - 2\sqrt{t}\eta) - \varphi(x)] d\eta. \quad (4.36)$$

Покажемо, що різниця функцій (4.36) прямує до нуля, коли t прямує до нуля. Проведемо оцінку:

$$|u(x,t) - \varphi(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-N} e^{-\eta^2} |\varphi(x - 2\sqrt{t}\eta) - \varphi(x)| d\eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_N^{\infty} e^{-\eta^2} |\varphi(x - 2\sqrt{t}\eta) - \varphi(x)| d\eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^N e^{-\eta^2} |\varphi(x - 2\sqrt{t}\eta) - \varphi(x)| d\eta. \quad (4.37)$$

Враховуємо той факт, що функція $\varphi(x)$ є всюди неперервною в просторі E_n , а значить є обмеженою, тобто:

$$|\varphi(x)| \leq c, |\varphi(x - 2\sqrt{t}\eta) - \varphi(x)| \leq |\varphi(x - 2\sqrt{t}\eta)| + |\varphi(x)| \leq 2c.$$

Отже, маємо:

$$|u(x,t)-\varphi(x)| \leq \frac{2c}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-N} e^{-\eta^2} d\eta + \frac{2c}{\sqrt{\pi}} \int_N^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^N e^{-\eta^2} |\varphi(x-2\sqrt{t}\eta) - \varphi(x)| d\eta.$$

Інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta$ є збіжним, звідки випливає:

$$\frac{2c}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-N} e^{-\eta^2} d\eta + \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_N^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta \leq \varepsilon/2. \quad (4.38)$$

У інтегралі, що залишився, враховуємо те, що $|\varphi(x-2a\eta\sqrt{t}) - \varphi(x)| d\eta \leq \varepsilon$, а інтеграл $\int_{-N}^N e^{-\eta^2} d\eta = \text{const} < +\infty$. Остаточно маємо:

$$|u(x,t) - \varphi(x)| \leq A\varepsilon \text{ при } t \rightarrow 0,$$

або, інакше кажучи:

$$\lim_{t \rightarrow 0} |u(x,t) - \varphi(x)| = 0. \quad (4.39)$$

З співвідношення (4.39) випливає, що початкові умови задовольнили.

Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд (4.31).

6. Стійкість задачі Коші

Покажемо, що якщо задана у початковій умові функція змінюється несуттєво, то і розв'язок задачі Коші також змінюється на будь-яку малу величину.

Нехай маємо дві функції $u_1(x,t), u_2(x,t)$, які задовольняють наступні задачі Коші:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty, \\ u_j(x,0) = \varphi_j(x), & -\infty < x < \infty, j=1,2. \end{cases} \quad (4.40)$$

Розв'язок задачі Коші буде стійкий, якщо у випадку, коли $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq \varepsilon$, різниця розв'язків задовольняє нерівність:

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq A\varepsilon, \quad (4.41)$$

де $A > 0$ – як завгодно мале додатне число, $A = \text{const}$.

З урахуванням зображення розв'язку задачі Коші (4.31) доведемо оцінку різниці розв'язків:

$$\begin{aligned} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}\right)}{2a\sqrt{t}} |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)| dy \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}\right)}{2a\sqrt{t}} dy \frac{A\varepsilon}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Таким чином, для задачі Коші доведено: 1) єдність розв'язку; 2) існування розв'язку; 3) стійкість. Отже, задача Коші є коректно поставленою задачею математичної фізики.

7. Парадокс теорії теплопровідності

Припустимо, що розглядається нагрітий стрижень, у кожній точці якого задано температуру. Припустимо, що нагрів проводився на ділянці стрижня $x \in [a, b]$. Введемо до розгляду функцію:

$$\varphi(y) = \begin{cases} =0, & x \notin [a, b] \\ >0, & x \in [a, b] \end{cases}.$$

Розв'язок відповідної задачі запишемо у зображенні:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^b \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{t}} \varphi(y) dy. \quad (4.43)$$

У будь-який момент часу підрахуємо температуру у довільній точці x_y нескінченного стрижня за формулою (4.43):

$$u(x_y, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^b \frac{e^{-\frac{(x_y-y)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{t}} \varphi(y) dy > 0. \quad (4.44)$$

Тобто в довільній точці у довільний момент часу існує температура. В тому і міститься парадокс теплопровідності: тепло розповсюджується миттєво. Це пов'язано з тим, що рівняння теплопровідності є рівнянням параболічного типу, хвилі тепла відсутні, тепло “миттєво” розповсюджується в тілі.

V. РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

Всі фізичні процеси, що пов'язані з процесами коливань, а саме – коливання струни, мембрани, газу, електромагнітні коливання приводять до задач, де використовуються рівняння гіперболічного типу. Характерною особливістю всіх перерахованих вище процесів є скінченна швидкість їх розповсюдження.

1. Задача Коші для рівняння коливань струни

Типовий представник рівнянь цього типу – це хвильове рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u(x, t), u(x, t) = u(x_1, x_2, \dots, x_n, t). \quad (5.1)$$

У випадку, коли $n=1$, хвильове рівняння перетворюється на рівняння коливань струни:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty. \quad (5.2)$$

Введемо нові змінні $\xi = x - 2t$, $\eta = x + ct$:

$$u(x, t) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\eta - \xi}{2c}\right) = \tilde{u}(\xi, \eta). \quad (5.3)$$

В нових змінних рівняння (5.2) прийме вигляд (див. додаток А):

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (5.4)$$

Проінтегруємо за змінною ξ рівняння (5.4):

$$\frac{\partial \tilde{u}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = f_0(\eta),$$

а після цього за змінною η . Загальний розв'язок рівняння (5.4) отримаємо у вигляді:

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \int f_0(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_2(\eta) + f_1(\xi).$$

Повернувшись до вихідних змінних, запишемо розв'язок:

$$u(x, t) = \varphi_0(x - ct) + \varphi_1(x + ct).$$

Проаналізуємо функції φ_0 та φ_1 :

$$\varphi_0(x - ct)|_{t=0} = \varphi_0(x) \quad (5.6)$$

$$\varphi_0(x-ct)\Big|_{t=t_0}=\varphi_0(x-ct_0) \quad (5.7)$$

Якщо побудувати графік функції $\varphi_0(x)$, то, як бачимо, графік функції $\varphi_0(x-ct_0)$ буде усунуто. Величина c – це швидкість хвилі, а функцію $\varphi_0(x-ct)$ називають *прямою хвилею*, на відміну від $\varphi_1(x+ct)$, яка є *зворотною хвилею*.

Їх графічне зображення дивись на рисунках 19 та 20.

Позначимо $x-ct=y$. $x=ct$, $y=0$.

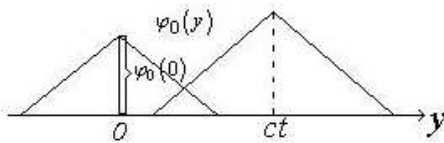


Рис. 19

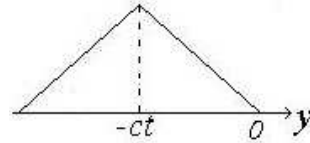


Рис. 20

Позначимо $x+ct=y$. $x=-ct$, $y=0$.

Задача Коші для рівняння коливань струни

Розглянемо задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad x \in E_1, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty. \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Вперше задачу (5.8) було розв'язано Даламбером. Побудуємо розв'язок та водночас встановимо, які обмеження потрібно накласти для його отримання.

Як показано раніше, розв'язок рівняння з (5.8) описується формулою (5.5). Задовольнимо першу початкову умову з (5.8):

$$u(x,0) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) = \varphi(x). \quad (5.9)$$

Відшукаємо похідну за часом з метою задовольнити другу початкову умову:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -c\varphi'_0(x-ct)\Big|_{t=0} + c\varphi'_1(x+ct)\Big|_{t=0} = -c\varphi'_0(x) + c\varphi'_1(x) = \psi(x). \quad (5.10)$$

Проінтегруємо за змінною s обидві частини останньої рівності:

$$c\varphi_1(x) - c\varphi_0(x) = \int_0^x \psi(s) ds + c_1. \quad (5.11)$$

З співвідношень (5.9) та (5.11) розшукаємо $\varphi_0(x)$ та $\varphi_1(x)$:

$$\varphi_0(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2c} \cdot \int_0^x \psi(s) ds - c, \quad (5.12)$$

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(s) ds + c.$$

Отже, відповідно до формули (5.9) отримаємо розв'язок задачі Коші (5.8) у вигляді:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-ct)}{2} + \frac{\varphi(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds. \quad (5.13)$$

Формулу (5.13) називають *формулою Даламбера*, вона і є розв'язком задачі Коші для коливань струни.

Доведемо тепер, що задача Коші (5.8) має єдиний розв'язок.

Теорема

Задача Коші (5.8) має єдиний розв'язок.

Доведення. Проводитиметься від протилежного. Припустимо, що у задачі (5.8) існує два розв'язки $u_j(x, t)$, $j=1, 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_j(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_j(x, t)}{\partial x^2}, \quad j=1, 2; \\ u_j(x, 0) = \varphi(x); \\ \left. \frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x). \end{array} \right. \quad (5.14)$$

Введемо нову функцію за формулою:

$$w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t). \quad (5.15)$$

Як бачимо, вона задовольняє наступній задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}; \\ w(x,0) = 0; \\ \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{array} \right. \quad (5.16)$$

Отримано однорідну задачу з однорідними умовами. Виходячи з цього, маємо, що $w(x,t) = 0$, а звідки $u_1(x,t) = u_2(x,t)$. Доведено, що задача Коші має єдиний розв'язок.

Доведемо тепер стійкість розв'язку задачі Коші для рівняння коливань струни.

Теорема

Малим змінам заданих функцій у задачі Коші для коливань струни відповідає мала зміна шуканого розв'язку.

Доведення

Припустимо, що існує два розв'язки задачі Коші, які задовольняють відповідним початковим умовам:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial x^2}; \\ u_j(x,0) = \varphi_j(x); \\ \left. \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_j(x). \end{array} \right. \quad (5.17)$$

Покажемо, що якщо $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq \varepsilon$ та $|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leq \varepsilon$, то з цього випливає, що $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq A\varepsilon$, де $A = \text{const}$, ε – як завгодно мале додатне число. Відповідно до формули Даламбера маємо:

$$u_j(x,t) = \frac{\varphi_j(x-ct)}{2} + \frac{\varphi_j(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi_j(s) ds, \quad j=1,2.$$

Розглянемо різницю $u_1(x,t) - u_2(x,t)$:

$$u_1(x,t)-u_2(x,t)=\frac{\varphi_1(x-ct)-\varphi_2(x-ct)}{2}+\frac{\varphi_1(x+ct)-\varphi_2(x+ct)}{2}+ \\ +\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}(\psi_1(s)-\psi_2(s))ds. \quad (5.18)$$

Проведемо оцінку різниці функцій за формулою (5.18):

$$|u_1(x,t)-u_2(x,t)|\leq\frac{|\varphi_1-\varphi_2|}{2}+\frac{|\varphi_1-\varphi_2|}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}|\psi_1(s)-\psi_2(s)|ds\leq \\ \leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}ds=\varepsilon+\varepsilon t=\varepsilon(1+t)=A(1+\varepsilon).$$

Якщо розглядувати скінченний часовий проміжок, то розв'язок задачі Коші буде стійкий.

Висновок, який можна зробити: задача Коші для рівняння коливань струни є коректно поставленою задачею математичної фізики.

Цікаво встановити, коли є справедливою формула Даламбера. Як легко перевірити, це буде, якщо $\varphi(x)\in l^2(E_1)$, $\psi(x)\in l^1(E_1)$. Тобто, мають місце досить жорсткі обмеження. Для того, щоб їх трохи послабити, розглянемо замість $\varphi(x)$ послідовність $\{\varphi_j(x)\}$ таку, що $\lim_{j\rightarrow\infty}\varphi_j(x)=\varphi(x)\notin l^2$, але $\varphi_j(x)\in l^2(E_1)$, $j=\overline{1,\infty}$.

Розв'язок задачі Коші у цьому випадку будується для кожної функції $\varphi_j(x)$. Якщо існує межа отриманої послідовності розв'язків $\{\varphi_j(x)\}$, $j=\overline{1,\infty}$, то цю межу називають узагальненим розв'язком гіперболічного типу: $\lim_{j\rightarrow\infty}u_j(x,t)=u(x,t)$.

Тривимірний випадок

Розв'яжемо частковий випадок задачі Коші для простору E_3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_\mu(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta u_\mu(x,t), \quad 0 < t < \infty, \\ u_\mu(x,0) = 0, \\ \left. \frac{\partial u_\mu}{\partial t} \right|_{t=0} = 4\pi c \mu(x), \quad x \in E_3. \end{array} \right. \quad (5.19)$$

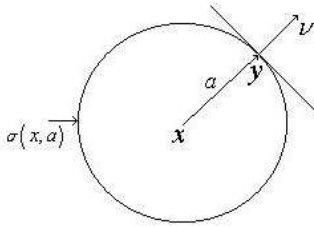


Рис. 21. Геометрія задачі

Припустимо, що x є початок сферичної системи координат і водночас центр кулі радіуса a (див. рис. 21, 22) $|x-y| \leq a$.

Розв'язок поставленої задачі записується за формулою:

$$u_{\mu}(x, t) = \frac{1}{ct} \int_{|x-y|=ct} \mu(y) d\sigma_y(x, ct) = \frac{1}{ct} \int_{\sigma(x, t)} \mu(y) d\sigma_y(x, ct), \quad (5.20)$$

де $ct=a$, а інтегрування проводиться за змінною y .

Доведемо це.

3 метою

полегшення інтегрування за координатою, зробимо заміну змінних:

$$\vec{y} = \vec{x} + ct\vec{v}, \quad (5.21)$$

$y=(y_1, y_2, y_3)$, $x=(x_1, x_2, x_3)$, $v=(v_1, v_2, v_3)$ – вектори.

Проекції цих векторів запишемо у

вигляді: $y_j = x_j + ctv_j$, $j=1, 3$. Отже, маємо, що

$$v_j = \frac{y_j - x_j}{ct} = \cos(\vec{v}, y_j).$$

Із співвідношення (5.21) випливає, що

$$|y-x|=ct|v|, |v|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}=1, \text{ як сума квадратів}$$

направляючих косинусів.

Графічно це визначає, що заміна змінних (5.21) перетворює сферу $\sigma(x, ct)$ до одиничної сфери $\sigma(0, 1)$.

З'ясуємо значення величини $dy=dy_1dy_2dy_3$ – величини об'єму елементарного паралелепіпеду – у сферичній системі координат (рис. 23). Елемент сферичної системи dV

дорівнюватиме: $dV=r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$

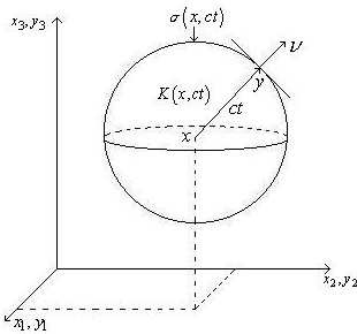


Рис. 22. Геометрія задачі

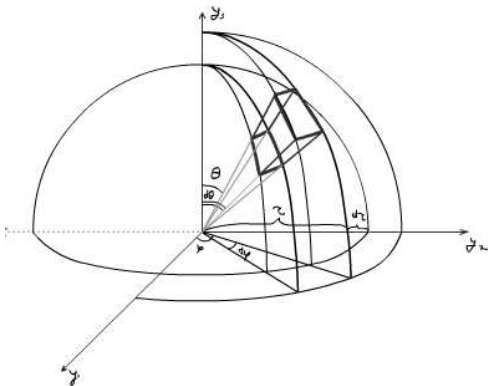
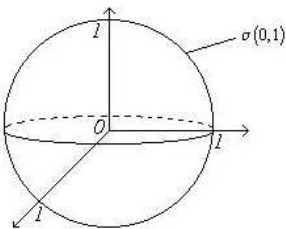


Рис. 23. Геометрія задачі

При збільшенні радіуса сфери на величину dr замість елемента кулі $d\sigma(0,r)$ отримаємо елемент кулі $d\sigma(0,r+dr)$. Отже, $dv=d\sigma(0,r)dr$.

У випадку, коли радіус сфери $r=1$ $d\sigma(0,1)=\sin\theta d\theta d\varphi$.

З урахуванням заміни змінних (5.21) та представленого вище маємо:

$$d\sigma(x,ct)=(ct)^2 \sin\theta d\theta d\varphi=(ct)^2 d\sigma(0,1). \quad (5.22)$$

Підставимо співвідношення (5.22) до формули (5.20):

$$u_\mu(x,t)=\frac{1}{ct} \int_{|\nu|=1} \mu(x+ctv)(ct)^2 d\sigma_\nu(0,1)=ct \int_{|\nu|=1} \mu(x+ctv) d\sigma_\nu(0,1). \quad (5.23)$$

Тут точка x не належить області інтегрування, тому якщо $\mu(x) \in C^2(E_3)$, можна застосувати до функції (5.23) оператор Лапласа:

$$\Delta_x u_\mu(x,t)=ct \int_{|\nu|=1} \Delta_x \mu(x+ctv) d\sigma_\nu(0,1)=\frac{1}{ct} \int_{|x-y|=ct} \Delta_y \mu(y) d\sigma_y(x,ct). \quad (5.24)$$

Перевіримо виконання початкових умов задачі Коші (5.19). З цією метою продиференціюємо спочатку функцію (5.23):

$$\frac{\partial u_\mu(x,t)}{\partial t}=c \int_{|\nu|=1} \mu(x+ctv) d\sigma_\nu(0,1)+ct \int_{|\nu|=1} \frac{\partial}{\partial t} \mu(x+ctv) d\sigma_\nu(0,1). \quad (5.25)$$

Враховуючи формулу зв'язку проекцій $y_j=x_j+ct \cos(v_j, y_j)$, можна записати похідну за змінною t у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu(x+ctv)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \mu(y) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mu(y)}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mu(y)}{\partial y_j} c \cos(v_j, y_j) = \\ &= c \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mu(y)}{\partial y_j} \cos(v_j, y_j) = c \int_{K(x,ct)} \Delta_y \mu(y) dy. \end{aligned}$$

Відповідно до цього формулу (5.25) перепишемо:

$$\frac{\partial u_\mu(x,t)}{\partial t} = \frac{u_\mu(x,t)}{t} + c^2 t I(x,t), \quad (5.26)$$

$$\text{де } I(x,t) = \int_{|\nu|=1} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mu(y)}{\partial y_j} \cos(v, y_j) d\sigma_\nu(0,1).$$

Першу початкову умову за рахунок зображення (5.23) виконано:

$$u_{\mu}(x,0)=0.$$

Перевіримо виконання другої початкової умови:

$$\left. \frac{\partial u_{\mu}(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = c\mu(x) \int_{|v|=1} d\sigma_v(0,1) = 4\pi c\mu(x).$$

Таким чином, доведено виконання початкових умов у разі зображення розв'язку задачі Коші у вигляді (5.23). Залишилося довести, що ця функція задовольняє хвильове рівняння.

У формулі (5.26) повернемося до старих змінних:

$$\frac{\partial u_{\mu}(x,t)}{\partial t} = \frac{u_{\mu}(x,t)}{t} + I, \quad (5.27)$$

$$I = \frac{1}{t} \int_{|x-y|=ct} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mu(y)}{\partial y_j} \cos(v, y_j) d\sigma_y(x, ct).$$

Застосуємо формулу Остроградського для випадку кулі $K(x, ct)$:

$$\int_{K(x, ct)} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial Q_j}{\partial y_j} dy = \int_{\substack{\sigma(x, t) \\ |x-y|=ct}} \sum_{j=1}^3 Q_j(y) \cos(v, y_j) d\sigma_y(x, ct), \quad (5.28)$$

$$\text{де } Q_j(y) = \frac{\partial \mu(y)}{\partial y_j}, \quad j=1, 3.$$

З цього випливає, що інтеграл (5.27) набуває вигляду об'ємного інтеграла:

$$I = \frac{1}{t} \int_{K(x, ct)} \Delta_y \mu(y) d\sigma_y = \frac{1}{t} \int_{K(c, t)} f(y) dy, \quad (5.29)$$

де $dy = r^2 \sin \theta dr d\theta du$, $0 \leq r \leq ct$, або у іншому запису $dy = d\sigma(0, r) dr$.

Запишемо об'ємний інтеграл через подвійні інтеграли:

$$I = \frac{1}{t} \int_0^{ct} r^2 dr \int_{\sigma(0, r)} \Delta_y \mu(y) d\sigma(x, r). \quad (5.30)$$

Знайдемо тепер першу та другу похідні за часом з урахуванням співвідношення (5.27) та зображення (5.30):

$$\frac{\partial u_{\mu}(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{t} \left[u_{\mu}(x,t) + \int_0^{ct} r^2 dr \int_{\sigma(0, r)} \Delta_y \mu(y) d\sigma(x, r) \right]. \quad (5.31)$$

Друга похідна за часом дорівнюватиме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_\mu(x, t)}{\partial t^2} = & -\frac{1}{t^2} \left[u_\mu(x, t) + \int_0^{ct} dr \int_{|x-y|=ct} \Delta_y \mu(y) d\sigma(x, r) \right] + \\ & + \frac{1}{t} \left[\frac{\partial u_\mu(x, t)}{\partial t} + c \int_{|x-y|=ct} \Delta_y \mu(y) d\sigma(x, ct) \right] = -\frac{1}{t^2} \left[u_\mu(x, t) + \right. \\ & + \int_0^{ct} dr \int_{|x-y|=ct} \Delta_y \mu(y) d\sigma(x, r) \left. \right] + \frac{1}{t} \left[\frac{1}{t} u_\mu(x, t) + \frac{1}{t} \int_0^{ct} dr \int_{|x-y|=r} \Delta_y \mu(y) d\sigma(x, r) \right] + \\ & + c \int_{|x-y|=ct} \Delta_y \mu(y) d\sigma(x, ct) \left. \right] = \frac{c}{t} \int_{|x-y|=ct} \Delta_y \mu(y) d\sigma(x, ct). \quad (5.32) \end{aligned}$$

Отже, з урахуванням формул (5.24) та (5.32) доведено, що

$$c^2 \Delta u_\mu(x, t) = \frac{\partial^2 u_\mu}{\partial t^2},$$

а з цього випливає, що розв'язком задачі Коші для тривимірного випадку (5.19) є зображення (5.20).

