

ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертационной работе Дрожжиной А. В.
«Асимптотична поведінка розв'язків нелінійних неавтономних
звичайних диференціальних рівнянь n -го порядку»,
представленной на соискание учёной степени
доктора философии по специальности
111 — математика

Актуальность темы. В рецензируемой работе на конечном или бесконечном промежутке $[a, \omega[$ рассмотрено нелинейное неавтономное обыкновенное дифференциальное уравнение $n \geq 2$ -го порядка

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1)$$

где $f: [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \dots \times \Delta_{Y_{n-1}} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $Y_i \in \{0, -\infty, +\infty\}$, а Δ_{Y_i} — некоторая односторонняя окрестность Y_i ($i = 0, \dots, n-1$). Ранее в моих работах для уравнения (1) были получены условия существования кнезеровских, медленно растущих, быстро растущих и сингулярных решений, а также установлены двухсторонние асимптотические оценки таких решений. В отличие от этого в диссертации ставится задача об установлении условий существования так называемых $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решений, и об асимптотических представлениях таких решений и их производных до порядка $n-1$ включительно. Этот класс решений является конкретизированным для уравнения (1) классом $P_\omega(\lambda_0)$ -решений, который был введён научным руководителем диссертанта В.М. Евтуховым при изучении асимптотического поведения решений обобщенных уравнений типа Эмдена-Фаулера n -го порядка. Множеству $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решений принадлежат, например, кнезеровские, быстро растущие решения, сингулярные решения первого и второго родов. Кроме того, оно содержит также и решения некоторых других типов, в частности, правильно меняющиеся, медленно меняющиеся и быстро изменяющиеся по Й. Карамата решения. Так что, актуальность темы диссертации не вызывает сомнений.

Основные результаты работы. В первой главе диссертации исследованы общие свойства $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решений. В частности, выяснено, что асимптотическое поведение таких решений при $t \uparrow \omega$ для значений параметра λ_0 из множеств

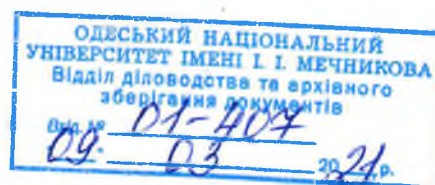
$$\left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-2}{n-1} \right\}, \quad \{1, -\infty, +\infty\}$$

существенно отличаются друг от друга. Например, если $\lambda_0 = 1$, они и их производные до порядка $n-1$ являются быстро меняющимися функциями при $t \uparrow \omega$, а если λ_0 — из первого множества, то они вместе с производными до порядка $n-1$ включительно являются правильно меняющимися при $t \uparrow \omega$ функциями с отличными от нуля порядками.

В главах 2–5 диссертации строится асимптотическая теория $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решений в случае, когда параметр λ_0 принимает значения из вышеупомянутых двух множеств.

Автором диссертации вводится условие $(RN)_{\lambda_0}$ на правую часть дифференциального уравнения (1), выполнение которого для любого $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решения гарантирует справедливость асимптотического соотношения

$$y^{(n)}(t) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(y^{(j)}(t)) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega, \quad (2)$$



где $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная функция, а каждая $\varphi_j : \Delta_{Y_j} \rightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная и правильно меняющаяся при стремлении аргумента к Y_j функция порядка σ_j . Введение этого условия позволило диссертанту использовать методы, разработанные в работах V. Marić, M. Tomić, S.D. Taliaferro, В.М. Евтухова, А.М. Самойленко, А.М. Клопота и других авторов при изучении асимптотического поведения решений дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями. Для реализации этого оригинального подхода автору пришлось проделать далеко не тривиальную, трудоёмкую работу и преодолеть серьёзные математические трудности.

В результате проведенного в диссертации исследования для каждого из $n + 2$ возможных значений параметра λ_0 для дифференциального уравнения общего вида (1) в случае выполнения условия $(RN)_{\lambda_0}$:

- установлены необходимые условия существования $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решений, а также асимптотические представления в неявном виде таких решений и их производных до порядка $n - 1$ включительно;

- приведены дополнительные условия на медленно меняющиеся составляющие нелинейностей φ_j ($j = 0, 1, \dots, n - 1$), при которых асимптотические представления $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решений могут быть записаны в явном виде;

- установлены достаточные условия существования решений с заданными асимптотическими представлениями.