Якщо припустити, що функцію $\mu(x)$ можна взяти у вигляді $\mu(x) = \frac{\psi(x)}{4\pi c}$, $\psi(x) \in C^2(E_3)$, то можна довести, що наступне зображення також задовольняє задачу Коші:

$$u_\psi(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|x-y|=ct} \psi(y) d\sigma(x, ct), \quad (5.33)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta u_\psi(x, t) &= \frac{\partial^2 u_\psi(x, t)}{c^2 \partial t^2}, \quad 0 \leq t < \infty, \\ u_\psi(x, 0) &= 0, \quad x \in E_3, \\ \frac{\partial u_\psi(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \psi(x). \end{aligned} \right.$$

3. Формули Кірхгофа. Принцип Гюйгенса

Розглянемо задачу Коші:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{c^2 \partial t^2}, \quad x \in E_3, \quad 0 < t < \infty, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x). \end{array} \right. \quad (5.34)$$

Якщо замість невідомої функції $u(x,t)$ ввести нову функцію $v(x,t)$ за формулою:

$$v(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad (5.35)$$

то можна показати, що функція (5.35) задовольняє рівняння задачі:

$$\Delta v(x,t) = \Delta \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0,$$

що випливає з того факту, що:

$$\Delta \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^3} - c^2 \Delta \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \Delta u(x,t) \right] = \frac{\partial}{\partial t} [0] = 0.$$

Задовольнимо початкові умови, враховуючи що

$$v(x,t) = \frac{\partial u_\mu(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{1}{ct} \int_{|x-y|=ct} \mu(y) d\sigma_y(x, ct). \quad (5.36)$$

Позначимо:

$$u_\varphi(x,t) = \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial u_\mu(x,t)}{\partial t} \Big|_{\mu(x)=\varphi(x)} = \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{t} \int_{|x-y|=ct} \varphi(y) d\sigma(y).$$

Функція (5.36) є хвильовою функцією, що задовольняє хвильове рівняння. З зображення (5.36) легко отримати, що

$$u_\varphi(x,0) = \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial u_\mu(x,t)}{\partial t} \Big|_{\mu(x)=\varphi(x)} = \frac{1}{4\pi c} 4\pi c \mu(x) \Big|_{\mu(x)=\varphi(x)} = \varphi(x).$$

Знайдемо похідну за часом та візьмемо в неї $t=0$, $\mu(x)=\varphi(x)$:

$$\left. \frac{\partial u_\mu(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{1}{4\pi c} \left. \frac{\partial^2 u_\mu(x,t)}{\partial t^2} \right|_{t=0, \mu(x)=\psi(x)}.$$

Якщо вимагати, щоби функції $\varphi(x) \in C^3(E_3)$, $\psi(x) \in C^2(E_3)$, то зображення (5.36) буде задовольняти всім умовам задачі Коші, а отриману формулу називають *формулою Кірхгофа*:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|x-y|=ct} \psi(y) d\sigma_y(x,ct) + \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{t} \int_{|x-y|=ct} \varphi(y) d\sigma_y(x,ct). \quad (5.37)$$

Зформулюємо *принцип Гюйгенса*.

Нехай у точці u локалізовано вихідне збурення, тобто функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ відмінні від нуля зовні області D . Зафіксуємо час $t=t_*$, та введемо позначення: d_1 – мінімальна відстань від точки спостереження u до області D , D_1 – максимальна відстань. У випадку, коли $ct_* < d_1$, хвиля збурення ще не торкається області D на відміну від випадку $ct_* > d_1$, коли збурення досягли області. Аналогічним чином, якщо $ct_* > D_1$, збурення пройшли область D та вона знаходиться у спокої. Таким чином, збурення будуть протікати у області D , коли $d_1 < t_* c < D_1$. В цьому і міститься принцип Гюйгенса: локалізація у просторі початкового збурення відповідає локалізації коливань у часі.

VI. СПЕЦІАЛЬНІ ФУНКЦІЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Практичне застосування диференціальних рівнянь досить різних задач, які відносяться до теплопровідності та динаміки, електромагнітних коливань та аеромеханіки, квантової механіки та теорії потенціалів, приводить до спеціальних функцій.

У наступному розділі міститься краткі, але важливі для застосувань властивості основних спеціальних функцій, а також приклади задач, де виникає необхідність їх застосування.

6.1. Бета- та гама-функція Ейлера

За означенням Γ функція Ейлера зображується у вигляді інтеграла:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (6.1)$$

Для того, щоб цей інтеграл був збіжний, має виконуватися умова $\operatorname{Re} z > 0$; відмітимо, що гама-функція може бути комплексною. Встановимо важливу для використання формулу:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt = \left[-t^z e^{-t} \right]_0^{+\infty} + z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z \Gamma(z).$$

Отже, маємо:

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z), \quad (6.2)$$

або $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$. Розглянемо часткові випадки гама-функції.

Візьмемо $z=0$. За формулою (6.2) маємо $\Gamma(0) = \frac{\Gamma(1)}{0}$, значення $\Gamma(1)$ за

визначенням (6.1) дорівнює 1. Отже, $\Gamma(0) = \frac{\Gamma(1)}{0} = \infty$.

При $z=-1$ за формулою (6.2) здобуваємо $\Gamma(-1) = \frac{\Gamma(0)}{-1} = -\infty$; $\Gamma(-2) = \frac{\Gamma(-1)}{-2} = +2$ і т. д. ... $\Gamma(-m) = \infty$, $m=0,1,2,\dots$, тобто у точці $(-m)$ гама-функція має полюси першого порядку. Графік гама-функції має вигляд (рис. 24):

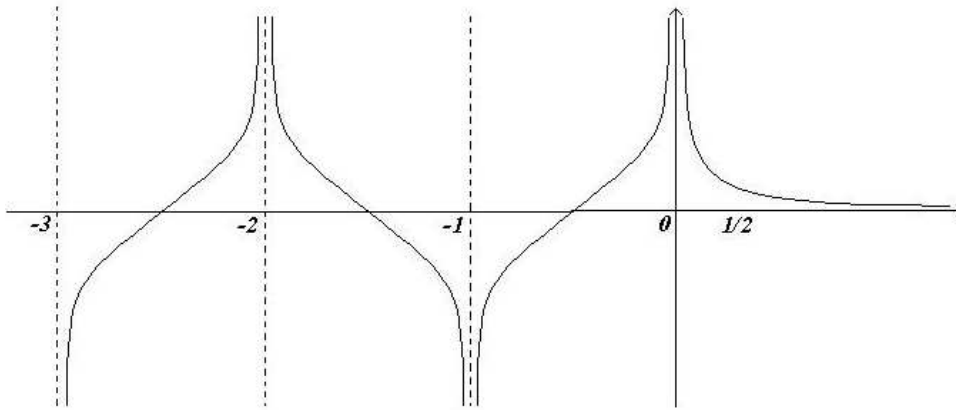


Рис. 24. Графік гама-функції

Введемо поняття символу Похгаммера:

$$\begin{cases} (a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1), \\ (a)_0 = 1. \end{cases}$$

За його допомогою зобразимо значення гама-функції для цілих додатних значень аргументу:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \dots = n! \quad (6.3)$$

Розглянемо інший випадок:

$$\begin{aligned} \Gamma(a+n) &= (a+n-1)\Gamma(a+n-1) = (a+n-1)(a+n-2)\Gamma(a+n-2) = \dots = a\Gamma(a)\dots \\ &\dots (a+n-2)(a+n-1) = (a)_n \Gamma(a) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Звідки випливає, що

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \quad (6.5)$$

Розглянемо випадок, коли a є ціле, від'ємне число: $a = -m$.

1) Нехай $m \geq n$:

$$\begin{aligned} (-m)_n &= (-m)(-m+1)\dots(-m+n-1) = (-1)^n m(m-1)\dots(m-n+1) = \\ &= (-1)^n m(m-1)\dots(m-n+1) \frac{(m-n)!}{(m-n)!} = (-1)^n \frac{m!}{(m-n)!} \end{aligned}$$

2) Нехай $m < n$. Спочатку розглянемо окремий випадок $m = -2, n = 3$.

$(-2)_3 = (-2)(-2+1)(-2+1+1) = 0$, тобто для довільних $m < n$ завжди зустрінеться множник, який буде дорівнювати нулеві. Для від'ємних значень отримано остаточну формулу:

$$(-m)_n = \begin{cases} \frac{(-1)^n m!}{(m-n)!}, & m \geq n \\ 0, & m < n \end{cases} \quad (6.6)$$

Бета-функція Ейлера $B(x, y)$

За означенням функція визначається наступним чином:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \operatorname{Re} x, \operatorname{Re} y > 0. \quad (6.7)$$

Знайдемо зв'язок між бета- та гама-функціями. Для цього зробимо наступну заміну: $t = \frac{\tau}{1+\tau}$. Нижня та верхня межі інтегралу будуть дорівнюватиме:

$$t=0 \rightarrow \tau=0, \quad t=1 \rightarrow \tau=\infty, \quad dt = \frac{d\tau}{(1+\tau)^2}.$$

З урахуванням заміни функція (6.7) набуває вигляду:

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{\tau^{x-1}}{(1+\tau)^{x-1}} \left(\frac{1}{1+\tau} \right)^{y-1} \frac{d\tau}{(1+\tau)^2} = \int_0^\infty \frac{\tau^{x-1}}{(1+\tau)^{x+y}} d\tau. \quad (6.8)$$

Зробимо заміну змінних $t=su$ у зображенні гама-функції (6.1), тут u – фіксоване число, а s – змінна: $\left[\begin{array}{c} dt=uds \\ t=0; s=0; t=\infty; s=\infty \end{array} \right]$.

З урахуванням заміни зображення (6.1) набуває вигляду:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty (su)^{z-1} e^{-su} u ds = \int_0^\infty s^{z-1} u^z e^{-su} ds. \quad (6.9)$$

Або в іншій формі:

$$\frac{\Gamma(z)}{u^z} = \int_0^\infty s^{z-1} e^{-su} ds. \quad (6.10)$$

У виразі (6.10) покладемо $z=x+y, u=1+\tau$:

$$\frac{\Gamma(x+y)}{(1+\tau)^{x+y}} = \int_0^\infty s^{x+y-1} e^{-s(1+\tau)} ds. \quad (6.11)$$

Домножимо обидві частини (6.11) на множник τ^{x-1} та проінтегруємо на проміжку $\tau \in (0; \infty)$:

$$\Gamma(x+y) \int_0^{\infty} (1+\tau)^{-x-y} \tau^{x-1} d\tau = \int_0^{\infty} \tau^{x-1} \int_0^{\infty} s^{x+y-1} e^{-s(1+\tau)} ds d\tau. \quad (6.12)$$

Як бачимо, інтеграл у лівій частині рівності (6.12) за формулою (6.8) є бета-функцією Ейлера. Підрахуємо інтеграл, що стоїть у правій частині:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} s^{x+y-1} ds \int_0^{\infty} \tau^{x-1} e^{-s(1+\tau)} d\tau &= \int_0^{\infty} s^{x+y-1} e^{-s} ds \int_0^{\infty} \tau^{x-1} e^{-s\tau} d\tau = \left[\begin{array}{l} t=s\tau \\ dt=sd\tau \end{array} \right] = \\ &= \int_0^{\infty} s^{x+y-1} e^{-s} ds \int_0^{\infty} t^{x-1} \frac{1}{s^{x-1}} e^{-t} \frac{dt}{s} = \int_0^{\infty} s^{y-1} e^{-s} ds \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x) \Gamma(y). \end{aligned}$$

З рівності (6.12) остаточно випливає:

$$\Gamma(x+y) B(x, y) = \Gamma(x) \Gamma(y) \quad (6.13)$$

та

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Як бачимо, бета-функція є симетричною функцією – $B(x, y) = B(y, x)$.

Розглянемо окремі випадки її значень:

$$\begin{aligned} B(x, x) &= \int_0^1 [t(1-t)]^{x-1} dt = \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{2}-s \\ dt=ds \end{array} \right] = \int_{-1/2}^{1/2} [(1/2-s)(1/2+s)]^{x-1} ds = \\ &= 2 \int_0^{1/2} (1/4-s^2)^{x-1} ds = \left[\begin{array}{l} s=\frac{\tau}{2}; ds=\frac{1}{2} d\tau \\ s1/2 \rightarrow \tau=1; \end{array} \right] = \\ &= \int_0^1 \frac{(1-\tau^2)^{x-1}}{2^{2x-2}} d\tau = \frac{1}{2^{2x-2}} \int_0^1 (1-\tau^2)^{x-1} d\tau. \end{aligned}$$

Остаточно отримано:

$$B(x, x) = 2^{2-2x} \int_0^1 (1-\tau^2)^{x-1} d\tau. \quad (6.14)$$

Нехай $x=1/2$.

Тоді:

$$B(1/2, 1/2) = 2 \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \left[\begin{array}{l} \tau = \sin t; \tau=0; t=0; \\ d\tau = \cos t dt; \tau=1; t=\pi/2 \end{array} \right] = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t dt}{\cos t} = 2t \Big|_0^{\pi/2} = \pi. \quad (6.15)$$

З іншого боку, відповідно до формули (6.13):

$$\frac{[\Gamma(1/2)]^2}{\Gamma(1)} = \pi, \text{ де } \Gamma(1)=1, \text{ тобто маємо:}$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}. \quad (6.16)$$

Якщо у формулі (6.14) зробити заміну змінних $\tau^2=t$, $\tau=\sqrt{t}$, $d\tau=\frac{1}{2}t^{-1/2}$, то матимемо:

$$\begin{aligned} B(x, x) &= 2^{2-2x} \int_0^1 (1-t)^{x-1} \frac{1}{2} t^{-1/2} dt = 2^{2-2x} \int_0^1 (1-t)^{x-1} \frac{1}{2} t^{-1/2-1/2+1/2} dt = \\ &= 2^{1-2x} \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{1/2-1} dt = 2^{1-2x} B\left(x, \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Використаємо формулу (6.13) з урахуванням отриманого співвідношення:

$$\begin{aligned} B(x, x) \Gamma(2x) &= [\Gamma(x)]^2, \\ \frac{[\Gamma(x)]^2}{\Gamma(2x)} &= 2^{1-2x} B\left(x, \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2x} \frac{\Gamma(x) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}, \\ \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} &= 2^{1-2x} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

З формули (6.18) випливає, що $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$:

$$\Gamma(2x) = \frac{\Gamma(x) \Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2^{1-2x} \sqrt{\pi}} = \frac{\Gamma(x) \Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) 2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}. \quad (6.19)$$

Важливою для практики є наступна формула:

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}. \quad (6.20)$$

6.2. Гіпергеометрична функція Гауса

За означенням гіпергеометрична функція зображується за формулою:

$$F(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n. \quad (6.21)$$

Тут $(a)_n, (b)_n, (c)_n$ – символи Похгаммера. Постійні a, b, c та змінна z , взагалі кажучи, можуть бути комплекснозначними. Що гіпергеометрична функція задовольняє рівняння:

$$z(1-z)u''(z) + (c - (a+b+1)z)u'(z) - abu(z) = 0 \quad (6.22)$$

$$\text{Часткове значення функції при } z=0 \quad F(a, b, c; 0) = \frac{(a)_0 (b)_0}{(c)_0 0!} = 1.$$

З'ясуємо умови, за якими ряд (6.21) збігається. Для цього використаємо принцип Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(a)_{n+1} (b)_{n+1} z^{n+1} (c)_n n!}{(c)_{n+1} (n+1)! (a)_n (b)_n z^n} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a(a+1) \dots (a+n-1)(a+n) b(b+1) \dots (b+n-1)(b+n) z^{n+1} c(c+1) \dots (c+n-1)n!}{c(c+1) \dots (c+n-1)(c+n)(n+1)! a(a+1) \dots (a+n-1)b(b+1) \dots (b+n-1)z^n} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(a+n)(b+n)z}{(c+n)(n+1)} \right| = |z|. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Як бачимо, при $|z| < 1$ ряд (6.21) збігається, при $|z| > 1$ розбігається. Якщо $|z| = 1$, потрібно провести додаткові дослідження, щоб з'ясувати збіжність цього ряду.

Відмітимо певні окремі випадки гіпергеометричної функції. Наприклад, $f(x) = (1-x)^{-a}$. Для цього покажемо, що ця функція є окремим випадком гіпергеометричної функції. Розвинемо цю функцію у ряд Маклорена. Відшукаємо її похідні:

$$\begin{aligned} f'(x) &= xa(1-x)^{-a-1}; \quad f''(x) = a(a+1)(1-x)^{-a-2} = (a)_2 (1-x)^{-a-2}; \\ f'''(x) &= (a)_3 (1-x)^{-a-3}; \dots f^{(m)}(x) = (a)_m (1-x)^{-a-m}, \\ f^{(m)}(0) &= (a)_m. \end{aligned}$$

Розвинення у ряд Маклорена набуде вигляду:

$$(1-x)^{-a} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)x^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m x^m}{m!}. \quad (6.24)$$

Легко бачити, що вираз у (6.24) є частковим випадком гіпергеометричної функції:

$$(1-x)^{-a} = F(a, b, b, x).$$

Отримаємо інтегральне зображення функції Гауса. Має місце наступне співвідношення:

$$F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a} dt. \quad (6.25)$$

Невласний інтеграл (6.25) буде існувати, якщо $\text{Re} b > 0, \text{Re}(c-b) > 0$. Доведемо зображення (6.25). З цією метою розвинемо вираз $(1-zt)^{-a}$ у ряд:

$$(1-zt)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (zt)^n}{n!}$$

та підставимо його у праву частину рівності (6.25):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a} dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} z^n \int_0^1 t^{b+n-1} (1-t)^{c-b-1} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} z^n B(b+n, c-b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} z^n \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+n)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} \frac{(a)_n}{n!} z^n \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+n)} = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n = \\ &= \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} F(a, b, c, z). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Під час отримання співвідношення (6.26) використано той факт, що $\frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)} = (b)_n$. Підставляючи вираз (6.26) у праву частину зображення (6.25), отримаємо тотожність. Отже, інтегральне зображення гіпергеометричної функції доведено.

Ряд, що стоїть у зображенні гіпергеометричної функції, збігається рівномірно за умови $|z| < 1$, отже, можна його

диференціювати скільки завгодно разів. Знайдемо першу похідну гіпергеометричної функції:

$$\begin{aligned} \frac{dF(a,b;c;z)}{dz} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} n z^{n-1} = \left[\frac{m=n-1}{m=0} \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+1} (b)_{m+1}}{(c)_{m+1} (m+1)!} (m+1) z^m = \\ &= \left[\begin{aligned} (a)_{m+1} &= a(a+1)\dots(a+m-1)(a+m) = \\ &= (a)_m (a+m) \\ (a+1)_m &= (a+1)(a+2)\dots(a+m-1) \frac{a}{a} = \frac{(a)_{m+1}}{a} \end{aligned} \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a(a+1)_m b(b+1)_m}{c(c+1)_m m!} z^m = \\ &= \left(\frac{c}{ab} \right)^{-1} F(a+1; b+1; c+1; z). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Знайдемо за аналогічною схемою другу похідну гіпергеометричної функції:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F(a,b;c;z)}{dz^2} &= \frac{d}{dz} \left[\left(\frac{c}{ab} \right)^{-1} F(a+1, b+1; c+1; z) \right] = \\ &= \left(\frac{c(c+1)}{a(a+1)b(b+1)} \right)^{-1} F(a+2, b+2; c+2; z). \end{aligned}$$

Якщо узагальнити ці результати, то можна записати формулу для відшукування похідної n -го порядку:

$$\frac{d^n F(a,b;c;z)}{dz^n} = \left(\frac{(c)_n}{(a)_n (b)_n} \right)^{-1} F(a+n, b+n; c+n; z). \quad (6.28)$$

6.3. Функція Лежандра

Функції Лежандра є розв'язками наступного диференціального рівняння:

$$\frac{(\sin \theta T'(\theta))'}{\sin \theta} + \left[v(v+1) - \frac{\mu^2}{\sin^2 \theta} \right] T(\theta) = 0, \quad \theta \in (0; \pi). \quad (6.29)$$

Рівняння (6.29) є рівнянням Лежандра.

Проведемо більш детальне дослідження цих важливих для практичних застосувань функцій.

Розглянемо рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, де зробимо перехід до сферичної системи координат $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$. У нових змінних вихідна функція прийме вигляд $u(x, y, z) = u(r \sin \theta \cos \varphi$,

$r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) = u(r, \theta, \varphi)$. Отже, запишемо рівняння Лапласа у сферичних координатах, враховуючи формулу складної похідної та зв'язок між декартовою та сферичною системами:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}, \theta = \arccos \frac{z}{r}, \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{r \sin \theta \cos \varphi}{r} = \sin \theta \cos \varphi.$$

Відшукавши другі похідні за аналогічною схемою, наприкінці отримаємо рівняння Лапласа у сферичних координатах:

$$\Delta \tilde{u}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} (r^2 \tilde{u}')' + \frac{(\sin \theta \tilde{u}'')}{r^2 \sin \theta} + \frac{\tilde{u}''}{r^2 \sin^2 \theta} = 0. \quad (6.30)$$

Тут штрих позначає похідну за змінною x , “□” – за змінною θ , а “ ” – за змінною φ .

Розв'яжемо рівняння (6.30) методом відокремлення змінних, для чого зобразимо шукану функцію наступним чином:

$$\tilde{u}(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi). \quad (6.31)$$

Підставимо зображення (6.31) до рівняння (6.30):

$$Y(r^2 R')' + \frac{(\sin \theta Y'')}{\sin \theta} R + \frac{Y'' R}{\sin^2 \theta} = 0. \quad (6.32)$$

Поділимо обидві частини рівності на вираз RY :

$$\frac{(r^2 R')'}{R} + \frac{(\sin \theta Y'')}{\sin \theta Y} + \frac{Y''}{\sin^2 \theta Y} = 0. \quad (6.33)$$

Як випливає з методу відокремлення змінних, розв'яжемо два диференціальних рівняння:

$$\begin{cases} (r^2 R')' = \lambda R, \\ \frac{(\sin \theta Y'')}{\sin \theta} + \frac{Y''}{\sin^2 \theta} = \lambda R. \end{cases} \quad (6.34)$$

Для відшукування функції $R(r)$ отримано рівняння Ейлера:

$$(r^2 R')' = \lambda R.$$

Система (6.33) містить одне звичайне диференціальне рівняння та рівняння у часткових похідних, яке також розв'яжемо методом відокремлення змінних. З цією метою зобразимо функцію $Y(\theta, \varphi)$ у вигляді:

$$Y(\theta, \varphi) = T(\theta) \Phi(\varphi). \quad (6.35)$$

Зображення (6.35) у свою чергу підставимо до другого рівняння системи (6.34):

$$\frac{(\sin \theta T'')}{\sin \theta} \Phi(\varphi) + \frac{T(\theta) \Phi''}{\sin^2 \theta} = \lambda T \Phi. \quad (6.36)$$

Поділимо обидві частини рівності (6.35) на вираз $T\Phi$:

$$\frac{(\sin \theta T'')}{\sin \theta T} + \frac{\Phi''}{\sin^2 \theta \Phi} = \lambda. \quad (6.37)$$

Будемо вимагати, щоб:

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = c_2. \quad (6.38)$$

Тоді з рівності (6.37) випливає:

$$\frac{(\sin \theta T'')}{\sin \theta T} + \frac{c_2}{\sin^2 \theta} - \lambda = 0. \quad (6.39)$$

Помножимо рівність (6.39) на T , з чого отримаємо диференціальне рівняння для відшукування функції $T(\theta)$:

$$\frac{(\sin \theta T'')}{T \sin \theta} + \frac{c_2}{\sin^2 \theta} - \lambda = 0. \quad (6.40)$$

Зафіксуємо сталі c_2 та λ : $c_2 = -\mu^2$, $\lambda = -\nu(1+\nu)$.