С использованием этих результатов получены также признаки наличия у дифференциального уравнения (1) сингулярных $P_{\omega_*}(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решений и найдены асимптотические представления таких решений и их производных до порядка $n - 1$ включительно.

Бесспорно интересны и конкретизации упомянутых результатов для дифференциальных уравнений вида

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) |y|^\sigma \ln(1 + |y|). \quad (3)$$

Считаю, что автору диссертации удалось решить трудные задачи качественной теории неавтономных дифференциальных уравнений и построить содержательную теорию $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решений, изобилующую глубокими и тонкими результатами.

Научная новизна и степень обоснованности результатов. Все результаты диссертации являются новыми. Они впервые были получены для дифференциальных уравнений общего вида (1), асимптотически эквивалентных в некотором смысле дифференциальным уравнениям с правильно меняющимися нелинейностями. Их обоснованность и достоверность не вызывают сомнений. Все доказательства проведены чётко и аккуратно.

Полнота изложения в опубликованных работах и апробация диссертации. Все результаты диссертации опубликованы в четырех статьях, две из которых напечатаны в изданиях, перевод которых индексирован в наукометрической базе SCOPUS ("Український математический журнал", "Нелінійні колибання"), а две другие в научных изданиях из перечня фаховых изданий, утвержденных МОН Украины ("Дослідження в математиці і механіці", "Науковий вісник Ужгородського університету"), а также в шести тезисах международных научных конференций. Кроме того, они неоднократно докладывались на научном семинаре кафедры дифференциальных уравнений, геометрии и топологии Одесского национального университета имени И.И. Мечникова.

Практическое значение полученных результатов. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты и предложенная в работе методика могут быть использованы при исследовании асимптотических свойств решений дифференциального уравнения (1) в случае, когда функция f удовлетворяет более общему условию, чем

условие $(RN)_{\lambda_0}$. Они могут быть применены также для описания асимптотического поведения решений дифференциальных уравнений, которые являются математическими моделями реальных процессов, изучаемых на практике.

Замечания.

1. В случае, когда все медленно меняющиеся составляющие функций φ_j ($j = 0, 1, \dots, n-1$) из (2) удовлетворяют условию S , в диссертации получены асимптотические представления $P_{\omega_*}(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решений в явном виде. Возникает вопрос на сколько это условие является окончательным для получения таких представлений. Например, было бы интересно выяснить, допускают ли такие представления решения уравнения

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) |y|^\sigma e^{\sqrt{|y|}},$$

нелинейность которого не удовлетворяет условию S .

2. Было бы целесообразно привести конкретизаций основных результатов диссертации для дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \varphi(y), \tag{4}$$

где $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ - непрерывная и правильно меняющаяся функция порядка σ .

3. Известно, что если $\alpha_0 = (-1)^n$, $\sigma > 0$, а $p : [a, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ и $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ суть непрерывные функции такие, что

$$\int_a^{+\infty} t^{n-1} p(t) dt = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0,$$

то как уравнение (3), так и уравнение (4) обладает однопараметрическим семейством исчезающих в бесконечности кнезеровских решений. Было бы крайне интересным выяснить при каких дополнительных ограничениях на функциях p и φ являются все эти кнезеровские решения $P_{+\infty}(0, 0, \dots, 0, \lambda_0)$ -решениями.

Сделанные замечания носят в основном характер пожеланий для дальнейшей научной работы диссертанта и не влияют на общую положительную оценку работы.

Выводы. По объему проведенных научных исследований, актуальностью темы и научной ценностью полученных результатов, в полной мере отраженных в публикациях автора, диссертационная работа Дрожжиной Анастасии Вадимовны «Асимптотична поведінка розв'язків нелінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь n -го порядку», соответствует всем требованиям, предусмотренным пунктом 10 Постановления Кабинета Министров Украины № 167 "Про проведення експерименту з присудження ступеня доктора філософії" від 6.03.2019 р. (с изменениями внесенными Постановлением КМ № 979 от 21.10.2020 г.), а ее автор Дрожжина А.В. заслуживает присуждения ей учёной степени доктора философии по специальности 111- математика.

Официальный оппонент,
заведующий отделом дифференциальных уравнений

Института математики имени А. Размадзе
Тбилисского государственного университета имени И. Джавахишвили,
академик НАН Грузии, доктор
физико-математических наук, профессор

Подпись академика И. Т. Кигурадзе
Директор Института математики
имени А. Размадзе, профессор



И. Кигурадзе Кигурадзе И.Т.

22.02.2021

Парцвания Н.Л.