Лежандр розглядав випадок $\mu=0$. Рівнянню (6.29) задовольняють дві функції – сферичні функції I-го та II-го роду $T(\theta) = \begin{cases} P_v^\mu(\cos \theta) \\ Q_v^\mu(\cos \theta) \end{cases}$

(їх іноді називають *приєднані функції Лежандра I-го та II-го роду*).

Розглянемо властивості першої з них.

Приєднана функція I-го роду $P_v^\mu(\cos \theta)$ може бути зображена через гіпергеометричну функцію:

$$\begin{aligned} P_v^\mu(\cos \theta) &= \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta} \right)^{\mu/2} F\left(-v, v+1; 1-\mu; \frac{1-\cos \theta}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right)^\mu F\left(-v, v+1; 1-\mu; \sin^2 \frac{\theta}{2}\right). \end{aligned} \quad (6.41)$$

Впевнимся, що функція $P_v^\mu(\cos \theta)$ дійсно задовольняє рівняння Лежандра. З цією метою зробимо заміну змінних $\cos \theta = x$, після якої рівняння Лежандра (6.40) прийме алгебраїчний вигляд:

$$\begin{aligned} T(\theta) &= T(\arccos x) = u(x), \quad \theta = \arccos x, \quad \sin \theta = \sqrt{1-x^2}, \\ d\theta &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \frac{dx}{d\theta} = -\sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-\cos^2 \theta} = -\sin \theta. \end{aligned}$$

З урахуванням вищенаведених формул маємо:

$$\frac{dT}{d\theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} = -u'(x) \sqrt{1-x^2}.$$

Підставимо значення похідної до першого доданка рівняння (6.40):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d \sin \theta T'(\theta)}{d\theta} &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{d(u'(x)(1-x^2))}{dx} \times \\ & \quad (-\sqrt{1-x^2}) = \frac{d(u'(x)(1-x^2))}{dx}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

У отриманому виразі (6.42) проведемо диференціювання та підставимо отримане значення у рівняння (6.40):

$$(1-x)^2 u''(x) - 2xu'(x) + \left[v(1+v) - \frac{\mu^2}{1-x^2} \right] u(x) = 0. \quad (6.43)$$

Приєднана функція Лежандра першого роду є розв'язком цього рівняння:

$$P_v^\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\mu/2} F\left(-v, v+1; 1-\mu; \frac{1-x^2}{2}\right). \quad (6.44)$$

Коли $\mu=0$, $P_v^0(x)=P_v(x)$ – є функція Лежандра, яка виражається через гіпергеометричну функцію:

$$P_v(x) = F\left(-v, v+1; 1; \frac{1-x^2}{2}\right), \text{ або} \\ P_v(\cos \theta) = F\left(-v, v+1; 1; \sin^2 \frac{\theta}{2}\right). \quad (6.45)$$

Як бачимо, функція Лежандра 1-го роду є регулярною в околі нуля. Якщо вважати $v=\mu$ – ціле число, то ряд у гіпергеометричній функції обірветься і отримаємо *многочлен Лежандра*:

$$P_m(x) = \sum_{n=0}^m \frac{(-m)_n (v+1)_n}{(-1)_n n!} \left(\frac{1-x^2}{2} \right)^n. \quad (6.46)$$

Другий розв'язок рівняння Лежандра, *сферична функція другого роду*:

$$Q_v^\mu(\cos \theta) = \frac{\Gamma(1+v+\mu)\Gamma(-\mu)}{2\Gamma(1+v-\mu)} \operatorname{tg}^\mu \frac{\theta}{2} F\left(-v, v+1; \mu+1; \sin^2 \theta\right) + \\ + \frac{1}{2} \Gamma(\mu) \cos \mu \theta \operatorname{ctg}^\mu \frac{\theta}{2} F\left(-v, v+1; 1-\mu; \sin^2 \theta\right). \quad (6.47)$$

На відміну від функції Лежандра 1-го роду, функція $Q_v^\mu(\cos \theta)$ у нулі є нерегулярна (бо $\operatorname{ctg} \theta$ у нулі прямує до нескінченності).

6.4. Вироджена гіпергеометрична функція

Вироджена гіпергеометрична функція зображується у вигляді ряду:

$$\Phi(a; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{(c)_n n!}. \quad (6.48)$$

Вироджена гіпергеометрична функція задовольняє наступне диференціальне рівняння:

$$zu''(x) + (c-z)u'(z) + au(z) = 0. \quad (6.49)$$

Встановимо область збіжності ряду (6.48). Для цього розглянемо такий випадок гіпергеометричної функції Гауса –

$F\left(a, b, c; \frac{z}{b}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} \left(\frac{z}{b}\right)^n$. Ряд у правій частині є збіжним при

$\left|\frac{z}{b}\right| < 1$ або $|z| < |b|$. Знайдемо межу $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{(b)_n}{b^n}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b)_n}{b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b(b+1)\dots(b+n-1)}{b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n \left(1 + \frac{1}{b}\right) \dots \left(1 + \frac{n-1}{b}\right)}{b^n} = 1.$$

З отриманого випливає, що значення межі гіпергеометричної функції дорівнює:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F\left(a, b, c; \frac{z}{b}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n n!} z^n = \Phi(a; c; z).$$

Збіжність гіпергеометричної функції вимагатиме умови $|z| < |b|$, але при прямуванні b до нескінченності здобудемо, що область збіжності виродженої функції $|z| < \infty$, тобто ряд є всюди збіжний.

Отже, вироджена функція є цілою.

Розглянемо частковий випадок, коли $a = c$:

$$\Phi(a; a; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

Отримаємо інтегральне зображення виродженої гіпергеометричної функції:

$$\Phi(a; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} e^{zt} dt. \quad (6.50)$$

Для збіжності цього невластного інтеграла необхідно, щоби виконувалися умови $\operatorname{Re} a > 0, c-a > 0$ (перша умова забезпечує регулярність у нулі, а друга – у одиниці).

Неважко помітити, що якби множник e^{zt} був би відсутній під інтегралом, то формула (6.50) визначала б бета-функцію:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-x-1} dt, \quad x=a, y=c-a. \quad (6.51)$$

Розвинемо множник e^{tz} у ряд Макгорена, який є рівномірно збіжним, та проведемо почленне інтегрування:

$$J = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tz)^n}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} t^n dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_0^1 t^{a+n-1} (1-t)^{c-a-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} B(a+n, c-a). \quad (6.52)$$

Використаємо зображення бета-функції через гама-функцію Гауса (6.13):

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c+n)}. \quad (6.53)$$

Врахуємо тепер, що $(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$, $(c)_n = \frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)}$ та сформуємо символ Похгаммера під знаком суми у вираз (6.53):

$$\begin{aligned} J &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{\Gamma(c-a)\Gamma(a)}{\Gamma(c)} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} = \\ &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} \Phi(a; c; z). \end{aligned} \quad (6.54)$$

Таким чином, доведено формулу інтегрального зображення виродженої гіпергеометричної функції.

Для того, щоб записати формулу диференціювання виродженої гіпергеометричної функції, використаємо вже доведену формулу диференціювання гіпергеометричної функції Гауса:

$$\frac{d^m F(a, b; c; z)}{dz^m} = \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m} \Gamma(a+m, b+m; c+m; z).$$

Тоді для виродженої функції маємо:

$$\frac{d^m \Phi(a; c; z)}{dz^m} = \frac{(a)_m}{(c)_m} \Phi(a+m; c+m; z). \quad (6.55)$$

6.5. Циліндричні функції

Циліндрична функція першого роду (її називають *функцією Беселя*) зображується за допомогою виродженої гіпергеометричної функції:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{e^{-ix}}{\Gamma(\nu+1)} \Phi\left(\nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; 2ix\right). \quad (6.56)$$

Циліндричним функціям задовольняють рівняння:

$$x[xu'(x)]' - (\nu^2 - x^2)u(x) = 0.$$

Для з'ясування властивості функції Беселя використаємо одержані раніше формули для виродженої гіпергеометричної функції. Зокрема, формулу інтегрального зображення (6.49), де покладемо:

$$a=v+\frac{1}{2}, c=2v+1, z=2ix, c-a=v+\frac{1}{2}, a-1=v-\frac{1}{2}, c-a-1=v-\frac{1}{2}.$$

Отримано вираз:

$$\Phi(v+1/2, 2v+1, 2ix) = \frac{\Gamma(2v+1)}{\Gamma^2(v+1/2)} \int_0^1 t^{v-1/2} (1-t)^{v-1/2} e^{2ixt} dt. \quad (6.57)$$

Спростимо інтеграл у правій частині рівності (6.57), зробивши заміну змінних $t=1/2-\tau$, $dt=-d\tau$:

$$\begin{aligned} J^* &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}-\tau\right)^{v-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}+\tau\right)^{v-\frac{1}{2}} e^{2ix\left(\frac{1}{2}-\tau\right)} d\tau = e^{ix} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}-\tau^2\right)^{v-\frac{1}{2}} e^{-2ix\tau} d\tau = \\ &= e^{ix} \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}-\tau^2\right)^{v-\frac{1}{2}} \cos 2x\tau d\tau - i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}-\tau^2\right)^{v-\frac{1}{2}} \sin 2x\tau d\tau \right] = \\ &= 2e^{ix} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}-\tau^2\right)^{v-\frac{1}{2}} \cos 2x\tau d\tau. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Під час отримання формули (6.58) використано формулу Ейлера $e^{-2ix\tau} = \cos 2x\tau - i \sin 2x\tau$ та те, що інтеграл від непарної функції у симетричних межах дорівнює нулеві. Ще раз зробимо заміну змінних $2\tau=s$, $d\tau=\frac{1}{2}ds$:

$$J^* = 2e^{ix} \int_0^1 \left(\frac{1-s^2}{4}\right)^{v-\frac{1}{2}} \cos sx \frac{1}{2} ds = \frac{e^{ix}}{2^{2v-1}} \int_0^1 (1-s^2)^{v-\frac{1}{2}} \cos xs ds \quad (6.59)$$

Спростимо вигляд першого множника у виразі (6.57), враховуючи, що $\Gamma(2a) = \frac{2^{2a-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(a) \Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)$. З цього випливає:

$$\Gamma(2v+1) = \frac{2^{2v}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(v+1/2) \Gamma(v+1). \quad (6.60)$$

Підставимо співвідношення (6.60), (6.58) у рівність (6.57):

$$\Phi(v+1/2; 2v+1; 2ix) = \frac{2e^{ix}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+1/2)} \int_0^1 (1-s^2)^{v-1/2} \cos xs ds \quad (6.61)$$

Остаточно отримаємо для функції Беселя:

$$J_v(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^v \frac{2}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-s^2)^{v-\frac{1}{2}} \cos xs ds, \quad (6.62)$$

де для збіжності інтеграла потрібно, щоб виконувалась умова $0 < v < \frac{1}{2}$.

Розглянемо випадок, коли $v = \frac{1}{2}$:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \cos xs ds = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{x} \sin xs \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}} \sin x. \quad (6.63)$$

Зображення (6.62) не дає можливості підрахувати випадок, коли $v = -\frac{1}{2}$ (бо інтеграл є розбіжним). Тому отримаємо інше зображення функції Беселя у вигляді ряду. Для цього скористаємося відомим розвиненням у ряд функції $\cos z$:

$$\begin{aligned} \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n} (-1)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n} (-1)^n}{\Gamma(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n} (-1)^n \sqrt{\pi}}{2^{2n} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma(n+1)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n} (-1)^n \sqrt{\pi}}{2^{2n} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) n!}. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Підставимо розвинення (6.64) до зображення (6.59). Ряд Маклорена (6.64) є рівномірно збіжним, тобто можемо провести почленно інтегрування:

$$J^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n} \sqrt{\pi} (-1)^n}{2^{2n} n! \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 s^{2n} (1-s^2)^{v-\frac{1}{2}} ds. \quad (6.65)$$

Інтеграл, що входить у співвідношення (6.65), зведемо до бета-функції:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (\operatorname{Re} x, y > 0),$$

для чого зробимо заміну змінних $s^2=t, s=\sqrt{t}, ds=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$:

$$\int_0^1 s^{2n} (1-s^2)^{v-\frac{1}{2}} ds = \int_0^1 t^n (1-t)^{v-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{n-\frac{1}{2}} (1-t)^{v-\frac{1}{2}} dt.$$

Як бачимо, щоб перейти до бета-функції, потрібно взяти $x=\frac{1}{2}+n, y=v+\frac{1}{2}$:

$$\int_0^1 s^{2n} (1-s^2)^{v-\frac{1}{2}} ds = \frac{1}{2} B\left(n+\frac{1}{2}, v+\frac{1}{2}\right). \quad (6.66)$$

З іншого боку, скориставшись зображенням бета-функції через гамма-функцію – функцію (6.13), можемо записати:

$$B\left(n+\frac{1}{2}, v+\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+v+1)}.$$

Звідки випливає, що:

$$J^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n} \sqrt{\pi} (-1)^n \cancel{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)}{2^{2n} n! \cancel{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \Gamma(n+v+1)} \cdot \frac{1}{2}. \quad (6.67)$$

Отримане значення підставимо до виразу (6.62):

$$\begin{aligned} J_v(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^v \frac{2}{\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n} \sqrt{\pi} (-1)^n \Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)}{2^{2n} n! 2\Gamma(n+v+1)} = \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n} (-1)^n}{2^{2n} n! \Gamma(n+v+1)}. \end{aligned} \quad (6.68)$$

Формула (6.68) є ступеневим зображенням циліндричної функції. Вона надає можливість знайти значення функції Беселя

$J_v(x)$, коли $v=-\frac{1}{2}$:

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n} (-1)^n}{2^{2n} n! \Gamma\left(n-\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n! \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}. \quad (6.69)$$

Врахуємо, що $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2n)}{2^{2n-1}\Gamma(n)}$, та підставимо цей вираз до співвідношення (6.69):

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n} 2^{2n-1}\Gamma(n)}{2^{2n}n!\Gamma(2n)}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \quad (6.70)$$

З отриманих результатів (6.62) та (6.70) можна побачити, що функції $J_{\pm\frac{1}{2}}(x)$ є інваріантними до порядку. Можна показати, що і

$J_{\pm\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}n}(x)$, $n \in N$ також виражається через тригонометричні функції.

Тепер отримаємо диференціальне рівняння для циліндричної функції Беселя. Його існування випливає з того, що функція Беселя є частковим випадком виродженої гіпергеометричної функції. Для виведення рівняння можна застосувати два підходи.

Перший базується на отриманні формул диференціювання:

$$\begin{aligned} \left(\frac{J_v(x)}{x^v}\right)' &= \left(\frac{1}{2^v}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}(-1)^n}{2^{2n}n!\Gamma(n+v+1)}\right)' = \frac{1}{2^v}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2nx^{2n-1}(-1)^n}{2^{2n}n!\Gamma(n+v+1)} = \\ &= \frac{1}{2^v}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2nx^{2n-1}(-1)^n}{2^{2n}n!\Gamma(n+v+1)}. \end{aligned}$$

Відмітимо, що операція диференціювання є законною, бо ряд є рівномірно збіжним всюди.

Введемо новий індекс підсумовування $m=n-1$:

$$\frac{1}{2^v}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}2(m+1)x^{2m+1}}{(m+1)!2^{2m+2}\Gamma(v+m+2)} = -\frac{x}{2^{v+1}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{m!2^{2m}\Gamma(2+v+m)}.$$

Тут потрібно врахувати наступне співвідношення:

$$J_{v+1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{v+1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\frac{1}{\Gamma(v+m+2)}.$$

Це дає результат для диференціювання:

$$\left(\frac{J_v(x)}{x^v} \right)' = - \frac{J_{v+1}(x)}{x^v}. \quad (6.71)$$

Рівність (6.71) можна переписати у іншому вигляді:

$$\frac{J_v'(x)}{x^v} - \frac{v J_v(x)}{x^{v+1}} = - \frac{J_{v+1}(x)}{x^v}. \quad (6.72)$$

З цього випливає:

$$J_v'(x) = \frac{v J_v(x)}{x} - J_{v+1}(x). \quad (6.73)$$

За аналогічною схемою підрахуємо похідну добутку $(x^v J_v(x))$:

$$(x^v J_v(x))' = x^v J_{v-1}(x). \quad (6.74)$$

Або з іншого боку:

$$\begin{aligned} v x^{v-1} J_v(x) + x^v J_v'(x) &= x^v J_{v-1}(x), \\ J_v'(x) &= J_{v-1}(x) - \frac{v}{x} J_v(x). \end{aligned} \quad (6.75)$$

Почленно віднімемо від рівності (6.73) рівність (6.75) та отримаємо рекурентне співвідношення:

$$\frac{2v}{x} J_v(x) = J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x). \quad (6.76)$$

Якщо додати співвідношення (6.73) та (6.75), то запишемо:

$$2J_v'(x) = J_{v-1}(x) - J_{v+1}(x). \quad (6.77)$$

Введемо у розгляд диференціальний оператор $DJ_v(x) = \frac{1}{x} [x J_v'(x)]$ та перетворимо його. З цією метою домножимо співвідношення (6.73) на x :

$$x J_v'(x) = v J_v(x) - x J_{v+1}(x). \quad (6.78)$$

Продиференціюємо обидві частини рівності (6.78):

$$\begin{aligned} [x Y_v'(x)]' &= (v Y_v(x) - x Y_{v+1}(x))' = v Y_v'(x) - Y_{v+1}(x) - x Y_{v+1}'(x) = \\ &= \frac{v^2 Y_v(x)}{x} - v Y_{v+1}(x) - Y_{v+1}(x) - x Y_{v+1}'(x). \end{aligned}$$

Підставимо значення похідної із зображення (6.75):

$$\begin{aligned} [xJ'_v(x)]' &= \frac{v^2 J_v(x)}{x} - vJ_{v+1} - J_{v+1}(x) - x \left(-\frac{v+1}{x} J_{v+1}(x) + J_v(x) \right) = \\ &= \frac{v^2 J_v(x)}{x} - xJ_v(x). \end{aligned}$$

Отже, показано, що:

$$DJ_v(x) = \frac{v^2}{x^2} J_v(x) - J_v(x) = \left(\frac{v^2}{x^2} - 1 \right) J_v(x), \quad (6.79)$$

тобто отримано диференціальне рівняння Беселя:

$$\frac{1}{x} [xu'(x)]' - \left(\frac{v^2}{x^2} - 1 \right) u(x) = 0. \quad (6.80)$$

Звідки виникла назва функцій Беселя як циліндричних функцій? Відповісти на це запитання можливо, якщо вивести диференціальне рівняння Беселя іншим шляхом. Проробимо це.

Нехай маємо рівняння Лапласа $\Delta u(x, y, z) = 0$, де зробимо заміну змінних на циліндричні координати $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$, $u(x, y, z) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) = \tilde{u}(r, \varphi, z)$. Знайдемо похідні, що входять до рівняння у новій системі координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}, \\ \text{Де } \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \varphi, \\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \varphi, \\ \frac{\partial r}{\partial z} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Якщо провести перехід до циліндричних координат у рівнянні Лапласа, то отримаємо його зображення у наступному вигляді:

$$\Delta \tilde{u}(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} [r\tilde{u}'(r, \varphi, z)]' + \frac{\tilde{u}''(\varphi, z)}{r^2} + \tilde{u}''(z) = 0. \quad (6.81)$$

Будемо шукати його розв'язок методом відокремлення змінних, який вимагає зобразити невідому функцію у вигляді:

$$\tilde{u}(r, \varphi, z) = R(r) \Phi(\varphi) Z(z).$$

Проробивши всю процедуру розв'язання відповідно до схеми методу, отримаємо три звичайних диференціальних рівняння. Нас зацікавлює рівняння відносно функції $R(r)$ – це і буде рівняння Беселя:

$$r(rR'(r))' + (r^2 - \nu^2)R(r) = 0,$$

або, якщо розкрити похідні, то здобудемо загальний вигляд рівняння Беселя:

$$z^2 u''(z) + zu'(z) + (z^2 - \nu^2)u(z) = 0. \quad (6.82)$$

Другим лінійно-незалежним розв'язком рівняння (6.82) буде функція Неймана (або циліндрична функція другого роду):

$$J_\nu(z) = N_\nu(z) = \frac{\cos \nu \pi J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin \nu \pi}. \quad (6.83)$$

Якщо змінна z – дійсна, тобто $z=x$, то часто розглядають комбінацію циліндричних функцій першого та другого роду – функції Ханкена I-го та II-го роду:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \quad H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x). \quad (6.84)$$

6.6. Асимптотика циліндричних функцій

Встановимо поведінку циліндричних функцій у нулі та на нескінченності. Попередньо введемо символ Ландау, який будемо вживати наступним чином. Якщо $|f(x)| \leq c\varphi(x)$, $\varphi(x) > 0$, $c = \text{const}$ при $x \rightarrow 0$, то будемо писати $f(x) = o(\varphi(x))$. Якщо ця оцінка має місце при $x \rightarrow \infty$, то будемо записувати $f(x) = O(\varphi(x))$. (Мається на увазі, що функція $f(x)$ поводить себе так, як функція $\varphi(x)$).

Розглянемо зображення функції Беселя за допомогою ряду (6.68) та розпишемо ряд, що входить до співвідношення:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n! \Gamma(n+\nu+1)} = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left[\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\Gamma(\nu+2)} + \dots \right]$$

Як бачимо, в околі нуля – $J_\nu(x) \sim \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}$. Якщо ввести позначення $c = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$, $\phi(x) = |x|^\nu$, то за допомогою символу Ландау знайдемо:

$$J_\nu(x) = O(x^\nu), \quad x \rightarrow 0. \quad (6.85)$$

Можна показати, що при будь-якому значенні порядку ν функції Неймана та Ханкеля мають поведінку:

$$H_\nu^1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty, \quad H_\nu^2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty, \quad N_\nu(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty.$$

Встановимо їх поведінку, коли ν прямує до нескінченності.

З цією метою скористаємося встановленими раніше фактами:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

З цього випливає, що при $x \rightarrow \infty$ $J_\nu \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ та $\left| J_{-\frac{1}{2}}(x) \right| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{|x|}}$.

Якщо взяти $c = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (якщо $x > 0$, то модуль можна усунути), то матимемо: $J_{\frac{1}{2}}(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $J_{-\frac{1}{2}}(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Можна стверджувати, що для будь-якого порядку ν поведінка функції Беселя при $x \rightarrow \infty$

$$J_\nu(x) = O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right), \quad x \rightarrow \infty. \quad (6.86)$$

Так сама поведінка на нескінченності має місце для додатніх x у інших функцій – $N_\nu(x)$, $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$.

Розглянемо найбільш важливі випадки функції Беселя у графічному зображенні (рис. 25):

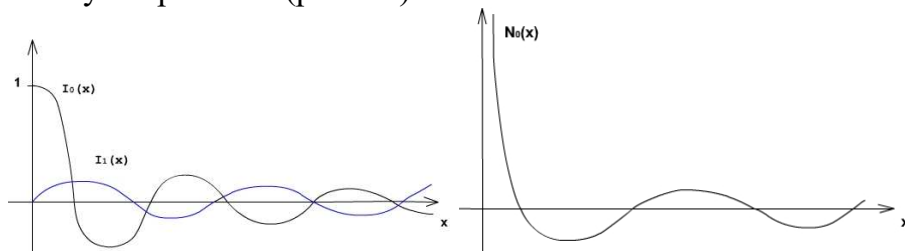


Рис. 25. Графіки функцій Беселя

6.7. Інтегральне перетворення Ханкеля

Нехай $x \in (0; +\infty)$, тоді можемо ввести перетворення:

$$f_{\alpha}^{(\nu)} = \int_0^{\infty} x f(x) J_{\nu}(\alpha x) dx. \quad (6.87)$$

Отримаємо формулу обернення для трансформанти (6.87) спершу у випадку $\nu=1/2$, користуючись формулою (6.63):

$$f_{\alpha}^{(\frac{1}{2})} = \int_0^{\infty} x f(x) J_{\frac{1}{2}}(\alpha x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} x f(x) \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{\alpha x}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha}} \int_0^{\infty} \frac{x f(x)}{\sqrt{x}} \sin \alpha x dx.$$

Якщо ввести нову функцію $g(x) = \frac{f(x)}{(\sqrt{x})^{-1}}$, то отримана формула буде

визначати синус-трансформанту Фур'є:

$$g_{\alpha}^s = \int_0^{\infty} g(x) \sin \alpha x dx.$$

Для неї раніше отримано формулу обернення:

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \alpha x g_{\alpha}^s d\alpha. \quad (6.88)$$

Отже, маємо співвідношення:

$$f_{\alpha}^{(\frac{1}{2})} = \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha}} g_{\alpha}^s, \quad g_{\alpha}^s = \sqrt{\frac{\pi \alpha}{2}} f_{\alpha}^{(\frac{1}{2})}, \quad \sin \alpha x = \sqrt{\frac{\pi \alpha x}{2}} J_{\frac{1}{2}}(\alpha x),$$

які підставимо до виразу (6.88):

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{\pi \alpha x}{2}} J_{\frac{1}{2}}(\alpha x) \sqrt{\frac{\pi \alpha}{2}} f_{\alpha}^{(\frac{1}{2})} d\alpha,$$

або:

$$f(x) = \int_0^{\infty} \alpha J_{\frac{1}{2}}(\alpha x) f_{\alpha}^{(\frac{1}{2})} d\alpha. \quad (6.89)$$

Це і є формула обернення для перетворення (6.87) у випадку, коли $\nu = \frac{1}{2}$. Якщо $\nu = -\frac{1}{2}$, то, проробивши аналогічні перетворення, встановлюємо, що:

$$f_{\nu}^{(-\frac{1}{2})} = \int_0^{\infty} x f(x) J_{-\frac{1}{2}}(\alpha x) dx, \quad f(x) = \int_0^{\infty} \alpha J_{\frac{1}{2}}(\alpha x) f_{\alpha}^{(-\frac{1}{2})} d\alpha.$$

Це надає можливість (це хоч і не є строгим обґрунтуванням факту) стверджувати, що формула оберненого перетворення для перетворення (6.87) має вигляд:

$$f(x) = \int_0^{\infty} \alpha J_v(\alpha x) f_{\alpha}^{(v)} d\alpha. \quad (6.90)$$

6.8. Модифіковані функції Беселя

Модифікована функція Беселя вводиться за формулою:

$$I_v(x) = e^{-i\frac{\pi}{2}v} J_v(ix). \quad (6.91)$$

Модифіковані функції Беселя задовольняють рівнянням:

$$x^2 \tilde{u}''(x) + x \tilde{u}'(x) - (x^2 + v^2) \tilde{u}(x) = 0. \quad (6.92)$$

Отримаємо для неї розвинення у ряд за допомогою відповідної формули для звичайної функції Беселя (6.68):

$$I_v(x) = e^{-i\frac{\pi}{2}v} \left(\frac{ix}{2}\right)^v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n! \Gamma(n+v+1)} = \left(\frac{x}{2}\right)^v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n! \Gamma(n+v+1)}, \quad (6.93)$$

тут враховано, що $i^{2n} = (-1)^n$.

Щоб отримати відповідне диференціальне рівняння для модифікованої функції, скористаємось диференціальним рівнянням для функції Беселя (6.80), де зробимо відповідну заміну змінних $z = ix$:

$$u(z) = u(ix) = \tilde{u}(x), \quad \frac{du(z)}{dz} = \frac{du(ix)}{dx} \frac{dx}{dz} = \frac{\tilde{u}'(x)}{i}, \quad \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{1}{i^2} \frac{d^2\tilde{u}}{dx^2}.$$

З її врахуванням рівняння Беселя набуває вигляду:

$$(ix)^2 \frac{1}{i^2} \tilde{u}''(x) + ix \frac{\tilde{u}'(x)}{i} + (i^2 x^2 - v^2) \tilde{u}(x) = 0,$$

Один з розв'язків рівняння (6.92) є модифікована функція Беселя першого роду, а іншим розв'язком – функція Макдональда $K_v(x)$:

$$K_v(x) = \frac{\pi(I_v(x) - I_{-v}(x))}{2 \sin \pi v}. \quad (6.94)$$

Відмітимо, що поведінка модифікованих функцій при прямуванні x до нуля є наступною:

$$I_\nu(x) \rightarrow 0(x^\nu), x \rightarrow 0; \quad I_\nu(x) \rightarrow 0\left(\frac{e^x}{\sqrt{x}}\right), x \rightarrow \infty;$$

$$K_\nu(x) \rightarrow \infty, x \rightarrow 0; \quad K_\nu(x) \rightarrow 0\left(\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right), x \rightarrow \infty.$$

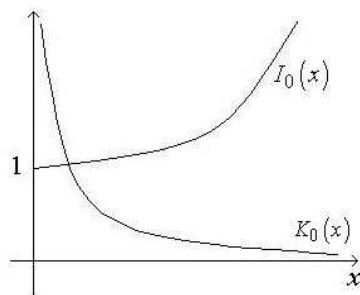


Рис. 26. Графіки модифікованих функцій Бесселя

Тобто, на нескінченності модифікована функція Бесселя першого роду є зростаюча, на відміну від функції Бесселя другого роду, що є спадною.

Розглянемо графічне зображення основних модифікованих функцій $I_0(x)$ та $K_0(x)$ (рис. 26):

Помітимо, що $K_0(x) \rightarrow 0(\ln x)$, коли $x \rightarrow 0$.

6.9. Шляхи узагальнення спеціальних функцій

Найбільш загальною із всіх розглянутих функцій є функція Гауса:

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c, z \end{matrix}\right) \quad (\text{тут нижній індекс}$$

попереду букви визначає, що два символи стоять у численнику дробі, а індекс після букви – кількість символів у знаменнику дробі). За цими позначеннями вироджена функція буде мати вигляд:

$$\Phi(a; c; z) = {}_1F_1\left(\begin{matrix} a; \\ \downarrow z \\ c; \end{matrix}\right).$$

Визначення узагальненої функції:

$${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p; \\ b_1, b_2, \dots, b_q; \end{matrix} z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n \dots (b_q)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

Це є перше узагальнення.

Друге узагальнення заключається в зростанні числа змінних. Випадок двох змінних називається функцією Аппеля:

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} x^n y^m.$$

6.10. Приклади задач математичної фізики, що приводять до використання спеціальних функцій

Функції Беселя

Розв'язати задачу стаціонарної теплопровідності усередині обмеженого циліндру $0 \leq r \leq a$, $0 \leq z \leq l$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, якщо

$$u|_{r=a} = 0, \quad u|_{z=0} = f(r, \varphi), \quad u|_{z=l} = F(r, \varphi).$$

Розв'язання задачі

Розшукуємо розв'язок поставленої задачі у вигляді

$$u(r, \varphi, z) = V(r, \varphi) Z(z).$$

Підставимо це зображення до рівняння:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Розподіляючи змінні, обираємо для $V(r, \varphi)$ рівняння:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \lambda V = 0$$

з граничною умовою

$$V(r, \varphi) = 0.$$

Для функції $Z(z)$ отримаємо рівняння:

$$Z'' - \lambda Z = 0$$

Далі будемо вважати, що має місце подання:

$$V(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi)$$

З цього випливає:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(\lambda - \frac{\nu^2}{r^2} \right) R = 0$$

$$\Phi'' + \nu^2 \Phi = 0,$$

де ν – стала розподілення.

Для функції $R(r)$ маємо рівняння Беселя:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(1 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0$$

з граничною умовою

$$R(a) = 0$$

та природною умовою обмеженості у нулі

$$|R(0)| < \infty,$$

звідки випливає $R(r) = I_n(\sqrt{\lambda} r)$.

Гранична умова при $r=a$ дає:

$$I_n(\mu) = 0, \text{ де } \mu = \sqrt{\lambda} r$$

Нехай $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \dots, \mu_m^{(n)}$ корні цього рівняння.

Таким чином, крайова задача для $V(r, \varphi)$ має власні значення

$\lambda_{mn} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} \right)^2$, яким відповідають власні функції:

$$\bar{V}_{n,m} = I_n \left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{a} \right) \cos n\varphi$$

$$\bar{\bar{V}}_{n,m} = I_n \left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{a} \right) \sin n\varphi,$$

що утворюють дві ортогональні системи функцій, для яких:

$$\|\bar{V}_{n,m}\|^2 = \frac{a^2}{2} \left[I_n'(\mu_m^{(n)}) \right]^2 \pi \xi_n$$

$$\|\bar{\bar{V}}_{n,m}\|^2 = \frac{a^2}{2} \left[I_n'(\mu_m^{(n)}) \right]^2 \pi,$$

$$\xi_n = \begin{cases} 2, & n=0 \\ 1, & n \neq 0. \end{cases}$$

Загальний розв'язок задачі має вигляд:

$$u(r, \varphi, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_{n,m} \bar{V}_{m,n}(r, \varphi) + B_{n,m} \bar{\bar{V}}_{m,n}(r, \varphi) \right] Z_{n,m}(z),$$

де $Z_{n,m}(z)$ розв'язок рівняння $Z'' - \lambda Z = 0$.

Шукану функцію $u(r, \varphi, z)$ можна зобразити у вигляді суми двох функцій:

$$u(r, \varphi, z) = u_1(r, \varphi, z) + u_2(r, \varphi, z),$$

де $u_1(r, \varphi, z), u_2(r, \varphi, z)$ – гармонічні функції, що задовольняють умовам:

$$\begin{aligned} u_1|_{r=a} &= 0, & u_1|_{z=0} &= f(r, \varphi), & u_1|_{z=l} &= 0. \\ u_2|_{r=a} &= 0, & u_2|_{z=0} &= 0, & u_2|_{z=l} &= F(r, \varphi). \end{aligned}$$

Покажемо, як побудувати функцію $u_1(r, \varphi, z)$. Для цього випадку:

$$Z_{m,n}(z) = \text{sh} \frac{\mu_m^{(n)}}{a} (l-z)$$

Задовольнимо крайову умову при $z=0$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [A_{n,m} \bar{V}_{m,n} + B_{n,m} \bar{\bar{V}}_{m,n}] \text{sh} \frac{\mu_m^{(n)} l}{a} = f(r, \varphi),$$

$$A_{m,n} = \frac{\bar{f}_{n,m}}{\text{sh} \frac{\mu_m^{(n)} l}{a}}, \quad B_{m,n} = \frac{\bar{\bar{f}}_{n,m}}{\text{sh} \frac{\mu_m^{(n)} l}{a}},$$

$$\bar{f}_{m,n} = \frac{1}{\|\bar{V}_{m,n}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a f(r, \varphi) \bar{V}_{m,n}(r, \varphi) r dr d\varphi$$

$$\bar{\bar{f}}_{m,n} = \frac{1}{\|\bar{\bar{V}}_{m,n}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a f(r, \varphi) \bar{\bar{V}}_{m,n}(r, \varphi) r dr d\varphi$$

Отже, наприкінці запишемо розв'язок вихідної задачі у вигляді:

$$\begin{aligned} U(r, \varphi, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A_{n,m} \cos n\varphi + B_{n,m} \sin n\varphi] I_n \left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{a} \right) \bullet \frac{\text{sh} \mu_m^{(n)} (l-z)}{\text{sh} \frac{\mu_m^{(n)} r}{a} l} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [C_{n,m} \cos n\varphi + D_{n,m} \sin n\varphi] I_n \left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{a} \right) \bullet \frac{\text{sh} \mu_m^{(n)} z}{\text{sh} \frac{\mu_m^{(n)} r}{a} l}, \end{aligned}$$

де $A_{m,n}, B_{m,n}, C_{m,n}, D_{m,n}$ – коефіцієнти розкладу функції $f(r, \varphi)$ та $F(r, \varphi)$ вигляду (*).

Поліноми Лежандра

Розв'язати задачу про коливання струни довжиною l , яка закріплена одним кінцем на нерухомій опорі та може вільно обертатися навколо точки опори:

$$\begin{cases} a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[(l^2 - x^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & a^2 = \frac{\omega^2}{2} \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x) \end{cases}$$

ω – кутова швидкість.

Розшукуватиме розв'язок у вигляді:

$$u(x, t) = T(t) X(x)$$

Відповідно до схеми методу розподілення змінних маємо:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{\frac{d}{dx} [(l^2 - x^2) X'(x)]}{X(x)}.$$

Позначаючи обидві частини цієї рівності через $-\lambda$, одержимо два рівняння:

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0,$$

$$\frac{d}{dx} [(l^2 - x^2) X'(x)] + \lambda X(x) = 0$$

Вважаючи $x = l\xi$, перетворимо друге рівняння до вигляду:

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{dX}{d\xi} \right] + \lambda X = 0.$$

Це є рівняння Лежандра.

По своєму фізичному значенню зсув струни $u(x, t)$ повинний залишатися обмеженим в проміжку $[0, l]$. Тому потрібно знайти такий розв'язок рівняння, що обмежений в цьому проміжку, включаючи його кінці. На початку цього розділу було показано, що при $\lambda = n(n+1)$, де n – ціле позитивне число, рівняння Лежандра в проміжку $[-1, 1]$ має розв'язок, обмежений в точках $\xi = \pm 1$. Цей розв'язок є поліном Лежандра $P_n(\xi)$. Отже, повертаючись до змінної x , ми можемо стверджувати, що:

$$X(x) = P_n\left(\frac{x}{l}\right)$$

є розв'язок рівняння Лежандра, обмежений у точках $x = \pm l$ при $\lambda = n(n+1)$.

Задовольняючи граничній умові, одержимо $P_n(0) = 0$.

Це можливо, коли $n = 2k - 1$, де k – ціле додатне число.

Цим власним числам відповідають власні функції

$$X_k(x) = P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right),$$

які утворюють ортогональну систему функцій на відрізку $[0, l]$.

При $\lambda = \lambda_k$ загальний рішення рівняння має вигляд:

$$T_k(t) = a_k \cos \sqrt{2k(2k-1)}at + b_k \sin \sqrt{2k(2k-1)}at.$$

В силу цього одержимо, що функції

$$u_k(x, t) = \left[a_k \cos \sqrt{2k(2k-1)}at + b_k \sin \sqrt{2k(2k-1)}at \right] P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right)$$

задовольняють рівнянню і граничній умові при будь-яких a_k і b_k . Для рішення задачі складаємо ряд:

$$u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos \sqrt{2k(2k-1)}at + b_k \sin \sqrt{2k(2k-1)}at \right] P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right)$$

і вимагаємо, щоб виконувалися початкові умови

$$u_k(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right) = f(x),$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2k(2k-1)} a b_k P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right) = F(x)$$

Припускаючи, що ряд збігається рівномірно, ми можемо визначити коефіцієнти a_k , помноживши обидві частини рівності на $P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right)$ і проінтегрувавши по x в інтервалі від 0 до l ; тоді беручи до уваги ортогональність власних функцій, одержимо:

$$\int_0^l f(x) P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right) dx = a_k \int_0^l P_{2k-1}^2\left(\frac{x}{l}\right) dx = \frac{l a_k}{2} \int_{-1}^1 P_{2k-1}^2(\xi) d\xi = \frac{l}{4k-1} a_k.$$

Звідси:

$$a_k = \frac{4k-1}{l} \int_0^l f(x) P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right) dx.$$

Аналогічно знайдемо:

$$b_k = \frac{4k-1}{al \sqrt{2k(2k-1)}} \int_0^l F(x) P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right) dx.$$

Таким чином, розв'язок задачі знайдено у вигляді:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\sqrt{2k(2k-1)}at + \varphi_k) P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right),$$

Як бачимо, мали коливання струни, що обертається, складаються з гармонічних коливань. Частота коливань ω_k k -го обертона виражається формулою:

$$\omega_k = \sqrt{2k(2k-1)}a = \sqrt{2k(2k-1)}\omega$$

Звідси витікає, що частоти коливань залежать від кутової швидкості ω і не залежать від довжини струни і її густини (якщо густина постійна). При збільшенні довжини або густини збільшується маса струни, яка знижує частоту; при цьому також збільшується натягнення, що повинне викликати підвищення частоти. Ці два чинники компенсують один одного.

ДОДАТОК А

Зведення рівнянь до каноничного вигляду

За допомогою невиродженого перетворення незалежних перетворень

$$\xi=\varphi(x,y); \eta=\psi(x,y) \quad (\text{A.1})$$

квазілінійне рівняння другого порядку відносно невідомої функції

$$V=V(x,y)$$

$$a_{11}V_{xx}+2a_{12}V_{xy}+a_{22}V_{yy}+F(x,y,V,V_x,V_y)=0 \quad (\text{A.2})$$

може бути приведено до канонічного вигляду. Так, для рівнянь гіперболічного типу ($D=a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$) канонічний вигляд має форму:

$$V_{\xi\eta}=\Phi(\xi,\eta,V,V_\xi,V_\eta). \quad (\text{A.3})$$

Іншу форму канонічного вигляду рівняння гіперболічного типу:

$$V_{\alpha\alpha}-V_{\beta\beta}=\Phi_1(\alpha,\beta,V,V_\alpha,V_\beta). \quad (\text{A.4})$$

можна отримати шляхом додаткового перетворення незалежних змінних:

$$\alpha=\frac{\xi+\eta}{2}, \quad \beta=\frac{\xi-\eta}{2}. \quad (\text{A.5})$$

Канонічний вигляд рівняння параболічного типу ($D=0$):

$$V_{\eta\eta}=\Phi_2(\xi,\eta,V,V_\xi,V_\eta). \quad (\text{A.6})$$

Канонічний вигляд рівняння еліптичного типу ($D<0$):

$$V_{\xi\xi}+V_{\eta\eta}=\Phi_3(\xi,\eta,V,V_\xi,V_\eta). \quad (\text{A.7})$$

Для приведення рівняння (A.2) до канонічного вигляду спершу потрібно визначити функції (A.1), що здійснюють перетворення незалежних змінних. Для їх розшукування розглянемо характеристичне рівняння:

$$a_{11}dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0. \quad (\text{A.8})$$

Воно розкладається на два звичайних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{aligned} a_{11}dy-(a_{12}+\sqrt{D})dx &=0 \\ a_{11}dy-(a_{12}-\sqrt{D})dx &=0 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Якщо рівняння (А.2) гіперболічного типу ($D>0$), то рівняння (А.9) є різні, та після їх інтегрування отримаємо два різних загальних інтеграли:

$$\varphi(x, y) = c \text{ та } \psi(x, y) = c.$$

Введемо нові незалежні змінні:

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y)$$

та виразимо похідні за старими змінними через похідні за новими змінними (для чого використаємо формулу диференціювання складної функції $V[\xi(x, y), \eta(x, y)]$):

$$\begin{aligned} V_x &= V_\xi \xi_x + V_\eta \eta_x; \quad V_y = V_\xi \xi_y + V_\eta \eta_y, \\ V_{xx} &= V_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2V_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + V_{\eta\eta} \eta_x^2 + V_\xi \xi_{xx} + V_\eta \eta_{xx}, \\ V_{xy} &= V_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + 2V_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + V_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + V_\xi \xi_{xy} + V_\eta \eta_{xy}, \\ V_{yy} &= V_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2V_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + V_{\eta\eta} \eta_y^2 + V_\xi \xi_{yy} + V_\eta \eta_{yy}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Підставляючи вирази (А.10) до рівняння (А.2), отримаємо перший канонічний вигляд (А.3) рівняння гіперболічного типу. Введемо тепер нові незалежні змінні (А.5), та враховуючи, що:

$$V_\xi = \frac{1}{2}(V_\alpha + V_\beta); \quad V_\eta = \frac{1}{2}(V_\alpha - V_\beta); \quad V_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(V_{\alpha\alpha} - V_{\beta\beta}), \quad (\text{A.11})$$

отримаємо другий канонічний вигляд (А.4) рівняння гіперболічного типу.

Якщо рівняння (А.2) є параболічним ($D=0$), то рівняння (А.9) збігаються, та після інтегрування отримаємо один загальний інтеграл:

$$\varphi(x, y) = c.$$

Введемо нові незалежні змінні:

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y),$$

де $\eta(x, y)$ – будь-яка функція, що не залежить від φ : $\frac{\partial(\varphi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$.

Користуючись довільним вибором $\eta(x, y)$, зокрема можна взяти $\eta = x$ або $\eta = y$. Розраховуючи похідні за формулами (А.10) та підставляючи їх до вихідного рівняння (А.2), отримаємо канонічний вигляд (А.6) рівняння параболічного типу.

Якщо рівняння (А.2) є еліптичним ($D<0$), то рівняння (А.1) є комплексно спряженими, та після їх інтегрування отримаємо два комплексно-спряжені загальні інтеграли:

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = c \text{ та } \varphi(x, y) - i\psi(x, y) = \bar{c}.$$

Щоб не працювати з комплексними величинами, за нові незалежні змінні візьмемо дійсну та мниму частини цих загальних інтегралів:

$$\xi = \varphi(x, y) \quad \eta = \psi(x, y).$$

Розраховуючи похідні за формулами (A.10), приведемо рівняння (A.2) до канонічного вигляду (1.8) рівняння еліптичного типу.

Розглянемо конкретні приклади, що ілюструють перетворення рівнянь до канонічного вигляду.

Приклад 1

Розглянемо рівняння:

$$V_{xx} - 6V_{xy} + 5V_{yy} + 2V_x - V_y - xy = 0. \quad (\text{A.12})$$

Тут $a_{11}=1$; $a_{12}=-3$; $a_{22}=5$ та $D=9-5=4>0$, тобто це рівняння є гіперболічним у всій площини (x, y) .

Характеристичне рівняння:

$$dy^2 + 6dxdy + 5dx^2 = 0 \quad y'^2 + 6y' + 5 = 0$$

розпадається на два рівняння:

$$y' = -5 \quad \text{та} \quad y' = -1.$$

Їх загальні інтеграли мають вигляд:

$$y + 5x = c \quad \text{та} \quad y + x = c,$$

а формули заміни незалежних змінних будуть:

$$\xi = 5x + y; \quad \eta = x + y.$$

Звідки знайдемо:

$$x = \frac{1}{4}(\xi - \eta); \quad y = -\frac{1}{4}(\xi - 5\eta),$$

$$V_x = 5u_\xi + u_\eta; \quad V_y = V_\xi + V_\eta,$$

$$V_{xx} = 25V_{\xi\xi} + 10V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta},$$

$$V_{xy} = 5V_{\xi\xi} + 6V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta},$$

$$V_{yy} = V_{\xi\xi} + 2V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta}.$$

Після підстановки отриманих формул до рівняння (A.12) отримаємо: $-16V_{\xi\eta} + 9V_\xi + V_\eta + \frac{1}{16}(\xi - \eta)(\xi - 5\eta) = 0$, звідки канонічний вигляд рівняння (A.12) є наступним:

$$V_{\xi\eta} = \frac{9}{16}V_{\xi} + \frac{1}{16}V_{\eta} + \frac{1}{256}(\xi - \eta)(\xi - 5\eta).$$

Якщо зробити заміну незалежних змінних (А.5) та врахувати формули (А.11), то отримаємо другу форму канонічного вигляду:

$$V_{\alpha\alpha} - V_{\beta\beta} = \frac{1}{4}(5V_{\alpha} + 4V_{\beta}) - \frac{1}{16}(2\alpha - 3\beta).$$

Приклад 2

Привести до канонічного вигляду рівняння:

$$V_{xx} + 4V_{xy} + 4V_{yy} - yV_x + xV_y - 2V = 0. \quad (\text{А.13})$$

Тут $a_{11}=1$; $a_{12}=2$ та $a_{22}=4$. Отже $D=4-4=0$, тобто це є рівняння параболічного типу у всій площині (x, y) . Характеристичне рівняння:

$$dy^2 - 4dx dy + 4dx^2 = 0, \text{ тобто } (dy - 2dx)^2 = 0.$$

Звідки $dy - 2dx = 0$ та маємо один загальний інтеграл:

$$y - 2x = c.$$

Введемо нові незалежні змінні

$$\xi = y - 2x; \quad \eta = x$$

та знайдемо:

$$\begin{aligned} x &= \eta; \quad y = \xi + 2\eta \\ V_x &= -2V_{\xi} + V_{\eta}; \quad V_y = V_{\xi}, \\ V_{xx} &= 4V_{\xi\xi} - 4V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta}, \\ V_{xy} &= -2V_{\xi\xi} + V_{\xi\eta}; \quad V_{yy} = V_{\xi\xi}. \end{aligned}$$

Підставляючи ці значення до рівняння (А.13), отримаємо його канонічний вигляд:

$$V_{\eta\eta} = -(2\xi + 5\eta)V_{\xi} + (\xi + 2\eta)V_{\eta} + 2\eta.$$

Приклад 3

Привести до канонічного вигляду рівняння:

$$(1 + y^2)V_{xx} + 2yV_{xy} + V_{yy} - xV_y + 2y = 0 \quad (\text{А.14})$$

Тут $a_{11}=1+y^2$; $a_{12}=y$; $a_{22}=1$ та $D=y^2-1-y^2=-1<0$, тобто це рівняння є еліптичним у всій площині.

Характеристичне рівняння:

$$(1 + y^2)dy^2 - 2y dx dy + dx^2 = 0, \text{ тобто: } (1 + y^2)y'^2 - 2yy' + 1 = 0$$

розкладається на два:

$$y' = \frac{y-i}{y^2+1} = \frac{1}{y+i} \text{ та } y' = \frac{y+i}{y^2+1} = \frac{1}{y-i}.$$

Після інтегрування отримаємо загальні інтеграли:

$$\frac{1}{2} y^2 - x \pm i y = c.$$

Якщо за нові незалежні змінні брати дійсну та мниму частини:

$$\xi = \frac{1}{2} y^2 - x, \quad \eta = y,$$

то отримаємо:

$$y = \eta; \quad x = \frac{1}{2} \eta^2 - \xi$$

$$V_x = -V_\xi; \quad V_y = y V_\xi + V_\eta,$$

$$V_{xx} = V_{\xi\xi}; \quad V_{xy} = -y V_{\xi\xi} - V_{\xi\eta},$$

$$V_{yy} = V_\xi + y(y V_{\xi\xi} + V_{\xi\eta}) + y V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta} = y^2 V_{\xi\xi} + 2y V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta} + V_\xi.$$

Підставляючи отримані вирази до рівняння (А.14), випишемо канонічний вигляд рівняння:

$$V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} = \left(\frac{1}{2} \eta^3 - \xi \eta - 1 \right) V_\xi + \left(\frac{1}{2} \eta^2 - \xi \right) V_\eta - 2\eta.$$

Завдання

Привести до канонічного вигляду диференціальні рівняння:

А

1. $V_{xx} + 2V_{xy} - 3V_{yy} + 6V_y = 0$
2. $V_{xx} + V_{xy} - 2V_{yy} - 3V_x + 3x = 0$
3. $3V_{xx} + 6V_{xy} + V_{yy} - 2V_x = 0$
4. $2V_{xx} + 2V_{xy} - V_{yy} + 4V_x + 2V_y = 0$
5. $V_{xx} + 4V_{xy} + V_{yy} - V_y + x^2 y = 0$
6. $3V_{xx} + 2V_{xy} - V_{yy} - V_x + 4y = 0$
7. $V_{xx} + 4V_{xy} + 3V_{yy} - 5V_x + 2(x-y) = 0$
8. $2V_{xx} - 4V_{xy} - 5V_{yy} + V_x = 0$
9. $V_{xx} - 2V_{xy} - 3V_{yy} + V_y + 5x = 0$
10. $V_{xx} - 2V_{xy} - 2V_{yy} - xV_x + yV_y = 0$

Б

1. $V_{xx} - 4V_{xy} + 4V_{yy} + 3V_x - 2x = 0$
2. $9V_{xx} + 6V_{xy} + V_{yy} - yV_x - xV_y = 0$
3. $V_{xx} - 2V_{xy} + V_{yy} + 3V_x - 2V_y = 0$
4. $16V_{xx} + 8V_{xy} + V_{yy} - 3V - xy = 0$
5. $V_{xx} + 2V_{xy} + V_{yy} + 3V_x - 5V_y + 4V = 0$
6. $V_{xx} - 6V_{xy} + 9V_{yy} - V_x + 2V_y = 0$
7. $9V_{xx} - 6V_{xy} + V_{yy} + x - 2y = 0$
8. $V_{xx} - 8V_y + 16V_{yy} + V_y + 3(x - y) = 0$
9. $4V_{xx} + 4V_{xy} + V_{yy} - 3V_x - 3V_y = 0$
10. $2V_{xx} - 4V_y + 2V_{yy} + 5V_x - V_y = 0$

В

1. $2V_{xx} + V_{yy} + 4V_y + V = 0$
2. $V_{xx} - 2xV_{xy} + (1 + x^2)V_{yy} + yV_x = 0$
3. $2V_{xx} + 2V_{yy} + 3V_{yy} - xV_x = 0$
4. $V_{xx} + 2\sin V_{xy} + (1 + \sin^2 x)V_{yy} + xV_y = 0$
5. $3V_{xx} + 4V_{xy} + 2V_{yy} + 5(x + y) = 0$
6. $(1 + x^2)V_{xx} + (1 + y^2)V_{yy} + yV = 0$
7. $V_{xx} - 6V_{xy} + 10V_{yy} + V_x - 3V_y = 0$
8. $V_{xx} + (1 + x^2)V_{yy} + yV_x + x^2 = 0$
9. $5V_{xx} + 2V_{xy} + V_{yy} - 2V_y = 0$
10. $V_{xx} - 4V_{xy} + 5V_{yy} - 3V_x + y = 0.$

ДОДАТОК Б

Приклади застосування методу відокремлення змінних

Розглянемо конкретні приклади, що демонструють застосування методу відокремлення змінних.

Приклад 1. Розглянемо задачу о повільних коливаннях струни з закріпленими кінцями, якщо в початковий момент часу вона була відхилена від положення рівноваги на величину $\varphi(x)=Ax(l-x)$ та відпущена без початкової швидкості. Враховуючи одновимірне хвильове рівняння $a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$, а також запис початкових та крайових умов для нього, задачу зведено до відшукування функції $V(x, t)$, що задовольняє початково-крайові задачі:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (\text{Б.1})$$

$$V|_{x=0} = V|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0, \quad (\text{Б.2})$$

$$V|_{t=0} = Ax(l-x), \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (\text{Б.3})$$

Рівняння (Б.1) та крайові умови (Б.2) є однорідними, отже, може бути застосовано метод відокремлення змінних. Знайдемо часткові розв'язки вигляду:

$$V(x, t) = X(x)T(t). \quad (\text{Б.4})$$

Підставляючи зображення (Б.4) до рівняння (Б.1), отримаємо:

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t). \quad (\text{Б.5})$$

Поділимо обидві частини (Б.5) на величину $a^2 X(x)T(t)$:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Отримана рівність можлива тільки у випадку, якщо обидві її частини дорівнюють однієї і тій же самій сталій. яку позначимо як $-\lambda$:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda; \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Приходимо до двох звичайних диференціальних рівнянь:

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \text{ та } X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (\text{Б.6})$$

Підставляючи зображення (Б.5) до крайових умов (Б.2), отримаємо:

$$V|_{x=0} = X(0)T(t) = 0 \text{ та } V|_{x=l} = X(l)T(t) = 0,$$

що можливо тільки, якщо $X(0) = X(l) = 0$.

Таким чином, ми можемо сформулювати задачу Штурма-Ліувілля:

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \quad 0 < x < l, \\ X(0) &= 0, \quad X(l) = 0. \end{aligned} \quad (\text{Б.7})$$

Для розв'язання задачі (Б.7) розглянемо три випадки: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ та $\lambda < 0$.

1. Якщо $\lambda = \mu^2 > 0$, то загальний розв'язок рівняння:

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$$

має вигляд:

$$X(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x.$$

Реалізуючи крайові умови з (Б.7), отримаємо:

$$X(0) = A = 0; \quad X(l) = A \cos \mu l + B \sin \mu l = 0,$$

звідки $A = 0$ та $B \sin \mu l = 0$. Потрібно вважати, що $B \neq 0$, бо у протилежному випадку $X(x) = 0$. Звідки отримаємо $\sin \mu l = 0$, що можливо, якщо:

$$\mu = \mu_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким чином, $\lambda_n = \mu_n^2 = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ є власні числа задачі Штурма-Ліувілля, яким відповідають власні функції:

$$X_n(x) = \sin \mu_n x = \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Як відомо з теорії тригонометричних рядів Фур'є, ці функції ортогональні на проміжку $(0; l)$:

$$\int_0^l \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} x dx = \begin{cases} l/2, & n=m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

та утворюють повну систему.

2. Якщо $\lambda=0$, то загальний розв'язок рівняння $X''(x)=0$ має вигляд: $X(x)=Ax+B$. З крайових умов (Б.7) випливає:

$$X(0)=B=0; \quad X(l)=Al+B=0,$$

звідки $A=B=0$ та, отже, $X(x)=0$, тобто $\lambda=0$ не є власним значенням.

3. Якщо $\lambda=-\mu^2<0$, то загальний розв'язок рівняння $X''(x)-\mu^2 X(x)=0$ має вигляд $X(x)=A \cosh \mu x + B \sinh \mu x$.

Задовольнимо крайові умови та отримаємо:

$$X(0)=A=0; \quad X(l)=A \cosh \mu l + B \sinh \mu l = 0.$$

Так як $\sinh \mu l \neq 0$ при $\mu \neq 0$, то $A=B=0$, отже $X(x)=0$, тобто $\lambda<0$ – не є власним числом задачі Штурма-Ліувилля.

Таким чином, задачу Штурма-Ліувилля розв'язано повністю – знайдені власні значення λ_n та відповідні до них функції $\sin \lambda_n x$.

Знайдемо тепер розв'язок першого з рівнянь (Б.6) при $\lambda=\mu_n^2$:

$$T''(t) + \mu_n^2 a^2 T(t) = 0.$$

Загальний розв'язок його має вигляд:

$$T_n(t) = C_n \cos \mu_n a t + D_n \sin \mu_n a t, \quad n=1, 2, \dots$$

Побудуємо функції $V(x, t)$ у відповідності до зображення (Б.5):

$$V(x, t) = X_n(x) T_n(t) = [C_n \cos \mu_n a t + D_n \sin \mu_n a t] \sin \mu_n x, \quad n=1, 2, \dots$$

Вони задовольняють крайові умови (Б.2) та рівняння (Б.1).

Складемо ряд:

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos \mu_n a t + D_n \sin \mu_n a t] \sin \mu_n x$$

та підставимо його до початкових умов (Б.3):

$$V|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \mu_n x = Ax(l-x),$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n a \sin \mu_n \sin \mu_n x = 0.$$

На ці рівності можна дивитися як на розвинення у ряд Фур'є на проміжку $(0; l)$ за ортогональною системою функції $\{\sin \mu_n x\}$

функцій, що стоять у правих частинах рівностей. Враховуючи формули для коефіцієнтів ряду Фур'є, отримаємо:

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l Ax(l-x) \sin \mu_n x dx; \quad D_n a \mu_n = 0,$$

тобто $D_n = 0$.

Після двократного інтегрування за частинами першого інтеграла отримаємо:

$$C_n = \frac{4Al^3}{(\pi n)^3} [1 - (-1)^n].$$

Як результат, приходимо до функцій:

$$V(x, t) = \frac{4Al^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \cos \frac{\pi n}{l} at \sin \frac{\pi n}{l} x = \frac{8Al^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \times \\ \times \cos \frac{\pi(2k+1)}{l} at \sin \frac{\pi(2k+1)}{l} x. \quad (\text{Б.8})$$

Неважко перевірити, що ряд (Б.8), а також ряди, отримані з цього після одно- або двократного диференціювання за змінними x та t , збігаються рівномірно. Таким чином, функція (Б.8) задовольняє рівняння (Б.1) при $0 < x < l$, $t > 0$, а також умовам (Б.2) – (Б.4), отже вона є розв'язком поставленої початково-крайової задачі.

Приклад 2

Розглянемо задачу теплопровідності для стрижня $0 \leq x \leq l$ з теплоізованими кінцями, якщо в початковій момент часу температура стрижня описувалася за функцією $\varphi(x)$. Враховуючи рівняння теплопровідності та формування початкових та крайових умов для нього, цю задачу зведено до наступної початково-крайової задачі:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (\text{Б.9})$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0 \quad (\text{Б.10})$$

$$V|_{t=0} = \varphi(x) \quad (\text{Б.11})$$

Застосовуючи метод відокремлення змінних, розшукаємо часткові розв'язки вигляду:

$$V(x,t)=X(x)T(t) \quad (\text{Б.12})$$

Підставимо до рівняння у (Б.9):

$$X(x)T'(t)=a^2X''(x)T(t)$$

та поділимо обидві частини на $a^2X(x)T(t)\neq 0$:

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X'(x)}{X(x)}.$$

Дорівнюючи кожному з частин цієї рівності до однієї самої сталої $-\lambda$, здобудемо два звичайних диференціальних рівняння:

$$T'(t)+\lambda a^2T(t)=0 \text{ та } X''(x)+\lambda X(x)=0. \quad (\text{Б.13})$$

Підставляючи зображення (Б.12) до крайових умов (Б.10), отримаємо:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} = X'(0)T(t)=0; \quad \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=l} = X'(l)T(t)=0,$$

що можливо тільки, якщо $X'(0)=X'(l)=0$.

Як наслідок, отримаємо задачу Штурма-Ліувілля:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad 0 < x < l, \quad X'(0)=X'(l)=0. \quad (\text{Б.14})$$

Для її розв'язання розглянемо три випадки.

1. $\lambda=\mu^2>0$. Загальний розв'язок рівняння з (Б.14) має вигляд:

$$X(x)=A \cos \mu x + B \sin \mu x.$$

Підставимо його до крайових умов (Б.14) та отримаємо $X'(0)=B\mu=0$ та $X'(l)=-A\mu \sin \mu l + B\mu \cos \mu l=0$, звідки $B=0$. Рівність $A\mu \sin \mu l=0$ можлива, якщо $\sin \mu l=0$, тобто якщо:

$$\mu=\mu_n=\frac{\pi n}{l}, \quad n=1,2,\dots$$

Власним чином, $\lambda_n=\mu_n^2$ будуть відповідати власні функції $X_n(x)=\cos \mu_n x$,
 $n=1,2,\dots$

2. $\lambda=0$. Загальний розв'язок рівняння $X''(x)=0$ має вигляд:

$$X(x)=Ax+B.$$

Реалізуючи крайові умови, отримаємо:

$$X'(0)=A=0 \text{ та } X'(l)=A=0.$$

Таким чином, $\lambda=0$ є власним числом, якому відповідає власна функція $X_0(x)=1$.

Перший та другий випадки можна поєднати, враховуючи, що:

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \text{ та } X_n(x) = \cos \mu_n x \text{ для } n=0, 1, 2, \dots$$

Така система власних функцій є ортогональною та повною на проміжку $(0; l)$:

$$\int_0^l \cos \mu_n x \cos \mu_m x dx = \begin{cases} l, & n=m=0 \\ \frac{l}{2}, & n=m \neq 0 \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

3. $\lambda = -\mu^2 < 0$. Загальний розв'язок рівняння з (Б.14) має вигляд:

$$X(x) = A \cosh \mu x + B \sinh \mu x.$$

Підставимо його до крайових умов з (Б.14), отримаємо:

$$X'(0) = B\mu = 0 \text{ та } X'(l) = A\mu \sinh \mu l + B\mu \cosh \mu l = 0.$$

Так як $\sinh \mu l \neq 0$ при $\mu \neq 0$, то $A=B=0$ та у даному випадку існує тільки тривіальний розв'язок $X(x) = 0$.

Розв'язок задачі Штурма-Ліувилля завершено.

Після цього звернемося до першого рівняння з (Б.13):

$$T_n'(t) - a^2 \mu_n^2 T_n(t) = 0.$$

Його загальний розв'язок має вигляд:

$$T_n(t) = C_n e^{-\mu_n^2 a^2 t}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Побудуємо функції:

$$V_n(x, t) = C_n e^{-\mu_n^2 a^2 t} \cos \mu_n x, \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

які задовольняють рівняння (Б.9) та крайові умови (Б.10). Побудуємо функцію:

$$V(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\mu_n^2 a^2 t} \cos \mu_n x \quad (\text{Б.15})$$

та визначимо коефіцієнти C_n з умови задоволення початкової умови (Б.11):

$$V|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \mu_n x = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Вважаючи, що функція $\varphi(x)$ задовольняє умовам теореми Стеклова, розвинемо її в ряд Фур'є за системою функцій $\{\cos \mu_n x\}$, знайдемо коефіцієнти розвинення:

$$C_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx; C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \mu_n x dx, n \geq 1.$$

Підставляючи розшукані коефіцієнти до виразу (Б.15), отримаємо розв'язок поставленої задачі.

Приклад 3

Розглянемо застосування метода відокремлення змінних до рівнянь еліптичного типу на прикладі наступної крайової задачі для рівняння Лапласа:

$$\Delta V(x, y) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0, 0 < x < a, 0 < y < b \quad (\text{Б.16})$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad V|_{x=a} = y, \quad 0 \leq y \leq b \quad (\text{Б.17})$$

$$V|_{y=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{y=b} = 0, \quad 0 \leq x \leq a \quad (\text{Б.18})$$

Будемо розшукувати часткові розв'язки вигляду:

$$V(x, y) = X(x)Y(y). \quad (\text{Б.19})$$

Підставляючи це зображення до рівняння (Б.16) та поділивши його на $X(x)Y(y)$, дійдемо до рівності $\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0$, звідки

випливає: $-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda$, де λ – стала.

Таким чином, отримаємо два звичайних диференціальних рівняння:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \text{ та } Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \quad (\text{Б.20})$$

Отримаємо крайові умови для функції $Y(y)$, для чого підставимо зображення (Б.19) до однорідних крайових умов (Б.18):

$$V|_{y=0} = X(x)Y(0) = 0; \quad \left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{y=b} = X(x)Y'(b) = 0,$$

звідки $Y(0) = 0$ та $Y'(b) = 0$.

Випишемо отриману задачу Штурма-Ліувилля відносно функції $Y(y)$ (саме для неї крайові умови є однорідними):

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \quad 0 < y < b; \quad Y(0) = Y'(b) = 0 \quad (\text{Б.21})$$

Розглянемо для її розв'язання три випадки.

1. $\lambda = \mu^2 > 0$. Загальний розв'язок рівняння з (Б.21) має вигляд:

$$Y(y) = A \cos \mu y + B \sin \mu y.$$

Реалізуємо крайові умови з (Б.21):

$$Y(0) = A = 0; \quad Y'(b) = -A\mu \sin \mu b + B\mu \cos \mu b = 0.$$

Вони будуть задовольняти, якщо $\cos \mu b = 0$, тобто якщо:

$$\mu = \mu_n = \frac{\pi(2n+1)}{2b}, \quad n=0,1,\dots$$

Власним чином, $\lambda = \mu^2$ відповідають власні функції:

$$Y_n(y) = \sin \mu_n y,$$

які утворюють повну та ортогональну систему на $(0;b)$.

2. $\lambda = 0$. Загальний розв'язок рівняння з (Б.21) має вигляд:

$$Y(y) = Ay + B.$$

Реалізуючи крайові умови, отримаємо:

$$Y(0) = B = 0; \quad Y'(b) = A = 0,$$

звідки випливає, що $Y(y) = 0$.

$\lambda = 0$ - не є власними числами цієї задачі.

3. $\lambda = -\mu^2 < 0$. Загальний розв'язок рівняння з (Б.21) має вигляд:

$$Y(y) = A \cosh \mu y + B \sinh \mu y.$$

Реалізуємо крайові умови:

$$Y(0) = A = 0; \quad Y'(b) = A\mu \sinh \mu b + B\mu \cosh \mu b = 0.$$

Так як $\cosh \mu b \neq 0$, то у цьому випадку маємо тільки тривіальний розв'язок $Y(y) = 0$.

Повернемося до першого рівняння з (Б.20). Якщо $\lambda = \mu^2$, його загальний розв'язок зображується формулою:

$$X_n(x) = C_n \cosh \mu_n x + D_n \sinh \mu_n x, \quad n=0,1,\dots$$

Таким чином, побудовано часткові розв'язки:

$$V_n(x, y) = [C_n \cosh \mu_n x + D_n \sinh \mu_n x] \sin \mu_n y, \quad n=0,1,\dots,$$

які задовольняють рівняння (Б.16) та крайові умови (Б.18).

Побудуємо функцію:

$$V_n(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n \operatorname{ch} \mu_n x + D_n \operatorname{sh} \mu_n x] \sin \mu_n y,$$

коефіцієнти якої C_n та D_n відшукаємо із залишених крайових умов (Б.17):

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin \mu_n y \mu_n = 0,$$

$$V|_{x=a} = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n \operatorname{ch} \mu_n a + D_n \operatorname{sh} \mu_n a] \sin \mu_n y = y, \quad 0 \leq y \leq b.$$

З першою рівності маємо, що $D_n = 0$, а з другої:

$$C_n \operatorname{ch} \mu_n a + D_n \operatorname{sh} \mu_n a = \frac{2}{b} \int_0^b y \sin \mu_n y dy,$$

звідки, інтегруючи за частинами, знайдемо:

$$C_n = \frac{2(-1)^n}{b \mu_n^2 \operatorname{ch} \mu_n a}.$$

Таким чином, розв'язок вихідної задачі має вигляд:

$$V(x, y) = \frac{2}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\mu_n^2 \operatorname{ch} \mu_n a} \operatorname{ch} \mu_n x \sin \mu_n y.$$

Під час розгляду областей типа кільця, кругового сектора або круга замість декартової системи координат зручніше користуватися полярною:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Оператор Лапласа у полярній системі координат має вигляд:

$$\Delta V(r, \theta) = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}.$$

Приклад 4

Розглянемо внутрішню задачу Діріхле для круга:

$$\Delta V(r, \theta) = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0, \quad r < a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (\text{Б.22})$$

$$V|_{r=a} = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (\text{Б.23})$$

Будемо шукати часткові розв'язки рівняння (2.32) у зображенні:

$$V(r, \theta) = R(r)T(\theta).$$

Підставимо таке зображення до рівняння:

$$R''(r)T(\theta) + \frac{1}{r} R'(r)T(\theta) + \frac{1}{r^2} R(r)T''(\theta) = 0,$$

звідки
$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} = -\frac{T''(\theta)}{T(\theta)} = \lambda = \text{const}.$$

Отримаємо, як результат, два звичайних диференціальних рівняння:

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - \lambda R(r) = 0 \text{ та } T''(\theta) + \lambda T(\theta) = 0.$$

Шуканий розв'язок $V(r, \theta)$ має бути 2π періодичною функцією від змінної θ , отже, такою самою має бути функція $T(\theta)$, тобто $T(\theta + 2\pi) = T(\theta)$. Рівняння $T''(\theta) + \lambda T(\theta) = 0$ має наступний розв'язок:

$$T(\theta) = \begin{cases} A \cos \sqrt{\lambda} \theta + B \sin \sqrt{\lambda} \theta, & \lambda > 0 \\ A + B\theta, & \lambda = 0 \\ A e^{\sqrt{-\lambda} \theta} + B e^{-\sqrt{-\lambda} \theta}, & \lambda < 0 \end{cases}$$

2π - періодичний розв'язок, можливий лише у першому випадку при значеннях $\lambda = n^2, n = 0, 1, \dots$. Тоді зображення розв'язка приймає вигляд:

$$T_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta, n = 0, 1, \dots$$

Рівняння відносно другої функції $R(r)$:

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - n^2 R(r) = 0,$$

як бачимо, є рівнянням Ейлера, загальний розв'язок якого запишемо у формі:

$$R_n(r) = \begin{cases} C_0 + D_0 \ln r, & n = 0 \\ C_n r^n + D_n r^{-n}, & n \geq 1 \end{cases}$$

Розшукавши часткові розв'язки рівняння Лапласа:

$$V_n(r, \theta) = R_n(r) T_n(\theta),$$

загальний розв'язок візьмемо у вигляді:

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(r, \theta) = (C_0 + D_0 \ln r) A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n}) (A_n \cos \theta + B_n \sin \theta). \quad (\text{Б.24})$$

Зрозуміла вимога – це обмеженість розв’язку $V(r, \theta)$ у області, де він відшукується. Колу $r \leq a$ належить точка $r=0$ і для обмеженості у неї функції (Б.24) потрібно взяти $D_n=0$ ($n=0, 1, \dots$). Таким чином,

$$V(r, \theta) = C_0 A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (C_n A_n \cos n\theta + C_n B_n \sin n\theta).$$

Використаємо крайові умови (Б.23):

$$V|_{r=a} = C_0 A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (C_n A_n \cos n\theta + C_n B_n \sin n\theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (\text{Б.25})$$

Враховуючи, що функція $f(\theta)$ задовольняє умовам розвинення у тригонометричний ряд Фур’є, маємо:

$$f(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta),$$

$$\text{де } \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \text{ та } \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta.$$

Порівнявши цей ряд з рядом (Б.25), отримаємо:

$$C_0 A_0 = \frac{1}{2} \alpha_0; \quad C_n A_n = \frac{\alpha_n}{a^n}; \quad C_n B_n = \frac{\beta_n}{a^n}.$$

Таким чином, розв’язок внутрішньої задачі Діріхле для круга має вигляд:

$$V(r, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n [\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta].$$

Примітка. Під час розв’язання задачі ми припустили, що $D_n=0$, бо області належить точка $r=0$. Якщо розглядається необмежена область, наприклад, $a \leq r < \infty$, то з вимоги спадання розв’язку на нескінченності мали би припустити $D_0=0$ та $C_n=0$. Якщо ж розглядати скінченну область $0 < a \leq r \leq b$, то всі сталі C_n та D_n потрібно залишити та відшукувати їх з граничних умов при $r=a$ та $r=b$.

Приклад 5

Розв’яжемо крайову задачу:

$$\Delta V(r, \theta) = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0 \quad a < r < b, \quad 0 < \theta < \alpha \quad (\text{Б.26})$$

$$V|_{\theta=\alpha}=0; \quad \left. \frac{\partial V}{\partial \theta} \right|_{\theta=\alpha}=0, \quad (\text{Б.27})$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \theta} \right|_{r=a}=f(\theta), \quad V|_{r=b}=0. \quad (\text{Б.28})$$

У відповідності з методом відокремлення змінних маємо спочатку відшукати часткові розв'язки рівняння (Б.26), що задовольняє однорідні крайові умови (Б.27) та що зображуються у вигляді:

$$V(r, \theta)=R(r)T(\theta). \quad (\text{Б.29})$$

Підставляючи (Б.29) до рівняння (Б.26), що приводить його до вигляду:

$$\frac{r^2 R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-\frac{T''(\theta)}{T(\theta)}=\lambda - \text{const},$$

Звідки:

$$r^2 R''(r)+rR'(r)-\lambda R(r)=0 \text{ та } T''(\theta)+\lambda T(\theta)=0.$$

Підставляючи зображення (Б.29) до крайових умов (Б.27), отримаємо:

$$V|_{\theta=0}=R(r)T(0)=0 \text{ та } \left. \frac{\partial V}{\partial \theta} \right|_{\theta=\alpha}=R(r)T'(\alpha)=0,$$

звідки $T(0)=0$ та $T'(\alpha)=0$.

Таким чином, для відшукування $T(\theta)$ та параметра λ маємо розв'язати задачу Штурма-Ліувілля:

$$T''(\theta)+\lambda T(\theta)=0, \quad 0<\theta<\alpha, \quad T(0)=T'(\alpha)=0 \quad (\text{Б.30})$$

Розглянемо три можливих випадки її розв'язання:

1. $\lambda=\mu^2>0$. Загальний розв'язок рівняння з (Б.30) має вигляд:

$$T(\theta)=A \cos \mu \theta+B \sin \mu \theta.$$

Реалізуючи крайові умови з (Б.30), отримаємо:

$$T(0)=A=0 \text{ та } T'(\alpha)=-A\mu \sin \mu \alpha+B\mu \cos \mu \alpha=0.$$

Для виконання останньої рівності потрібно, щоб $\cos \mu \alpha=0$, тобто:

$$\mu=\mu_n=\frac{\pi(2n+1)}{2\alpha}, \quad n=0,1,\dots$$

Звідки $\lambda=\mu_n^2$ є власними числами, яким відповідають власні функції $T_n(\theta)=\sin \mu_n \theta$.

2. $\lambda=0$. Загальний розв'язок рівняння з (Б.30):

$$T(\theta) = A\theta + B.$$

Задовольнимо крайові умови:

$$T(0) = B = 0 \text{ та } T'(\alpha) = A = 0,$$

тобто задача у цьому випадку має тільки тривіальний розв'язок $T(\theta) = 0$.

3. $\lambda = -\mu^2 < 0$. Загальний розв'язок рівняння з (Б.30):

$$T(\theta) = A \operatorname{ch} \mu \theta + B \operatorname{sh} \mu \theta.$$

Задовольнимо крайові умови:

$$T(0) = A = 0; \quad T'(\alpha) = A \mu \operatorname{sh} \mu \alpha + B \mu \operatorname{ch} \mu \alpha = 0.$$

Враховуючи, що $\operatorname{ch} \mu \alpha \neq 0$, отримаємо $A = B = 0$, тобто $T(\theta) = 0$.

Повернемося до рівняння відносно $R(r)$:

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - \mu_n^2 R(r) = 0, \quad a < r < b.$$

Його загальний розв'язок запишемо у вигляді:

$$R_n(r) = C_n r^{\mu_n} + D_n r^{-\mu_n}.$$

Таким чином, ми знайшли часткові розв'язки:

$$V_n(r, \theta) = R_n(r) T_n(\theta) = [C_n r^{\mu_n} + D_n r^{-\mu_n}] \sin \mu_n \theta, \quad n = 0, 1, \dots,$$

які задовольняють умови (Б.27) та рівняння (Б.26). Розв'язок задачі побудуємо у формі:

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n r^{\mu_n} + D_n r^{-\mu_n}] \sin \mu_n \theta.$$

З метою розшукати сталі D_n та C_n використаємо крайові умови (Б.28):

$$\left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n [C_n a^{\mu_n-1} - D_n a^{-\mu_n-1}] \sin \mu_n \theta = f(\theta), \quad 0 < \theta < \alpha$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=b} = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n b^{\mu_n} + D_n b^{-\mu_n}] \sin \mu_n \theta = 0$$

Враховуючи, що функція $f(\theta)$ задовольняє умови розвинення в ряд Фур'є на проміжку $(0; \alpha)$ за ортогональною системою функцій $\{\sin \mu_n \theta\}$, отримаємо:

$$\mu_n [C_n a^{\mu_n-1} - D_n a^{-\mu_n-1}] = f_n$$

$$\mu_n [C_n a^{\mu_n-1} - D_n a^{-\mu_n-1}] = f_n,$$

$$\text{де } f_n = \frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha f(\theta) \sin \mu_n \theta d\theta.$$

Звідки знайдемо невідомі сталі:

$$C_n = \frac{af_n a^{\mu_n} b^{-2\mu_n}}{\mu_n \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^{\mu_n} \right]}, \quad D_n = - \frac{af_n a^{\mu_n}}{\mu_n \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^{\mu_n} \right]},$$

а з ними і остаточний розв'язок:

$$V(r, \theta) = a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{\mu_n \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^{\mu_n} \right]} \left[\left(\frac{ra}{b^2} \right)^{\mu_n} - \left(\frac{a}{r} \right)^{\mu_n} \right] \sin \mu_n \theta.$$

Відмітимо, що основи, що входять до остаточної формули розв'язку, при піднесенні до ступеню μ_n є меншими за одиницю при $a < r < b$, що забезпечує збіжність як отриманого ряду, так і рядів, що отримані почленним диференціюванням.

У розшуканих вище прикладах метод відокремлення змінних успішно працював завдяки однорідності рівняння та крайових умов.

Якщо умови однорідності порушено, то змінні відокремлюються тільки після деяких попередніх перетворень. Розглянемо ці перетворення на наступних прикладах.

Приклад 6

Розглянемо крайову задачу:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - 2x, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (\text{Б.31})$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} = -1; \quad V|_{x=l} = 0, \quad (\text{Б.32})$$

$$V|_{t=0} = \varphi(x); \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (\text{Б.33})$$

Зведемо цю задачу до задачі з однорідними рівняннями та крайовими умовами наступним чином. Покладемо:

$$V(x, t) = V(x, t) + W(x) \quad (\text{Б.34})$$

та підставимо (Б.34) до рівняння (Б.31), крайових умов (Б.32) та початкових умов (Б.33):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + a^2 W''(x) - 2x$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} + W'(0) = -1; \quad V|_{x=l} + W(l) = 0$$

$$V|_{t=0} + W(x) = \varphi(x); \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x).$$

Будемо вимагати, щоб функція $W(x)$ була розв'язком наступної одновимірної задачі:

$$a^2 W''(x) - 2x = 0; \quad W'(0) = -1, \quad W(l) = 0.$$

Інтегруючи рівняння $W''(x) = \frac{2}{a^2} x$, отримаємо:

$$W'(x) = \frac{x^2}{a^2} + C_1.$$

З першої крайової умови знайдемо $W'(0) = C_1 = -1$, отже $W'(x) = \frac{x^2}{a^2} - 1$. Інтегруючи вдруге, знайдемо:

$$W(x) = \frac{x^3}{3a^2} - x + C_2.$$

З другої крайової умови отримаємо:

$$W(l) = \frac{l^3}{3a^2} - l + C_2 = 0, \text{ тобто } C_2 = l - \frac{l^3}{3a^2}.$$

Остаточно:

$$W(x) = \frac{x^3 - l^3}{3a^2} + l - x.$$

Тоді функція $V(x, t)$ має задовольняти наступній задачі:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad V|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0$$

$$V|_{t=0} = \varphi(x) - W(x), \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

В отриманій початково-крайовій задачі рівняння та крайові умови однорідні, отже до неї вже може бути застосований метод відокремлення змінних. Розв'язуючи її аналогічно до того, як це було зроблено у прикладі 1, знайдемо $V(x, t)$. Шуканий розв'язок визначимо за формулою (Б.34).

Приклад 7

Розглянемо неоднорідну крайову задачу для рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = y, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad (\text{Б.35})$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} = f(y), \quad V|_{x=a} = 0, \quad (\text{Б.36})$$

$$V|_{y=0} = 1; \quad \left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{y=b} = 0. \quad (\text{Б.37})$$

Так як неоднорідність у рівнянні залежить від змінної y , то для зведення задачі до однорідної маємо припустити зображення шуканого розв'язку у вигляді:

$$V(x, y) = V(x, y) + W(y). \quad (\text{Б.38})$$

Підставимо це зображення до рівняння та крайових умов (Б.35) – (Б.37):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + W''(y) &= y, \\ \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} &= f(y); \quad V|_{x=a} + W(y) = 0, \\ \left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{y=0} + W(0) &= 1; \quad \left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{y=b} + W'(b) = 0. \end{aligned}$$

Будемо вимагати, щоб функція $W(y)$ була розв'язком наступної задачі:

$$W''(y) = y; \quad W(0) = 1; \quad W'(b) = 0,$$

звідки $W'(y) = \frac{1}{2}y^2 + C_1$.

Так як $W'(b) = \frac{1}{2}b^2 + C_1 = 0$, то стала $C_1 = -\frac{1}{2}b^2$, тобто $W'(y) = \frac{1}{2}(y^2 - b^2)$.

Інтегруючи вдруге, отримаємо:

$$W(y) = \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{2}b^2y + C_2,$$

та так як $W(0) = C_2 = 1$, то остаточно знайдемо:

$$W(y) = \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{2}b^2y + 1.$$

Тепер для функції $V(x, y)$ маємо задачу з однорідними рівняннями та крайовими умовами за змінною y :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=0} &= f(y); \quad V \Big|_{x=a} = -W(y), \\ V \Big|_{y=0} &= 0; \quad \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0.\end{aligned}$$

Для розв'язання цієї задачі може бути застосовано метод відокремлення змінних аналогічно до прикладу 3. Розв'язавши її, остаточний рішення вихідної задачі отримаємо за формулою (Б.38).

Завдання

Методом відокремлення змінних розв'язати наступні крайові задачі:

А

$$\begin{aligned}1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0; \quad u \Big|_{x=l} = 0; \quad u \Big|_{t=0} = l - x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u \Big|_{x=0} &= -2; \quad u \Big|_{x=l} = l; \quad u \Big|_{t=0} = x - 2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4, \quad -l < x < l, \quad t > 0 \\ u \Big|_{x=-l} &= l; \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0; \quad u \Big|_{t=0} = x^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u \Big|_{x=0} &= 0, \quad u \Big|_{x=2} = 0, \quad u \Big|_{t=0} = x(2 - x).\end{aligned}$$

$$5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 2; \quad u|_{t=0} = 2x.$$

$$6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -l < x < l, \quad t > 0$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=-l} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0; \quad u|_{t=0} = \cos \pi x.$$

$$7) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0$$

$$u|_{x=0} = -1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=2} = 1; \quad u|_{t=0} = x - 1.$$

$$8) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = (1-x)^2$$

$$9) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

$$u|_{x=0} = 2; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = -1; \quad u|_{t=0} = 0.$$

$$10) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

$$u|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0; \quad u|_{t=0} = x \sin x$$

Б

$$1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$
$$u|_{x=0} = 1; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0; \quad u|_{t=0} = x+1; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

$$2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0$$
$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=2} = 0; u|_{t=0} = 2-x; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

$$3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -l < x < l, \quad t > 0$$
$$u|_{x=-l} = 0; \quad u|_{x=l} = 0; \quad u|_{t=0} = 1-x^2; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

$$4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$
$$u|_{x=0} = 1; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0; \quad u|_{t=0} = 1-x; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

$$5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0$$
$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=2} = 0; \quad u|_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 2-x$$

$$6) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$
$$u|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=l} = 0; \quad u|_{t=0} = x(1-x); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

$$7) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin x, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

$$u|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=l} = 0; \quad u|_{t=0} = x; \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$$

$$8) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0$$

$$u|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=2} = 0; \quad u|_{t=0} = x^2; \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$$

$$9) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

$$u|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=l} = 0; \quad u|_{t=0} = 1 - x^2; \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$$

$$10) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -1 < x < l, \quad t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=-l} = 0, \quad u|_{x=l} = 0; \quad u|_{t=0} = 1 - x; \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$$

B

$$1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 1 < r < \infty, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = 0, \quad u|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = 0; \quad u|_{l=1} = \cos 2\theta; \quad u \rightarrow \infty \text{ при } r \rightarrow \infty$$

$$2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2x, \quad 0 < x < l, \quad 0 < y < 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=l} = 1; \quad u|_{y=0} = x; \quad u|_{y=2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < y < 1$$

3) $u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0; \quad u|_{y=0} = \sin \pi x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=1} = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$$

4) $u|_{r=1} = 0; \quad u|_{r=2} = \cos^2 \theta; \quad u|_{\theta=0} = 0; \quad u|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 0 < r < 3, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{3}$$

5) $u|_{\theta=0} = 0; \quad u|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = 0; \quad u|_{r=3} = \theta \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1, \quad 0 < x < l, \quad 0 < y < 1$$

6) $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 2; u|_{x=l} = -1; \quad u|_{y=0} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=1} = -x^2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

7) $u|_{\theta=0} = 0; u|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0; \quad u|_{r=1} = \sin 2\theta; \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=2} = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad -l < x < l, \quad 0 < y < 2$$

8) $u|_{x=-l} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0; \quad u|_{y=0} = 0; \quad u|_{y=2} = x+1$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 2 < r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

9) $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{r=2} = \sin^2 \theta; \quad u \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < y < 1 \\
 10) \quad & u|_{x=0} = 1 - y^2; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; u|_{y=1} = 0.
 \end{aligned}$$

ДОДАТОК В

Розв'язування крайових задач математичної фізики за методом інтегральних перетворень

Приклад 1

Підібрати інтегральне перетворення за змінною x та звести наступну задачу до одновимірної:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= q(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0, \quad 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 < x < l.\end{aligned}\tag{B.1}$$

Відповідно до схеми методу інтегральне перетворення розшукується у вигляді $u_\lambda(t) = \int_0^l u(x, t) K(x, \lambda) dx$, де $K(x, \lambda)$ – невідоме ядро інтегрального перетворення.

Помножимо обидві частини рівняння у (B.1) на ядро $K(x, \lambda)$ та проінтегруємо за змінною x на інтервалі $(0, l)$:

$$\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) K(x, \lambda) dx = \int_0^l q(x, t) K(x, \lambda) dx.\tag{B.2}$$

Інтеграл у лівій частині рівності (B.2) розіб'ємо на два. У першому з них змінимо порядок інтегрування та диференціювання. У другому інтегралі проведемо інтегрування по частинам:

$$\begin{aligned}\frac{du_\lambda(t)}{dt} - a^2 \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} K(x, \lambda) dx &= \left[\begin{array}{ll} u = K(x, \lambda) & dv = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \\ du = \frac{dK(x, \lambda)}{dx} dx & v = \frac{\partial u}{\partial x} \end{array} \right] = \\ &= \frac{du_\lambda(t)}{dt} - a^2 K(x, \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^l + a^2 \int_0^l \frac{dK(x, \lambda)}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} dx =\end{aligned}$$

$$= \left[\begin{array}{cc} u = \frac{dK(x, \lambda)}{dx} & dv = \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ du = \frac{d^2 K(x, \lambda)}{dx^2} & v = u(x, \lambda) \end{array} \right] = \frac{du_\lambda(t)}{dt} - a^2 K(x, \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^l + \\ + a^2 \frac{dK(x, \lambda)}{dx} u(x, \lambda) \Big|_0^l - a^2 \int_0^l \frac{d^2 K(x, \lambda)}{dx^2} u(x, \lambda) dx. \quad (B.3)$$

Для того, щоб вихідна крайова задача перетворилася на одновимірну крайову задачу відносно невідомої трансформанти $u_\lambda(t)$, необхідно, щоб ядро перетворення $K(x, \lambda)$ задовольнило задачу Штурма-Ліувіля:

$$\begin{cases} \frac{d^2 K(x, \lambda)}{dx^2} + \lambda K(x, \lambda) = 0, & 0 < x < l, \\ \frac{dK(0, \lambda)}{dx} = 0, & \frac{dK(l, \lambda)}{dx} = 0. \end{cases} \quad (B.4)$$

(зауважимо, що всі інші члени внеінтегральних доданків дорівнюють нулеві за рахунок граничних умов задачі (B.1)).

Розв'язавши цю задачу за схемою, що наведена у доданку Б, отримаємо, що розв'язок задачі Штурма-Ліувіля (B.4) зображується у вигляді:

$$K(x, \lambda) = \cos \lambda x, \quad \lambda = \alpha^2, \quad \alpha = \frac{\pi K}{l}, \quad K = 0, 1, 2, \dots$$

Отже, побудовано скінчене косинус-перетворення Фур'є:

$$u_\alpha(t) = \int_0^l u(x, t) \cos \alpha x dx, \quad (B.5)$$

у просторі трансформанти якого вихідна задача приймає вигляд:

$$u'_\alpha(t) + \alpha^2 a^2 u_\alpha(t) = q_\alpha(t), \quad (B.6)$$

$$\text{де } q_\alpha(t) = \int_0^l q(x, t) \cos \alpha x dx.$$

Застосуємо інтегральне перетворення (B.5) до останньої граничної умови у (B.1). З цією метою помножимо обидві частини на $K(x, \lambda) = \cos \alpha x$ та проінтегруємо за змінною x на інтервалі $(0; l)$. Умова у просторі трансформант запишеться у вигляді:

$$u_{\alpha}(0)=f_{\alpha}, \quad f_{\alpha}=\int_0^l f(x)\cos\alpha x dx. \quad (\text{B.7})$$

Таким чином, крайова задача (B.1) за допомогою методу інтегральних перетворень зведена до одновимірної крайової задачі:

$$\begin{cases} u'_{\alpha}(t)+\alpha^2 a^2 u_{\alpha}(t)=q_{\alpha}(t), \\ u_{\alpha}(0)=f_{\alpha}. \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Отриману задачу розв'язуємо, побудувавши загальний розв'язок диференціального рівняння, невідому сталу у якому визначаємо з крайової умови.

Зауваження. Вихідну задачу (B.1) можна звести до одновимірної в інший спосіб, а саме, використовуючи інтегральне перетворення Лапласа за змінною t . Для цього перші три рівності у задачі (B.1) помножимо на $e^{-\alpha t}$, проінтегруємо за змінною t на інтервалі $(0; +\infty)$:

$$\begin{aligned} a^2 \frac{d^2 u_{\alpha}(x)}{dx^2} - \alpha u_{\alpha}(x) &= -q_{\alpha}(x) - f(x), \quad 0 < x < l, \\ \frac{du_{\alpha}(0)}{dx} &= 0, \quad \frac{du_{\alpha}(l)}{dx} = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\text{де } q_{\alpha}(x) = \int_0^{\infty} q(x, t) e^{-\alpha t} dt.$$

Приклад 2

Підібрати інтегральне перетворення, яке зведе наступну задачу до одновимірної:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= g(r, \theta), \quad 0 < a < r < b, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \\ u|_{r=a} &= f(\theta), \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=b} = 0, \\ u|_{\theta=-\pi} &= u|_{\theta=\pi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} \Big|_{\theta=-\pi} = \frac{\partial u}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Підберемо інтегральне перетворення за змінною θ . Перепишемо диференціальне рівняння задачі у вигляді:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} = r^2 q(r, \theta). \quad (\text{B.11})$$

Помножимо обидві частини рівняння на невідоме ядро перетворення $K(\theta, \lambda)$ та проінтегруємо на інтервалі $(-\pi, \pi)$. Як результат, отримаємо замість першого доданка:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} K(\theta, \lambda) d\theta &= \left[\begin{array}{cc} u=K(\theta, \lambda) & dv=\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} d\theta \\ du=\frac{dK(\theta, \lambda)}{d\theta} d\theta & v=\frac{\partial u}{\partial \theta} \end{array} \right] = \\
 &= K(\theta, \lambda) \frac{\partial u}{\partial \theta} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{dK(\theta, \lambda)}{d\theta} d\theta = \left[\begin{array}{cc} u=\frac{dK(\theta, \lambda)}{d\theta} & dv=\frac{\partial u}{\partial \theta} \\ du=\frac{d^2 K(\theta, \lambda)}{d\theta^2} d\theta & v=u(\theta, \lambda) \end{array} \right] = \\
 &= K(\theta, \lambda) \frac{\partial u}{\partial \theta} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{dK(\theta, \lambda)}{d\theta} u(\theta, \lambda) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} u(\theta, \lambda) \frac{d^2 K(\theta, \lambda)}{d\theta^2} d\theta = \\
 &= \frac{\partial u}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi} \left[K(\theta, \lambda) \Big|_{\theta=\pi} - K(\theta, \lambda) \Big|_{\theta=-\pi} \right] - u(\theta, \lambda) \Big|_{\theta=\pi} \left[\frac{dK(\theta, \lambda)}{d\theta} \Big|_{\theta=\pi} - \frac{dK(\theta, \lambda)}{d\theta} \Big|_{\theta=-\pi} \right] + \\
 &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} u(\theta, \lambda) \frac{d^2 K(\theta, \lambda)}{d\theta^2} d\theta.
 \end{aligned}$$

Для того, щоб вихідна задача (В.10) трансформувалась на одновимірну, ядро перетворення має задовольняти задачу Штурма-Ліувіля:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 K}{d\theta^2} + \lambda K = 0 \\ K \Big|_{\theta=-\pi} = K \Big|_{\theta=\pi}, \quad \frac{dK}{d\theta} \Big|_{\theta=-\pi} = \frac{dK}{d\theta} \Big|_{\theta=\pi} \end{array} \right. \quad (\text{В.12})$$

Відповідно до схеми розв'язування задачі Штурма-Ліувіля, що власні функції цієї задачі – $\{e^{iK\theta}\}$, де $K=-\infty, +\infty$. Отже, шукане інтегральне перетворення є перетворенням Фур'є:

$$u_K(r) = \int_{-\pi}^{\pi} u(r, \theta) e^{iK\theta} d\theta$$

з формулою обернення:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{K=-\infty}^{\infty} u_K(r) e^{iK\theta}. \quad (\text{B.13})$$

Одновимірна задача, що відповідає вихідній граничній задачі, набуває вигляду:

$$\begin{cases} r^2 \frac{d^2 u_K(r)}{dr^2} + r \frac{du_K(r)}{dr} - K^2 u_K(r) = g_K(r), \\ u_K(a) = t_K, \frac{du_K(r)}{dr} = 0, \quad 0 < a < r < b. \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

Розв'язок її можна побудувати, застосовуючи, наприклад, метод функції Гріна.

Для цієї самої вихідної задачі можна підібрати інтегральне перетворення за змінною r , яке зведе задачу також до одновимірної, але тепер – за змінною θ . У цьому разі диференціальне рівняння з (B.1) запишемо у вигляді:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = r^2 g(r, \theta). \quad (\text{B.15})$$

Інтегральне перетворення з невідомим ядром $K(r, \lambda)$ розшукуємо у вигляді:

$$u_\lambda(\theta) = \int_a^b u(r, \theta) K(r, \lambda) \frac{dr}{r}, \quad (\text{B.16})$$

тимчасово припускаючи, що граничні умови за радіальною змінною є однорідними.

Помножимо обидві частини рівняння (B.15) на $r^{-1}K(r, \lambda)$ та проінтегруємо на інтервалі $(a; b)$ за змінною r . Отримаємо після інтегрування за частинами наступне співвідношення:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_\lambda}{d\theta^2} - \lambda u_\lambda + \int_a^b u(r, \theta) \left[r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dK}{dr} \right) + \lambda K \right] \frac{dr}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=b} b K(b, \lambda) - \\ - u \Big|_{r=b} b \frac{dK}{dr} \Big|_{r=b} - \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} a K(a, \lambda) - u \Big|_{r=a} a \frac{dK}{dr} \Big|_{r=a} = \int_a^b r g(r, \theta) K(r, \lambda) dr. \end{aligned}$$

З метою звести вихідну крайову задачу до одновимірної вимагаємо, щоб ядро інтегрального перетворення $K(r, \lambda)$ було розв'язком задачі Штурма-Ліувіля:

$$\begin{cases} r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dK}{dr} \right) + \lambda K = 0, & 0 < a < r < b, \\ K|_{r=a} = 0, & \frac{dK}{dr} \Big|_{r=b} = 0. \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

Відповідно до схеми розв'язання задачі Штурма-Ліувіля отримано, що ядро перетворення $K(r, \lambda)$ дорівнює

$$K(r, \lambda) = \sin\left(\alpha \ln \frac{r}{a}\right), \quad \lambda = \alpha^2, \quad \alpha = \frac{\pi(2K-1)}{\ln(b/a)}. \quad \text{Отже,} \quad \text{побудовано}$$

нестандартне скінчене синус-перетворення Мелліна:

$$u_\alpha(\theta) = \int_a^b u(r, \theta) \sin\left(\alpha \ln \frac{r}{a}\right) \frac{dr}{r}$$

з формулою обернення:

$$u(r, \theta) = \frac{r}{\ln(b/a)} \sum_{K=1}^{\infty} u_\alpha(\theta) \sin\left(\alpha \ln \frac{r}{a}\right). \quad (\text{B.18})$$

Досить часто можна застосувати інтегральне перетворення, ядро якого вже побудовано. Для цього потрібно знати вигляд задачі Штурма-Ліувіля, який має задовольнити шукане ядро перетворення та інтервал, на якому визначена невідома функція. Знаючи ці факти, можна звернутися до стандартних таблиць інтегральних перетворень. (Наприклад, обширні таблиці наведені у посібнику Г. Я. Попов, В. В. Реут, Н. Д. Вайсфельд “Навчальний посібник з курсу рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень”).

Приклад 3. Розв'язати крайову задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < a \\ u, \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0 & |x| \rightarrow \infty \\ u|_{y=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=a} = 0, & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

Виходячи з того, що за змінною x невідома функція змінюється на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ та з умов на нескінченності, використаємо інтегральне перетворення Фур'є за цією змінною:

$$u_{\alpha}(y)=\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)e^{i\alpha x}dx. \quad (B.20)$$

Помножимо обидві частини рівняння (B.19) на ядро перетворення $e^{i\alpha x}$ та проінтегруємо на проміжку $(-\infty, +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{i\alpha x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e^{i\alpha x} dx = 0. \quad (B.21)$$

З урахуванням крайових умов (B.19), після інтегрування за частинами, перший доданок прийме вигляд:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{i\alpha x} dx = (-i\alpha)^2 u_{\alpha}(y) = -\alpha^2 u_{\alpha}(y). \quad (B.22)$$

У другому доданку, з урахуванням того, що інтегрування та диференціювання проводиться за різними змінними, змінимо порядок цієї операції:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e^{i\alpha x} dx = \frac{d^2}{dy^2} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{i\alpha x} dx = \frac{du_{\alpha}^2}{dy^2}.$$

Як результат, у просторі трансформант перетворення (B.20) отримаємо одновимірну крайову задачу:

$$\begin{cases} u_{\alpha}''(y) - \alpha^2 u_{\alpha}(y) = 0 \\ u_{\alpha}(0) = \Phi(\alpha), u_{\alpha}'(a) = 0, \end{cases} \quad (B.23)$$

$$\text{де } \Phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\alpha x} dx.$$

Загальний розв'язок рівняння з (B.23) має вигляд $u_{\alpha}(y) = A \cosh \alpha y + B \sinh \alpha y$. Невідомі сталі знайдемо з граничних умов (B.23):

$$\begin{aligned} u_{\alpha}(0) &= \Phi(\alpha) = A, \\ u_{\alpha}'(a) &= 0 = \alpha A \sinh \alpha a + \alpha B \cosh \alpha a, \\ A &= \Phi(\alpha), B = -\Phi(\alpha) \tanh \alpha a. \end{aligned}$$

Трансформанту Фур'є розв'язке вихідної задачі знайдено:

$$u_{\alpha}(y) = \Phi(\alpha) [\cosh \alpha x - \tanh \alpha a \sinh \alpha x] = \Phi(\alpha) \frac{\cosh \alpha(x-a)}{\cosh \alpha a}.$$

За допомогою формули обернення інтегрального перетворення Фур'є побудовано розв'язок вихідної крайової задачі:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha) \frac{ch\alpha(x-a)}{ch\alpha a} e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (B.24)$$

Приклад 4

Розглянемо початково-крайову задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \quad (B.25)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad u, \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad t > 0, \quad (B.26)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x < \infty. \quad (B.27)$$

Враховуючи, що змінна x змінюється на інтервалі $(0; +\infty)$ та у точці $x=0$ задана похідна функції, то відповідно до стандартних таблиць перетворень застосуємо \cos -перетворення Фур'є:

$$u_{\alpha}(t) = \int_0^{\infty} u(x, t) \cos \alpha x dx. \quad (B.28)$$

Помножимо обидві частини рівняння (B.25) на $\cos \alpha x$ та проінтегруємо за змінною x на $(0; \infty)$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} \cos \alpha x dx = a^2 \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos \alpha x dx.$$

У лівій частині рівності змінимо порядок інтегрування та диференціювання, а у правій частині застосуємо інтегрування за частинами:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} u \cos \alpha x dx = a^2 \left[-\alpha^2 u_{\alpha}(t) - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} \right].$$

Враховуючи умову (B.26), дістанемо звичайне диференціальне рівняння:

$$u'_{\alpha}(t) + a^2 \alpha^2 u_{\alpha}(t) = 0. \quad (B.29)$$

Застосуємо перетворення (B.28) до початкової умови (B.27):

$$\int_0^{\infty} u(x, 0) \cos \alpha x dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) \cos \alpha x dx, \quad (B.30)$$

$$u_{\alpha}(0) = \Phi(\alpha), \quad \text{де } \Phi(\alpha) = \int_0^{\infty} \varphi(x) \cos \alpha x dx.$$

Загальний розв'язок рівняння (В.29) має вигляд:

$$u_{\alpha}(t)=Ce^{-a^2\alpha^2t}.$$

Невідому сталу розшукаємо з умови (В.30):

$$u_{\alpha}(0)=\Phi(\alpha)=C.$$

Трансформанту шуканої функції побудовано:

$$u_{\alpha}(t)=\Phi(\alpha)e^{-a^2\alpha^2t}. \quad (\text{В.31})$$

З цього випливає зображення розв'язку вихідної крайової задачі:

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\Phi(\alpha)e^{-a^2\alpha^2t}\cos\alpha x d\alpha. \quad (\text{В.32})$$

Можна, враховуючи зображення (В.30), записати ретельніше:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-a^2\alpha^2t}\cos\alpha x d\alpha \int_0^{\infty}\varphi(\xi)\cos\alpha\xi d\xi = \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\varphi(\xi)d\xi \int_0^{\infty}e^{-a^2\alpha^2t}\cos\alpha x\cos\alpha\xi d\alpha. \end{aligned}$$

Відоме, що $\cos\alpha x\cos\alpha\xi=\frac{1}{2}(\cos\alpha(x-\xi)+\cos\alpha(x+\xi))$.

$$\int_0^{\infty}e^{-a^2\alpha^2t}\cos\alpha z d\alpha=\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{z^2}{4a^2t}}.$$

Отже, остаточно отримаємо розв'язок вихідної задачі:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}\varphi(\xi)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi. \quad (\text{В.33})$$

Приклад 5

Розв'язати початково-крайову задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<l, \quad t>0, \quad (\text{В.34})$$

$$u|_{x=0}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=\varphi(t), \quad t\geq 0, \quad (\text{В.35})$$

$$u|_{t=0}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{t=0}=0. \quad (\text{В.36})$$

Застосуємо за змінною x перетворення Лапласа:

$$u_{\alpha}(x) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-\alpha t} dt.$$

Перетворимо ліву частину рівності (В.34), враховуючи проведення інтегрування за частинами та нулеві початкові умови (В.36):

$$\alpha^2 u_{\alpha}(x) - \alpha u|_{t=0} - \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = a^2 \frac{d^2}{dx^2} \int_0^{\infty} u e^{-\alpha t} dt.$$

Диференціальне рівняння (В.34) у просторі трансформант Лапласа прийме вигляд:

$$u_{\alpha}''(x) - \frac{\alpha^2}{a^2} u_{\alpha}(x) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (\text{В.37})$$

Перетворимо за Лапласом крайові умови (В.35):

$$\int_0^{\infty} u|_{x=0} e^{-\alpha t} dt = 0; \quad \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} e^{-\alpha t} dt = \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-\alpha t} dt.$$

Звідки маємо:

$$u_{\alpha}(0) = 0; \quad u'_{\alpha}(l) = \Phi(\alpha), \quad \text{де } \Phi(\alpha) = \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-\alpha t} dt.$$

Загальний розв'язок рівняння (В.37) має вигляд:

$$u_{\alpha}(x) = A \operatorname{ch} \frac{\alpha x}{a} + B \operatorname{sh} \frac{\alpha x}{a}.$$

Для визначення сталих А та В використаємо умови:

$$u_{\alpha}(0) = 0 = A; \quad u'_{\alpha}(l) = \Phi(\alpha) = \frac{\alpha}{a} A \operatorname{ch} \frac{\alpha l}{a} + \frac{\alpha}{a} B \operatorname{sh} \frac{\alpha l}{a},$$

тобто, $A = 0, B = \frac{\alpha \Phi(\alpha)}{\alpha \operatorname{ch} \frac{\alpha l}{a}}.$

Отже, трансформанта шуканої функції має вигляд:

$$u_{\alpha}(x) = \frac{\alpha \Phi(\alpha)}{\alpha \operatorname{ch} \frac{\alpha l}{a}} \operatorname{sh} \frac{\alpha x}{a}.$$

Застосувавши до отриманого співвідношення обернене перетворення Лапласа, остаточно отримаємо формулу для розв'язка вихідної задачі:

$$u(x,t) = \frac{a}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Phi(\alpha) \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha x}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\alpha l}{a}} e^{\alpha t} d\alpha.$$

Самостійне завдання

Методом інтегральних перетворень розв'язати крайові задачі:

A

$$1. \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x); \quad u, \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty$$

$$2. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < a$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \varphi(x); \quad u|_{y=a} = 0; \quad u, \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty$$

$$3. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0; \quad u, \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty$$

$$4. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad -\infty < y < \infty$$

$$u|_{x=0} = \varphi(y); \quad u|_{x=a} = 0; \quad u, \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0 \quad \text{при } |y| \rightarrow \infty$$

$$5. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < a$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \varphi(y); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=a} = 0; \quad u, \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty$$

$$6. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u|_{t=0}; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{t=a} = \varphi(x); \quad u, \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty$$

$$7. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad -\infty < y < \infty$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0; \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a}=\varphi(y); \frac{\partial u}{\partial x}\rightarrow 0 \text{ при } |y|\rightarrow\infty$$

$$8. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, -\infty < x < \infty, 0 < y < a$$

$$u|_{y=0}=\varphi(x); u|_{y=a}=0; u, \frac{\partial u}{\partial x}\rightarrow 0 \text{ при } |x|\rightarrow\infty$$

$$9. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, 0 < x < a, -\infty < y < \infty$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0; u|_{x=a}=\varphi(y); u, \frac{\partial u}{\partial x}\rightarrow 0 \text{ при } |y|\rightarrow\infty$$

$$10. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, 0 < x < a, -\infty < y < \infty$$

$$u|_{x=0}=0; \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a}=\varphi(y); u, \frac{\partial u}{\partial y}\rightarrow 0 \text{ при } |y|\rightarrow\infty$$

Б

$$1. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < \infty, t > 0$$

$$u|_{x=0}=0; u, \frac{\partial u}{\partial x}\rightarrow 0 \text{ при } x\rightarrow\infty$$

$$u|_{t=0}=\varphi(y); \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$$

$$2. \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < \infty, t > 0$$

$$u|_{x=0}=0; u, \frac{\partial u}{\partial x}\rightarrow 0 \text{ при } x\rightarrow\infty; u|_{t=0}=\varphi(x)$$

$$3. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < \infty, t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0; u, \frac{\partial u}{\partial x}\rightarrow 0 \text{ при } x\rightarrow\infty$$

$$u|_{t=0}=0; \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi(x)$$

$$4. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, 0 < x < a, 0 < y < \infty$$

$$u|_{x=0}=\varphi(y); \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a}=0$$

$$u|_{y=0}=0; u, \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow \infty$$

$$5. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, 0 < x < \infty, 0 < y < a$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; u, \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0; u|_{y=a} = \varphi(x)$$

$$6. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, 0 < x < \infty, 0 < y < \infty$$

$$u|_{x=0} = 0; u, \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \varphi(x); u, \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow \infty$$

$$7. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, 0 < x < \infty, 0 < y < \infty$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty$$

$$u|_{y=0} = \varphi(x); u, \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow \infty$$

$$8. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < \infty, t > 0$$

$$u|_{x=0}; u, \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty$$

$$u|_{t=0} = 0; \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi(x)$$

$$9. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, 0 < x < a, 0 < y < \infty$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \varphi(y); u|_{x=a} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0; u, \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow \infty$$

$$10. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, 0 < x < \infty, 0 < y < \infty$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \varphi(y); u, \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; u, \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow \infty$$

B

$$1. \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < \infty, t > 0$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \varphi(t); u, \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty; u|_{t=0} = 0$$

$$2. \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0$$

$$u|_{x=0} = \varphi(t); \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0; u|_{t=0} = 0$$

$$3. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \varphi(t); u|_{t=0} = 0; \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

$$4. \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \varphi(t); u|_{t=0} = 0$$

$$5. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < \infty, t > 0$$

$$u|_{x=0} = \varphi(t); u, \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty; u|_{t=0} = 0; \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

$$6. \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < \infty, t > 0$$

$$u|_{x=0} = \varphi(t); u, \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty; u|_{t=0} = 0$$

$$7. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0$$

$$u|_{x=0} = 0; u|_{x=l} = \varphi(t); u|_{t=0} = 0; \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

$$8. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; u|_{x=l} = \varphi(t); u|_{t=0} = 0; \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

$$9. \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; u|_{x=l} = \varphi(t); u|_{t=0} = 0$$

$$10. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0$$

$$u|_{x=0} = 0; \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \varphi(t); u|_{t=0} = 0; \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

ДОДАТОК Г

Матриця Гріна одновимірних крайових задач

Під час розв'язання крайових задач математичної фізики досить часто виникає необхідність знайти розв'язок задачі, де розглядається система диференціальних рівнянь з певними граничними умовами. У цьому випадку є корисним використання апарата функції Гріна, роль якої виконує матриця Гріна.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь, яку можна записати у вигляді:

$$P_0(x)z'(x) + P_1(x)z(x) = f(x), \quad a < x < b, \quad (\text{Г.1})$$

де

$$z(x) = \|z_j(x)\|_0^{n-1}, \quad f(x) = \|f_j(x)\|_0^{n-1},$$

$$P_m(x) = \|P_{j,k}^m\|_0^{n-1} \quad (m=0,1; P_{j,k}^0=0, j \neq k).$$

Припускається, що елементи всіх матриць неперервні та визначник $\det P_0(x) \neq 0$ на інтервалі (a,b) .

Фундаментальною матрицею $\Phi(x, \xi) = \|\phi_{j,k}(x, \xi)\|_0^{n-1}$ називається така матриця, що матриця-стовбець:

$$z(x) = \int_a^b \Phi(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

є розв'язком рівняння (Г.1) для будь-якої неперервної матриці-стовбця $f(x)$.

Тут використано матеріал, взятий з навчального посібника Г. Я. Попов, С. А. Абдіманапов, В. В. Ефимов "Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. – Алматы: Изд. Руал. – 1999. – 113 с.»

Фундаментальним розв'язком матричного диференціального рівняння (Г.1) будемо називати матрицю:

$$z(x) = \|z_{j,k}(x)\|_0^{n-1},$$

визначник якої відмінний від нуля та яка задовольняє однорідне матричне рівняння:

$$P_0(x)z'(x) + P_1(x)z(x) = 0, \quad a < x < b. \quad (\text{Г.2})$$

Неважко помітити, що якщо матриця z є фундаментальним розв'язком, то матриця zC ($C = \|C_{j,k}\|_0^{n-1}$ – матриця сталих) також є розв'язком рівняння (Г.2).

Приєднаємо до рівняння (Г.1) граничний функціонал:

$$U = Az(a) + Bz(b) = \gamma,$$

$$\text{де } A = \|\alpha_{j,k}\|_0^{n-1}, B = \|\beta_{j,k}\|_0^{n-1}, \gamma = \|\gamma_j\|_0^{n-1}.$$

У відповідності зі скалярним випадком можна поставити неоднорідну, півнеоднорідну та однорідну крайову задачу для рівняння (Г.1):

$$P_0(x)z'(x) + P_1(x)z(x) = f(x), U[z] = \gamma, \quad (\text{Г.3})$$

$$P_0(x)z'(x) + P_1(x)z(x) = f(x), U[z] = 0, \quad (\text{Г.4})$$

$$P_0(x)z'(x) + P_1(x)z(x) = 0, U[z] = 0. \quad (\text{Г.5})$$

Для неособливих крайових умов має виконуватися:

$$\det U[z] \neq 0, U[z] = Az(a) + Bz(b). \quad (\text{Г.6})$$

Якщо крайові умови є неособливими, то однорідна крайова задача (Г.5) має тільки тривіальний розв'язок та навпаки. Якщо однорідна крайова задача (Г.5) має тільки тривіальний розв'язок, то має місце неособливість крайових умов (Г.6). Щоб впевнитися у цьому, загальний розв'язок zC підставимо до крайових умов

$$U[z] = U[zC] = 0.$$

Базисною матрицею крайових задач (Г.3) – (Г.5) називають матрицю $\psi(x) = \|\psi_{j,k}\|_0^{n-1}$, яка задовольняє задачу:

$$P_0(x)\psi'(x) + P_1(x)\varphi(x) = 0, a < x < b, U[\psi] = I, \left(I = \|\delta_{jk}\|_0^{n-1} \right) \quad (\text{Г.7})$$

При неособливих крайових умовах така матриця існує та будується за формулою:

$$\psi(x) = z(x)C, \text{ де } C = (U[z])^{-1}. \quad (\text{Г.8})$$

Існування та єдність матриці Гріна

Матрицею Гріна крайові задачі (Г.4) називають матрицю $G(x, \xi) = \|g_{j,k}(x, \xi)\|_0^{n-1}$, через яку розв'язок задачі зображується для довільної функції $f(x)$ за формулою:

$$z(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (\Gamma.9)$$

Якщо матрицю Гріна побудовано та відомо базисну матрицю $\psi(x)$, то розв'язок неоднорідної крайової задачі (Г.3) запишеться у вигляді:

$$z(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \psi(x) \gamma. \quad (\Gamma.10)$$

У відповідності зі скалярним випадком можна довести, що за неособливими крайовими умовами для задачі (Г.3) існує тільки одна матриця Гріна. Доведемо також і аналог теореми про чотири визначальні властивості функції Гріна.

Теорема

Матриця $G(x, \xi) = \|g_{j,k}(x, \xi)\|_0^{n-1}$, що має чотири наступні властивості, є матрицею Гріна крайової задачі (Г.3):

- 1) Матриця $G(x, \xi)$ – неперервна за обома змінними у кожній з трикутних областей: $a \leq x < \xi, \xi < x \leq b$.
- 2) На лінії $x = \xi$ матриця $G(x, \xi)$ зазнає стрибок, який визначається за формулами:

$$\begin{aligned} G(\xi+0, \xi) - G(\xi-0, \xi) &= (P_0(\xi))^{-1}, \\ G(x, x-0) - G(x, x+0) &= (P_1(x))^{-1}. \end{aligned}$$

- 3) У кожній з трикутних областей $a \leq x < \xi, \xi < x \leq b$ матриця $G(x, \xi)$ за змінною x задовольняє рівняння (Г.2):

$$P_0(x) G'(x, \xi) + P_1(x) G(x, \xi) = 0. \quad (\Gamma.12)$$

- 4) Матриця $G(x, \xi)$ задовольняє однорідну крайову умову

$$U[G] = 0. \quad (\Gamma.13)$$

Зауважимо, що якщо матриця задовольняє перші три умови, то така матриця є фундаментальною матрицею рівняння (Г.1).

Якщо крайові умови задачі є неособливими, то завжди існує матриця Гріна. Для її побудови зручно використати подання матриці у вигляді:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} z(x)A^0(\xi), & x < \xi \\ z(x)B^0(\xi), & x > \xi, \end{cases} \quad (\Gamma.14)$$

де $z(x)$ – фундаментальний розв’язок рівняння (1.1), а $A^0(\xi), B^0(\xi)$ – довільні матриці, елементи яких залежать від параметра ξ . Умови (2) та (4) задовольнимо, підставивши зображення функції Гріна (Г.14) до рівності (Г.12) та (Г.13):

$$\begin{aligned} z(\xi)[B^0(\xi) - A^0(\xi)](P_0(\xi))^{-1}, \\ Az(a)A^0(\xi) + Bz[b]B^0(\xi) = 0. \end{aligned} \quad (\Gamma.15)$$

Отримані рівняння для визначення матриці $A^0(\xi)$ та $B^0(\xi)$ розв’язуємо єдиним чином за рахунок неособливості крайових умов. Таким чином, доведено наступне ствердження.

Теорема

Якщо однорідна крайова задача (Г.5) має тільки тривіальний розв’язок (тобто крайові умови є неособливими), то півнеоднорідна крайова задача (Г.4) має одну і тільки одну матрицю Гріна, для якої виконуються всі чотири властивості теореми. Матриця може бути сконструйована за формулою (Г.14), де матриці $A^0(\xi)$ та $B^0(\xi)$ розшукуються з системами матричних рівнянь (Г.15).

Засоби побудови матриці Гріна

Застосування формул (Г.14) та (Г.15) для побудови матриці Гріна пов’язано з проведенням громіздких викладок. Тому варто використовувати засоби побудови простішого характеру. Розглянемо деякі з них.

Наявність фундаментальної матриці значно спрощує побудову матриці Гріна, за якою будується формула. У цьому випадку матриця Гріна має вигляд:

$$G(x, \xi) = \Phi(x, \xi) + z(x)C(\xi), \quad (\Gamma.16)$$

де $z(x)$ – фундаментальний розв’язок. Матрицю $C(\xi)$ визначимо, розв’язавши граничну умову (Г.13).

Схема стає ще більш простою, якщо окрім фундаментальної матриці відома і базисна матриця $\psi(x)$. Тоді формула для матриці Гріна подається так:

$$G(x, \xi) = \Phi(x, \xi) - \psi(x) \square [\Phi]. \quad (\Gamma.17)$$

Справедливість формул (Г.16) та (Г.17) доводиться за схемою скалярного випадку.

Як бачимо, суттєво важливим моментом у побудові матриць Гріна є наявність фундаментальних матриць. Продемонструємо тут два загальні способи їх побудови.

Припустимо, що фундаментальний розв'язок $z(x)$ рівняння (Г.1) відомий, тоді як за фундаментальну матрицю можна взяти матрицю:

$$\Phi(x, \xi) = 1/2 \operatorname{sgn}(x - \xi) z(x) z^{-1}(\xi) (P_0(\xi))^{-1}. \quad (\Gamma.18)$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що умови (1) – (3) теореми виконано.

Часто з метою побудови фундаментальної матриці зручно використати метод інтегральних перетворень. Для цього має виконуватися співвідношення:

$$\int_{a_0}^{a_1} K(x, \alpha) [P_0(x) z'(x) + P_1(x) z(x)] dx = M_\alpha z_\alpha \quad (\Gamma.19)$$

Тут $K(x, \alpha)$ – матриця ядра інтегрального перетворення, яке зведе диференціальне матричне рівняння до алгебраїчного матричного рівняння:

$$M_\alpha z_\alpha = f_\alpha, \quad f_\alpha = \int_a^b K(\xi, \alpha) f(\xi) d\xi, \quad (\Gamma.20)$$

$$z_\alpha = \int_a^b K(\xi, \alpha) z(\xi) d\xi.$$

Отже, фундаментальна матриця у такому випадку будується за формулою:

$$\Phi(x, \xi) = \int_l R(x, \alpha) M_\alpha^{-1} K(\xi, \alpha) d\sigma(\alpha), \quad (\Gamma.21)$$

де $R(x, \alpha)$ – ядро оберненого матричного інтегрального перетворення.

Усе вищезазначене легко переноситься на випадок матричного диференціального рівняння порядку вище за перший. Наприклад, у

випадку диференціального рівняння n -го порядку роль фундаментальної системи розв'язків $y_j(x)$, $j=\overline{0, n-1}$ будуть виконувати матричні розв'язки Y_j , $j=\overline{0, g-1}$ рівняння:

$$\sum_{j=0}^n P_j(x) Y^{n-j}(x) = 0, a < x < b \quad (\Gamma.22)$$

(визначник Вронського тут є відмінним від нуля).

Загальний розв'язок однорідного рівняння через фундаментальну матричну систему розв'язків записується у вигляді:

$$Y = Y_0 C_0 + Y_1 C_1 + \dots + Y_{n-1} C_{n-1}, \quad (\Gamma.23)$$

де C_j , $j=\overline{0, n-1}$ – квадратичні матриці сталих.

Побудова фундаментального розв'язку для системи фундаментальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

Якщо матриці $P_i(x)$ $i=\overline{0, 1}$ у рівнянні (Г.1) є постійними, то, не обмежуючи загальності, рівняння (Г.1) можна записати у вигляді:

$$z'(x) - \lambda P z(x) = f(x), a < x < b, \quad (\Gamma.24)$$

де α – комплексний параметр, $P = \|p_{j,k}\|_0^{n-1}$ – матриця сталих.

Покажемо засіб побудови фундаментального розв'язку рівняння (Г.24), тобто маємо отримати розв'язок матричного рівняння:

$$z'(x) - \lambda P z(x) = 0. \quad (\Gamma.25)$$

Введемо до розгляду матрицю:

$$M(\xi) = I_\xi - \lambda P, \quad (\Gamma.26)$$

визначник якої:

$$\det M = \det \|\delta_{j,k} \xi - \lambda P_{j,k}\|_0^{n-1} = Q_n(\xi)$$

є характеристичним многочленом матриці λP . Для нього має місце зображення:

$$Q_n(\xi) = \prod_{j=0}^{n-1} (\xi - \xi_j) = \sum_{j=0}^n \xi^j \lambda^{n-j} q_{n-j}, (q_0 = I). \quad (\Gamma.27)$$

Позначимо приєднану до матриці (Г.26) матрицю як $\Delta^*(\xi)$. Вона є транспонованою матрицею до матриці алгебраїчних доповнень визначника (Г.27). Легко перевірити, що справедливі наступні співвідношення:

$$(I_\xi - \lambda P) \Delta^* = Q_n I, \Delta^* = (I_\xi - \lambda P)^{-1} Q_n I. \quad (\Gamma.28)$$

Покажемо, що матриця:

$$z(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\Delta^*(\xi)}{Q_n(\xi)} e^{x\xi} d\xi \quad (\Gamma.29)$$

задовольняє диференціальне рівняння (Г.25) (тут C – будь-який замкнений контур у площині комплексної змінної, який не містить нулів многочлена (Г.28)). Дійсно, підставивши зображення (Г.29) до рівняння (Г.25), отримаємо:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(I_\xi - \lambda P) \Delta^*(\xi)}{Q_n(\xi)} e^{x\xi} d\xi = 0. \quad (\Gamma.30)$$

Тотожність впливає зі співвідношень (Г.28) та теореми Коші.

Таким чином, матрицю (Г.29) можна брати за фундаментальний розв'язок диференціального рівняння (Г.24), перевіривши при цьому, що Вронскіан не дорівнює нулеві. Остання умова, як правило, виконується, якщо контур C охоплює всі нулі характеристичного многочлена (Г.27).

Формула (Г.29) зберігає силу і під час розв'язування матричних рівнянь (Г.22) з постійними коефіцієнтами $P_j(x) = \text{const}, j = \overline{0, n-1}$. У цьому випадку роль матриці (Г.26) та многочлена (Г.27) виконують відповідно:

$$M(\xi) = \sum_{j=0}^n P_j \xi^{n-j}, \quad (\Gamma.31)$$

$$Q_N(\xi) = \sum_{j=0}^N q_{N-j} \xi = q_0 \prod_{j=0}^n (\xi - \zeta_j), \quad (\Gamma.32)$$

де $N = nt$, t – порядок квадратних матриць $P_j, j = \overline{0, n-1}$.

Якщо приєднану матрицю зобразити у вигляді:

$$\Delta^*(\xi) = \sum_{j=0}^{n-1} \xi^j \lambda^{n-j-1} \Delta_{n-1-j}, \quad (\Gamma.33)$$

то отриманий розв'язок (Г.29) можна подати у формі:

$$z(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_{n-1-j}}{\lambda^{j+1-n}} u^{(j)}(x), \quad (\Gamma.34)$$

$$u^{(j)}(x) = \frac{d^j u}{dx^j} \quad (\Gamma.35)$$

де

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\Delta^*(\xi)}{Q_n(\xi)} d\xi = I. \quad (\Gamma.36)$$

Щоб впевнитись у цьому, врахуємо, що за визначенням приєднаної матриці $\Delta^* = \|\Delta_{j,k}\|_0^{n-1}$, її елементи мають наступні асимптотичні зображення, коли $\xi \rightarrow \infty$:

$$\Delta_{j,k}(\xi) = \begin{cases} 0(\xi^{n-2}), & j \neq k \\ \xi^{n-1} + 0(\xi^{n-2}), & j = k. \end{cases} \quad (\Gamma.37)$$

Якщо в інтегралі (Г.29) контур C охоплює всі нулі многочлена $Q(\xi)$, то при $x=0$ він буде дорівнювати лишку підінтегральної функції при $\xi \rightarrow \infty$. Підрахувавши його, впевнимось у справедливості формули (Г.37).

Важливим елементом викладеної схеми є побудова приєднаної матриці $\Delta^*(\xi)$ та характеристичного многочлена $Q_n(\xi)$.

Нехай приєднана матриця має вигляд (Г.33). Підставимо цей вираз у першу рівність (Г.28) та помножимо обидві її частини на λ^{-n} . Це приведе до співвідношення:

$$(\mu I - P) \sum_{j=0}^{n-1} \mu^j \Delta_{n-j-1} = I \sum_{j=0}^n \mu^j q_{n-j}, \quad \mu = \frac{\xi}{\lambda} \quad (\Gamma.38)$$

Дорівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях μ , отримаємо рекурентні формули:

$$\begin{aligned} \Delta_m &= I q_m + P \Delta_{m-1} \quad (m = \overline{1, n-1}), \\ \Delta_0 &= I, \quad P \Delta_{n-1} + I q_n = 0 \end{aligned} \quad (\Gamma.39)$$

для визначення шуканих матриць Δ_m . Останню рівність з співвідношень (Г.39) можна використовувати для контролю розрахунків.

Як показано у монографії Г. Я. Попова «Матриці функції Гріна одномірних крайових задач», рекурентні формули (Г.39) можна перетворити у наступні явні формули:

$$\Delta_K = P^K + q_1 P^{K-1} + q_2 P^{K-2} + \dots + q_K I, \quad b = \overline{0, n-1}. \quad (\Gamma.40)$$

Є й інший шлях визначення приєднаної матриці

$$B(\lambda) = \delta(\lambda I, A); \delta(\lambda, \mu) = (\lambda - \mu)^{-1} [\Delta(\lambda) - \Delta(\mu)],$$

замість $B(x)$ та $\Delta(x)$ взявши відповідно $B(x) = \Delta^*(x)$, $\Delta(x) = Q_n(x)$.

Розглянемо приклад побудови фундаментального розв'язку. Нехай матриця P , що входить до рівняння (Г.24), є матрицею четвертого порядку и має таку структуру:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & P_+ \\ P_- & 0 \end{pmatrix}, P_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_0 & 1 \end{pmatrix}, P_- = \begin{pmatrix} v_1 & -1 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix}, \quad (\Gamma.41)$$

де $v_j (j=0,1,2,3)$ – дійсні числа. Розглянемо два випадки:

$$1) \lambda = \beta (I_m \beta = 0), \quad v_0 + v_1 + v_3 = 2, \quad v_1 v_3 + v_2 = 1 \quad (\Gamma.42)$$

$$2) \lambda = i\beta (I_m \beta = 0), \quad v_0 + v_1 + v_3 = -2, \quad v_1 v_3 + v_2 = 1$$

Підрахуємо спочатку характеристичний многочлен (Г.27). У випадку $n=4$, що розглядається, та завдяки спеціальному вигляду матриці P для підрахунку можна використати формулу Шура :

$$\det(I_\xi - \lambda P) = \det(I_\xi^2 - \lambda^2 P_- P_+).$$

Отже,

$$Q_4(\xi) = (\xi^2 \mp \lambda^2)^2, \quad (\Gamma.43)$$

$$q_4 = 1, q_3 = 0, q_2 = \mp 2, q_1 = 0.$$

Для того, щоб розшукати приєднану матрицю, застосуємо формули (Г.39), (Г.40), з яких випливає, що:

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= I, \Delta_1 = P, \Delta_2 = P^2 + q_2 I, \\ \Delta_3 &= P(P^2 + q_2 I), \Delta_3 = -P^{-1}. \end{aligned} \quad (\Gamma.44)$$

Якщо порівняти дві останні рівності, то встановимо, що:

$$P^2 + q_2 I = -(P^{-1})^2$$

Остаточно, коефіцієнти приєднаної матриці запишемо у вигляді:

$$\Delta_0 = I, \Delta_1 = P, \Delta_2 = -(P^{-1})^2, \Delta_3 = -P^{-1}, \quad (\Gamma.45)$$

де обернена матриця P^{-1} легко розшукується за допомогою операцій з блоками P_\pm :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & P_-^{-1} \\ P_+^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

З співвідношення (Г.43) бачимо, що характеристичний многочлен має двократні корені у точках $\xi = \pm|\beta|$. Підрахувавши лишки за формулою

$$u(x) = \sum_{j=0} \text{Res} \left[\frac{e^{\xi x}}{Q_n(\xi)} \right]_{\xi=\xi_j}, \text{ отримаємо:}$$

$$\begin{aligned} 2u_\beta^0(x) &= |\beta|^{-3} (|\beta|) xch\beta x - sh|\beta|x, \\ 2|\beta|u_\beta^{(1)}(x) &= xsh|\beta|x, \\ 2|\beta|u_\beta^{(2)}(x) &= |\beta|xch\beta x + sh|\beta|x, \\ 2u_\beta^{(3)}(x) &= 2ch\beta x + |\beta|xsh|\beta|x. \end{aligned} \quad (\text{Г.46})$$

Таким чином, шуканий фундаментальний розв'язок рівняння (Г.24) у випадку, що розглядали, має вигляд:

$$z(x) = \sum_{j=0}^3 \Delta_{3-j} \lambda^{3-j} u_\beta^{(j)}(x). \quad (\text{Г.47})$$

Тут матриці Δ_m та функції $u_\beta(x)$ визначені за формулами (Г.45) та (Г.46), а $\lambda = \beta$ у випадку ситуації 1), $\lambda = i\beta$ у випадку ситуації 2).

Побудова фундаментальної матриці та матриці Гріна

Фундаментальну матрицю для вихідного рівняння (Г.24) легше всього будувати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Відповідно до властивості цього перетворення, отримаємо рівняння у просторі трансформант:

$$I(-i\alpha)Z_\alpha - \lambda PZ_\alpha = f_\alpha, \quad f_\alpha = \int_a^b \frac{f(x)dx}{\exp(-i\alpha x)}. \quad (\text{Г.48})$$

З рівності (Г.48) випливає, що матриця M_α будується за формулою:

$$M_\alpha = -i\alpha I - \lambda P = M(-i\alpha).$$

Обернену до неї матрицю розраховано за формулами (Г.33) та (Г.34):

$$M_\alpha^{-1} = M^{-1}(i\alpha) = \Delta^*(-i\alpha)Q_n^{-1}(-i\alpha).$$

Обернена матриця набуває вигляду:

$$\Phi(x, \xi) = E(x - \xi), E(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^*(-i\alpha) e^{-i\alpha y}}{Q_n(-i\alpha)} d\alpha, \quad (\Gamma.49)$$

або враховуючи зображення (Г.47):

$$\Delta^*(\xi) = \sum_{j=0}^{n-1} \xi^j \lambda^{n-j-1} \Delta_{n-1-j},$$

$$E(y) = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta_{n-1-j} \lambda^{n-1-j} e^{(j)}(y),$$

$$\text{де } e(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha y} d\alpha}{Q_n(-i\alpha)}, e^{(i)}(y) = \frac{d^j e}{dy^j}.$$

Легко бачити, що побудована фундаментальна матриця має ту ж саму структуру, що і фундаментальний розв'язок (Г.46). Крім того, вона є частковим випадком фундаментальних матриць, що визначені за формулою:

$$E(y) = \pm \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\pm}} \frac{\Delta^*(\xi) e^{\xi y} d\xi}{Q_n(\xi)}, \quad \begin{matrix} y > 0 \\ y < 0 \end{matrix} \quad (\Gamma.50)$$

Продемонструємо використання отриманих формул до побудови фундаментальної матриці для рівняння $Z'(x) - \lambda PZ(x) = f(x)$ у випадку (Г.41). Для цього випадку характеристичний многочлен ($Q_n = Q_4$) та приєднана матриця вже побудовано за формулами (Г.43), (Г.44) відповідно. Інтеграли, які маємо підрахувати, є табличними, а саме:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-it(y)} dt}{(t^2 + \beta^2)^2} = \frac{(1 + |\beta y|) e^{-|\beta y|}}{4|\beta|^3}.$$

Враховуючи ці отримані раніше співвідношення, побудуємо фундаментальну матрицю:

$$\Phi(x, \xi) = E(x - \xi), E(y) = \sum_{j=0}^3 \Delta_{3-j} e_{\beta}^{(j)}(y), \quad (\Gamma.51)$$

де:

$$e_{\beta}(y) = 1/4|\beta|^{-3} e^{-|\beta||y|} (|\beta y| + 1),$$

$$4|\beta| e_{\beta}^{(1)}(y) = -e^{-|\beta y|} y,$$

$$4|\beta|e_{\beta}^{(2)}(y)=-e^{-|\beta y|}(|\beta y|-1),$$

$$4e^{(3)}(y)=e^{-|\beta y|}(r \operatorname{sgn} y-|\beta|y).$$

Тут $\lambda=\beta$, якщо має місце ситуація 1) з формул (Г.42), або $\lambda=i\beta$, якщо має місце ситуація 2) з (Г.42).

Після того, як побудовані фундаментальний розв'язок та фундаментальні матриці, побудову матриці Гріна можна здійснити як найменше двома засобами. Спершу, зобразивши матричну функцію Гріна у вигляді $G(x, \xi)=\Phi(x, \xi)+Z(x)C(\xi)$ та розшукуючи у подальшому матрицю констант $C(\xi)$ шляхом задоволення крайових умов задачі. По-друге, можна розшукати базисну матрицю з розв'язання відповідної крайової задачі, після чого матриця Гріна запишеться у вигляді: $G(x, \xi)=\Phi(x, \xi)-\psi(x)V[\Phi]$.

Помітимо, що якщо матриця Гріна потрібна для розв'язання неоднорідної крайової задачі, то перевагу маємо віддати другому засобу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1966. – Т. 1 – 296 с.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М. : Физматгиз, 1962. – 1160 с.
3. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. – Москва: Наука, 1984. – 382 с.
4. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – Москва : Наука, 1988. – 512 с.
5. Николенко В. Н. Уравнения математической физики. – М. : Издательство МГУ, 1977. – 110 с.
6. Положий Г. М. Рівняння математичної фізики. – Київ : Рад. шк., 1959. – 479 с.
7. Піх С. С., Попель О. М., Ровенчак А. А., Тальянський І. І. Методи математичної фізики. – Львів, 2011. – 402 с.
8. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. – М. : Наука, 1966. – 443 с.
9. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М. : Наука, 1966. – 724 с.

Навчальне видання

Вайсфельд Наталія Данилівна,
Реут Віктор Всеволодович

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
для студентів спеціальності «Прикладна математика»

В авторській редакції

Видано за редакцією авторів

Підп. до друку 31.10.2018. Формат 70х108/16. Ум. друк. арк 16,97.

Тираж 50 пр. Зам. № 1802.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова

Україна, 65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 4215 від 22.11.2011 р.

Тел.: (048) 723 28 39.
E-mail: druk@onu.edu.ua